

## UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
 PLANTEL VALLEJO  
 ÁREA DE MATEMÁTICAS  
 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD II



## DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Frecuentemente un experimento consiste en ensayos repetidos, cada uno con dos resultados posibles que podemos llamarlos *éxito* y *fracaso*. Una aplicación práctica se da cuando se revisa una unidad de un producto en la línea de producción, donde cada ensayo consiste en indicar si la unidad está o no defectuosa.

Otros ejemplos de estas situaciones similares pueden ser. Una nueva droga administrada a un paciente puede ser efectiva o no, como resultado de una entrevista un vendedor puede o no llevar a cabo una venta.

Estos experimentos tienen las características de que las repeticiones o ensayos son independientes y la probabilidad de éxito permanece constante para cada uno de ellos.

Si denotamos por E y F (éxito y fracaso) las dos posibles categorías de los resultados, y por  $p$  y  $q$  las probabilidades de E y F, respectivamente, entonces tenemos que:

$$P(E) = p \quad P(F) = q = 1 - p$$

La palabra “éxito” tal como se utiliza en esta distribución es arbitraria y no necesariamente describe un resultado favorable. Cualquiera de las dos categorías podría ser el éxito E, en tanto la probabilidad correspondiente se identifique como  $p$ . Una vez que una categoría se ha designado como el éxito E, asegúrese de que  $p$  sea la probabilidad de éxito y  $x$  sea el número de éxitos. Es decir asegúrese de que  $p$  y  $x$  se refieren a la misma categoría que se designó como éxito.

Un experimento binomial es aquel que satisface los requisitos siguientes:

- 1.- El experimento consiste de  $n$  ensayos idénticos.
- 2.- Los ensayos deben ser independientes (el resultado de cualquier ensayo no afecta las probabilidades de los otros ensayos).
- 3.- Cada ensayo produce uno de dos resultados. El resultado de cada ensayo se puede clasificar como un éxito o como un fracaso.
- 4.- La probabilidad de éxito, representada por  $p$ , permanece constante para todos los intentos, es decir; las probabilidades de éxito  $p$  y fracaso  $q = 1 - p$  son constantes para cada ensayo.
- 5.- La variable de interés  $X$ , representa el número de éxitos en los  $n$  ensayos.

Si realizamos un experimento binomial, la distribución de la variable aleatoria  $X$  se denomina *distribución de probabilidad binomial* (o *distribución binomial*)

En un experimento binomial es posible calcular la probabilidad usando la fórmula de probabilidad binomial:

$$P(x) = {}_n C_x \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Donde:

n = número de ensayos

x = número de éxitos en n ensayos

p = probabilidad de éxito en cualquier ensayo

q = probabilidad de fracaso en cualquier ensayo (q = 1 – p).

Ejemplo 1.- El 20% de las ventas de automóviles nuevos corresponde a automóviles importados. Si seleccionamos aleatoriamente a 5 personas que han comprado un automóvil nuevo, durante la semana pasada. Determine la probabilidad de que:

- 4 personas hayan comprado un automóvil importado,
- de que sólo una de ellas haya comprado un automóvil importado,
- ninguna haya comprado automóvil importado.

Para este ejemplo: Éxito = comprar un automóvil importado, Fracaso = comprar un auto no importado, n = 5, P(E) = p = 0.20, P(F) = q = 1- p = 1 – 0.20 = 0.80

- número de éxitos 4, x = 4

$$P(x=4) = {}_5 C_4 (0.20)^4 (0.80)^1 = 0.00128.$$

Lo cual nos indica que hay una probabilidad del 0.12% de que al seleccionar 5 personas que compraron auto nuevo, 4 de ellos sean importados.

- número de éxitos 1, x = 1

$$P(x=1) = {}_5 C_1 (0.20)^1 (0.80)^4 = 0.4096$$

Lo que nos dice que hay una probabilidad del 40.96% de que al seleccionar 5 personas que compraron auto nuevo, 1 de ellos sea importado.

- número de éxitos 0, x = 0

$$P(x=0) = {}_5 C_0 (0.20)^0 (0.80)^5 = 0.32768$$

Por lo que hay una probabilidad del 32.76% de que al seleccionar 5 personas que compraron auto nuevo, ninguno compro auto importado.

Ejemplo 2.- Se sabe que el 77% de los adolescentes, tienen preferencia por un juego de video, si se seleccionan aleatoriamente seis adolescentes, determinar las siguientes probabilidades:

- Los seis prefieran este juego de video
- al menos uno prefiera este juego de video
- más de cuatro prefieran este juego de video

Identificando elementos: Éxito = prefiera este juego de video, Fracaso = no prefiera este juego de video, n = 6, P(E) = p = 0.77, P(F) = q = 1 – 0.77 = 0.23,

a) número de éxitos 6,  $x = 6$

$$P(x)=_6C_6(0.77)^6(0.23)^0 = 0.20482$$

Hay una probabilidad del 20.48% de que en un grupo de 6 adolescentes, todos prefieran este juego de video.

b) al menos uno, es decir uno o más, por lo que el número de éxitos de X puede ser 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(x \geq 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(x \geq 1) = {}_6C_1(0.77)^1(0.23)^5 + {}_6C_2(0.77)^2(0.23)^4 + {}_6C_3(0.77)^3(0.23)^3 +$$

$${}_6C_4(0.77)^4(0.23)^2 + {}_6C_5(0.77)^5(0.23)^1 + {}_6C_6(0.77)^6(0.23)^0$$

$$P(x \geq 1) = 0.00297 + 0.02488 + 0.11109 + 0.27893 + 0.37353 + 0.20842$$

$$P(x \geq 1) = .99982$$

La probabilidad de que al menos uno de los adolescentes prefiera esta juego de video es del 99.89%

c) más de 4 indica que x debe ser 5 ó más, por lo que el número de éxitos puede ser 5 ó 6

$$P(x > 4) = P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(x > 4) = {}_6C_5(0.77)^5(0.23)^1 + {}_6C_6(0.77)^6(0.23)^0$$

$$P(x > 4) = 0.37353 + 0.20842$$

$$P(x > 4) = 0.58195$$

La probabilidad de que más de 4 adolescente prefieran este juego de video es del 58.19%.

Ejemplo 3.- Un cazador de faisanes mata un 70% de las aves a las que dispara con su escopeta.

a) ¿Qué probabilidad hay de que escapen dos de los siguientes 4 faisanes a los que dispara?

b) ¿Qué probabilidad hay de que escapen dos de los siguientes 5 faisanes a los que dispara?

Para este problema el éxito es que escapen los faisanes,

a) por lo que  $p = 1 - 0.7 = 0.3$ ,

$n = 4$ ,  $x = 2$  éxitos (dos escapan),  $q = 0.3$ ,  $q = 0.7$

$$P(x = 2) = {}_4C_2 \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^2 = 0.2646$$

Hay un 26.46% de que escapen dos de los faisanes, cuando el cazador dispara sobre de ellos en 4 ocasiones.

b) por lo que  $p = 1 - 0.7 = 0.3$ ,

$n = 5$ ,  $x = 2$  éxitos (dos escapan),  $q = 0.3$ ,  $q = 0.7$

$$P(x = 2) = {}_5C_2 \cdot (0.3)^2 \cdot (0.7)^3 = 0.3087$$

Hay un 30.87%% de que escapen dos de los faisanes, cuando el cazador dispara sobre de ellos en 5 ocasiones.

### Uso de tablas de distribución binomiales.

Resulta tedioso calcular las probabilidades mediante la fórmula binomial, cuando  $n$  es un número grande. Afortunadamente, en algunos casos, podemos obtener rápidamente las probabilidades, con solo consultar las tablas de la distribución de probabilidades binomiales.

Por ejemplo, resolvamos el siguiente problema. ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 15 personas adultas, ocho de ellas apoye a un determinado a un determinado partido, en las próximas votaciones, si la probabilidad de que se vote por este partido es de 0.30?.

Para este problema tenemos que  $n = 15$ ,  $p = 0.30$ ,  $x = 8$ .

$$P(x = 8) = {}_{15}C_2 \cdot (0.3)^8 \cdot (0.7)^{15-8}$$

### Lectura de tablas.

Como el problema tiene 15 repeticiones, se debe encontrar la tabla correspondiente a  $n=15$ , Como la probabilidad de que apoye a este partido es de 0.30, buscamos en la tabla binomial hasta encontrar la columna cuyo encabezado sea 0.30. Nos desplazamos hacia abajo por esta columna, hasta encontrar el renglón  $x = 8$ , en donde tenemos la respuesta: 0.03477.

$$\text{Por lo que } P(x = 8) = {}_{15}C_2 \cdot (0.3)^8 \cdot (0.7)^{15-8} = 0.03477$$

Si ahora la pregunta es ocho o más voten por este partido. Entonces buscamos en la columna de 0.30 y sumamos las probabilidades desde 8 hasta el final de la columna, de esta manera:

8	.03477
9	.01159
10	.00298
11	.00058
12	.00008
13	.00001
14	.
15	.

0.05001

La respuesta es: que hay una probabilidad de 0.05001, de que ocho o más personas apoyen a dicho partido en las próximas votaciones. Lo cual lo denotamos por:

$$P(x \geq 8) = {}_{15}C_2 \cdot (0.3)^8 \cdot (0.7)^{15-8} + \dots + {}_{15}C_{15} \cdot (0.3)^{15} \cdot (0.7)^{15-15} = 0.05001$$

Si ahora se nos pide calcular la probabilidad de que menos de ocho apoyen a dicho partido. De nuevo trabajaríamos con la columna del 0.30, pero en esta ocasión tendremos que sumar las probabilidades desde o hasta 7 (el valor más alto menor que 8), de la siguiente manera:

0	.00475
1	.03052
2	.09156
3	.17004
4	.21862
5	.20613
6	.14724
7	.08113

0.94999

La respuesta es: que hay una probabilidad de 0.94999 de que: menos de ocho personas apoyen a dicho partido en las próximas votaciones.

$$P(x < 8) = {}_{15}C_0 \cdot (0.3)^0 \cdot (0.7)^{15-0} + \dots + {}_{15}C_7 \cdot (0.3)^7 \cdot (0.7)^{15-7} = 0.94999$$

Podemos observar que las tablas binomiales que se encuentran en la parte superior de las columnas de números solamente van hasta 0.50. ¿Cómo se resuelven problemas con probabilidades mayores a 0.50? Simplemente tenemos que revisar las tablas en los valores de probabilidad de éxito que están al pie de las columnas, y estas van de 0.50 hasta 0.99.

### MEDIA Y VARIANZA

Al igual que cualquier otra distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, es posible describir a la distribución BINOMIAL mediante sus medidas características como son la media, la varianza y su desviación estándar.

Para una distribución de probabilidad binomial, mediante el análisis del modelo matemático de la distribución binomial y sus propiedades, se han obtenido expresiones para calcular la media, la varianza y la desviación estándar que simplifican considerablemente las operaciones.

Dichas formulas están dadas por:

Característica	Fórmula
Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{npq}$

Ejemplo 4.- Varios estudiantes que no están preparados para un examen de falso ó verdadero con 40 preguntas, responden cada una de ellas de forma aleatoria y todas sus respuestas son presunciones. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar del número de respuestas correctas.

Para este caso tenemos que  $n = 40$ ,  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$  entonces:

$$\mu = 40\left(\frac{1}{2}\right) = 20$$

$$\sigma^2 = 40\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 10$$

$$\sigma = \sqrt{10} = 3.1622$$

Esto nos indica que el número esperado de respuestas correctas es 20, y su desviación estándar es de 3.1622.

Ejemplo 5.- Un fabricante cree que el 25% de los consumidores prefiere su producto. Para verificar lo anterior, toma una muestra de 900 consumidores y determina el número  $X$  de ellos que prefieren su producto. Si el 25% de todos los consumidores prefiere el producto de este fabricante. ¿Dentro de que valores esperaría que estuviera el valor de  $X$ ?

*Solución:*

Como es difícil calcular las probabilidades para  $X$  dado el tamaño de  $n$ , por lo tanto, describiremos la distribución de probabilidad haciendo uso de su media y su desviación estándar.

Como  $n = 900$ ,  $p = 0.25$ , y  $q = 1 - p = 1 - 0.25$ , por lo que se tiene que:

$$\mu = np = 900(0.25) = 225$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{900(0.25)(0.75)} = 12.99$$

Con base a la regla empírica de Chebyshev, se esperaría que  $X$  estuviera en el intervalo  $(\mu \pm 2\sigma)$  con una probabilidad del 75% y sería casi del 90% de que  $X$  estuviera en el intervalo  $(\mu \pm 3\sigma)$ .

Los intervalos son:

$$\mu \pm 2\sigma = 225 \pm 2(12.99) \text{ ó } 199.02 \text{ a } 250.98$$

$$\mu \pm 3\sigma = 225 \pm 3(12.99) \text{ ó } 186.03 \text{ a } 293.97$$

El estaría seguro, con una probabilidad del 75%, de que el 25% de los consumidores prefieren su producto si en la muestra al menos 199 prefieren su producto. Y con una probabilidad del 89% si en la muestra al menos 199 prefieren su producto.

Ejemplo 6.- Se sabe que el 10% de los relojes de cuarzo de determinada marca tendrán que ser reemplazados durante el periodo de garantía. Si se venden 3000 relojes en un año, encuentre el valor esperado y la varianza del número de relojes  $X$  que deberán ser reemplazados durante el periodo de garantía. ¿Entre que valores esperaría usted que cayera  $X$ ?

Para este problema tenemos:  $n = 3000$ ,  $p = 0.10$ ,  $q = 1 - 0.10 = .90$

La media y la varianza del problema es:

$$\mu = np = 3000(0.10) = 300$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3000(0.10)(0.90)} = 16.43$$

Considerando nuevamente la regla empírica de Chebyshev, esperaríamos que  $X$  estuviera en el intervalo  $(\mu \pm 2\sigma)$  con una probabilidad del 75%, con una probabilidad aproximada del 90% de que  $x$  estuviera en el intervalo  $(\mu \pm 3\sigma)$ .

Los intervalos son:

$$\mu \pm 2\sigma = 300 \pm 2(16.43) \text{ ó } 267.14 \text{ a } 332.86$$

$$\mu \pm 3\sigma = 300 \pm 3(16.43) \text{ ó } 250.71 \text{ a } 349.29$$

Podemos afirmar con una probabilidad aproximada del 75%, esperaríamos que el número de relojes que se tendrían que reemplazar está entre 267 y 333, y con una probabilidad aproximada del 89% esperaríamos que estuviera entre 250 y 350

### PROBLEMAS SOBRE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1.- Para la distribución binomial  $n = 6$ ,  $p = 0.35$  calcular la probabilidad de obtener:

- a) exactamente 3 éxitos
- b) por lo menos 4 éxitos
- c) a lo más un éxito
- d) dos fracasos
- e) por lo menos 5 fracasos

2.- Se sabe que el 15% de los vasos fabricados por una maquina son defectuosos y se seleccionan al azar 5 de los vasos fabricados por esta maquina. Obtener la probabilidad de que:

- a) ninguno sea defectuoso
- b) al menos uno sea defectuoso
- c) no más de dos sean defectuosos.

3.- En un hospital se ha comprobado que el 47% de los nacimientos son del sexo masculino, hoy fueron encamadas 4 mujeres en la sala de obstetricia, si la variable  $X$  representa el número de nacimientos de sexo femenino.

- a) determinar la distribución de probabilidad para  $x$ .
- b) la media y la desviación estándar de la distribución.
- c) ¿cual es la probabilidad de que por lo menos dos de los nacimientos sean del sexo femenino?

4.- Un examen consta de 10 preguntas, cada una con tres opciones de respuesta, de las cuales solo una es la correcta, si un estudiante responde aleatoriamente este examen, calcular la probabilidad de que conteste correctamente:

- a) seis preguntas
- b) a lo mas 5 preguntas.

5.- Si el 30% de los cerrojos producidos por cierta maquina son defectuosos, calcular la probabilidad de que:

- a) en una caja que contiene 10 cerrojos contenga dos defectuosos.
- b) en una caja con 8 cerrojos a lo más uno sea defectuoso.

6.- Se examina una muestra de tamaño 10 de un lote de partes eléctricas. Si la probabilidad de fabricar defectuosamente una de estas partes es del 12%.

¿Cuál es la probabilidad de :

- a) obtener 4 partes defectuosas?
- b) no obtener partes defectuosas?
- c) obtener más de 2 partes defectuosas?

7.- Un cierto tipo de semilla experimental da como resultado que el 80% de ellas germinan, si se siembran 5,

a) calcular la probabilidad de que germinen:

- a) tres
- b) mas de 3.

b) si  $X$  es la variable aleatoria es numero de semillas que germinan: calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad para  $X$ .

8.- La probabilidad de que una vacuna inmunice a una persona es del 80%, a) si se inoculan a 4 personas ¿cual es la probabilidad de que queden inmunes:

- a) 3 personas
- b) al menos 3 personas
- c) a lo más una

b) si en una zona escolar se inoculan a 500 niños, ¿Qué cantidad de niños se espera que queden inmunes?

9.- Un estudio ha mostrado que el 60% de las familias de una colonia grande tienen cuando menos 2 televisores, determine la probabilidad de que entre 14 familias seleccionadas al azar de esta área para realizar una investigación de mercado:

- a) cinco tengan cuando menos dos televisores
- b) mas de 10 tengan por lo menos dos televisores
- c) cuando mucho cuatro tengan al menos dos televisores
- d) de 8 a 11 inclusive, tengan por lo menos dos televisores.

Si en esta zona hay 450 familias, ¿que numero de familias se esperaría que tuvieran cuando menos dos televisores?

10.- Un examen para obtener la licencia de conducir esta diseñado de manera que el 75% de las personas que tomen un curso de manejo puedan aprobarlo. Calcular las probabilidades de que entre 15 personas que toman el curso y que realizan el examen

- a) cuando mucho seis lo aprueben
- b) cuando menos 12 lo aprueben
- c) aprueben de 9 a 12 inclusive.

De un grupo de 35 personas que actualmente esta tomando el curso ¿Cuántas personas se esperarían que aprueben dicho examen?

## DISTRIBUCIÓN NORMAL

Hasta el momento solo se han considerado distribuciones de variables discretas, trabajaremos ahora una importante distribución de probabilidad con variable aleatoria continua.

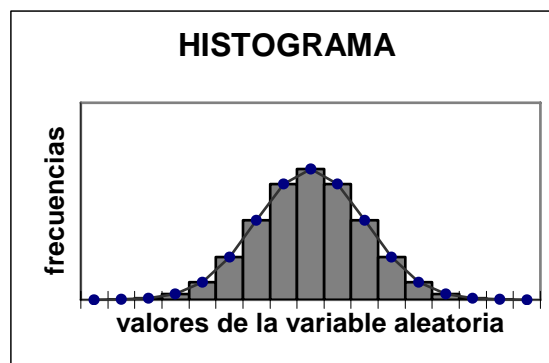
Hay una distribución de probabilidad particular de gran relevancia, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales (variable continua) Esta distribución es llamada “normal” o “campana de Gauss”.

Es probable que la figura estadística más conocida sea la curva normal, ya que ha tenido una enorme importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad y la estadística inferencial, básicamente por dos razones: 1) un gran número de distribuciones empíricas aparentan ser aproximadamente normales y 2) su significado teórico en la explicación de estas distribuciones empíricas.

### Carl Friedrich Gauss.

*Matemático alemán, Carl Friedrich Gauss contribuyó al estudio de diversas ramas de las matemáticas, incluidas la teoría de la probabilidad y la geometría. En su tesis doctoral demostró que cada ecuación algebraica tiene al menos una raíz o solución. Este teorema se sigue denominando teorema fundamental del álgebra. Gauss aplicó también sus trabajos matemáticos a la electricidad y el magnetismo. Una unidad de inducción magnética recibe su nombre.*

Aunque hay muchas otras distribuciones de variable continua; como puede ser la distribución uniforme o rectangular, la distribución exponencial, etc. sin embargo, muchas de las variables de interés práctico se distribuyen o se aproximan a una distribución normal, ya que al analizar los histogramas estas sugieren la condición de normalidad; donde dicha indicación consiste en un histograma con forma de montículo, aproximadamente simétrico.



Por lo que a pesar de que existen otras distribuciones de variable continua que también son de uso frecuente en estadística, la distribución normal es una de las más importantes.

El prestigio de la distribución normal en la estadística, se debe a que constituye la base para la inferencia estadística debido a su relación con el teorema del límite central (el cual trataremos en un tema posterior).

Cuando una distribución es normal la media coincide con el valor de máxima frecuencia y, por tanto, al expresarse en forma gráfica, la media tiene el punto más alto de la curva normal, es decir la distribución normal tiene la interesante propiedad de que las medidas de tendencia central (media, moda, mediana) son iguales.

La expresión matemática representativa de la función de densidad de probabilidad, para la distribución normal es:

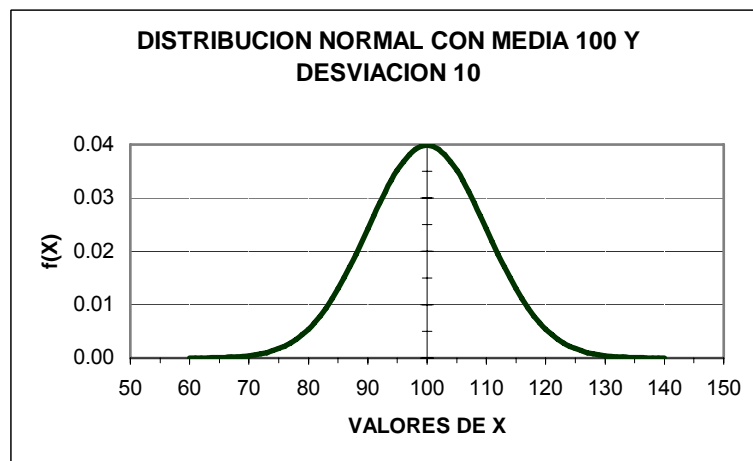
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde:

e =	2.71828...
$\mu$	media de la distribución
$\sigma$	desviación estándar de la distribución.
x	valor de la variable aleatoria continua donde $-\infty \leq x \leq \infty$

La ecuación de la curva normal es una expresión que define toda una gran familia de curvas en función de la media y la desviación estándar. Lo que la fórmula no indica es que cualquier distribución normal está determinada por dos parámetros: **su media  $\mu$  y su desviación estándar  $\sigma$**  y que una vez que se seleccionan los valores para  $\mu$  y  $\sigma$ , se puede trazar la gráfica como puede hacerse con cualquier ecuación que relacione a x, y, y el resultado es la gráfica de la distribución de probabilidad con forma de campana.

Por ejemplo la gráfica para una distribución normal con media 100 y desviación estándar 10 es:



Podemos observar en esta gráfica que su punto más alto lo alcanza en  $x = 100$  (la media).

Propiedades de la curva normal:

- 1.- La curva normal tiene un solo pico, por tanto es unimodal, es decir, tiene una única moda.

- 2.- La media de una variable con distribución normal cae en el centro de su curva normal.
- 3.- La distribución normal es simétrica con respecto a su centro, es decir la media, la moda y la mediana tienen el mismo valor, por lo que existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
- 4.- La curva normal se aproxima, pero nunca llega a tocar el eje de las abscisas (es asintótica al eje de las abscisas). Por lo que cualquier valor entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es teóricamente posible.
- 5.- Para valores de la variable aleatoria que rebasan  $\pm 4$  desviaciones estándar tienen valores de  $f(x)$  muy próximas a cero.
- 6.- El área total comprendida bajo la curva y por encima del eje horizontal es igual a 1, es decir, que sin importar los valores de la  $\mu$  y de  $\sigma$  para una distribución de probabilidad normal, el área total bajo la curva normal es igual a 1. Lo que nos permite pensar en áreas bajo la curva como si fueran probabilidades. Esta propiedad establece que la probabilidad de un evento cualquiera de la distribución de probabilidad normal tiene como valor una parte del área bajo la curva normal.
- 7.- La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica ( $\sigma$ ). Cuanto mayor sea  $\sigma$ , más aplanada será la curva de la densidad.
- 8.- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de  $\mu$  la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de  $\sigma$ , más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana. Un valor pequeño de este parámetro indica, por tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución.

#### Simetría:

Dado que la curva normal es simétrica con respecto a la media  $\mu$ , esto nos indica que: la mitad del área bajo la curva está a la izquierda de la media y la mitad a la derecha. Es decir el 50% del área está a la izquierda de la media y el 50% a la derecha. También, debido a la simetría se puede simplificar el cálculo de áreas calculando únicamente las áreas entre la media y un determinado valor de desviaciones estándar a la derecha de la media. Las áreas que se encuentran a la izquierda de la media pueden calcularse usando las correspondientes áreas a la derecha de la media

$$A(\mu - k\sigma, \mu) = A(\mu, \mu + k\sigma)$$

#### Asintoticidad.

Es asintótica. Significa que las ramas de la curva se extienden infinitamente en los dos sentidos de su dirección y nunca tocan a eje horizontal, es decir las ramas son asintóticas al eje horizontal.

Matemáticamente es verdad que:

1. Aproximadamente 68% de todos valores de una población normalmente distribuida se encuentra dentro de  $\pm 1$  desviación estándar de la media ( $\mu \pm \sigma$ ).
2. Aproximadamente 95.5% de todos valores de una población normalmente distribuida se encuentra dentro de  $\pm 2$  desviación estándar de la media ( $\mu \pm 2\sigma$ ).
3. Aproximadamente 99.7% de todos valores de una población normalmente distribuida se encuentra dentro de  $\pm 3$  desviación estándar de la media ( $\mu \pm 3\sigma$ ).

Sin embargo, muy pocas de las aplicaciones de la distribución normal de probabilidad que implican intervalos de exactamente 1, 2, 3 desviaciones estándar a partir de la media. ¿Qué haremos con respecto a los demás casos? Afortunadamente para estas situaciones podemos remitirnos a la tabla de distribución normal estándar para determinar los porcentajes para valores de la desviación estándar diferentes a 1, 2, 3.

### PUNTUACIONES TIPIFICADAS

Una de las funciones más importantes en el campo de la ciencia es la comparación, ya que nos permite tener elementos de referencia entre objetos o propiedades con el fin de emitir un juicio de valor.

Toda comparación requiere cumplir con ciertas normas; por ejemplo el saber que una persona pesa 78 Kg en una encuesta no nos dice gran cosa, no se puede saber si el peso es adecuado, es deficiente o excesivo. Si nos indican que es un adulto mayor de 35 años nuestra información aumenta pero aún es insuficiente, pero si nos dice que el grupo de adultos al que perteneces tiene un peso promedio de 70.5 Kg con una desviación de 4.1 Kg ya tenemos información suficiente para juzgar su peso y saber como es este.

De esta forma se tienen elementos de referencia o puntos de comparación entre su peso y el de todo su grupo, y por lo tanto nuestra información ya es completa. Es decir, el peso de este adulto tiene significado cuando puede compararse con los pesos bien definidos de las demás personas.

En estadística se acostumbra hacer comparaciones entre una elemento y todo su grupo, a través de un tipo de puntuación relativa, llamada "*puntuación estándar*" o "*puntuación tipificada*", que nos permite ubicar perfectamente a cada elemento en comparación con los demás elementos del conjunto al que pertenece. Es decir, las puntuaciones estándar son unidades comparables que nos ayudan a precisar el lugar que ocupa un elemento en una muestra sin importar en qué unidades está medido.

Sabemos que no se pueden comparar dos medidas de distinta naturaleza, por ejemplo, peso y estatura, fuerza y velocidad, hasta en tanto no se expresen en unidades comunes. La función de las puntuaciones tipificadas es: ayudar a esas comparaciones, eliminando las unidades de cada variable y hacerla adimensional o sin unidades concretas.

Para conocer la posición exacta de un elemento con relación a todo su grupo la siguiente fórmula nos ayudará a determinarla

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

donde:

$z$	puntuación estándar
$\mu$	media de la distribución
$x$	puntuación original
$\sigma$	desviación estándar de la distribución.

Esta transformación de  $x$  en  $z$  produce el efecto de convertir o “tipificar”  $x$  a unidades en términos de desviaciones estándar alejadas de la media. En otras palabras,

***Dado un valor de  $x$ , el correspondiente valor de  $z$  nos dice que tan alejada está  $x$  de su media  $\mu$ , y en que dirección, en términos de su desviación estándar  $\sigma$ .***

Por ejemplo:  $z = 1.2$  significa que el valor correspondiente de  $x$  está a 1.2 desviaciones por arriba (a la derecha) de la media,. Análogamente  $z = -2.15$  significa que el valor correspondiente de  $x$  está a 2.15 desviaciones por debajo (a la izquierda) de la media.

Para nuestro adulto, su puntuación tipificada es:

$$z = \frac{78 - 70.5}{4.1} = \frac{7.5}{4.1} = 1.82$$

es decir, el peso de nuestro adulto está a 1.82 desviaciones estándar por encima (a la derecha) del peso medio de los adultos de 35 años.

El valor que puede tomar una puntuación  $Z$  es cualquier número real, pero sólo se consideran como valores prácticos y comunes los valores de  $z$  entre  $-4$  y  $4$ , porque el área bajo la curva normal dentro de este intervalo supera al 99.99% de los casos.

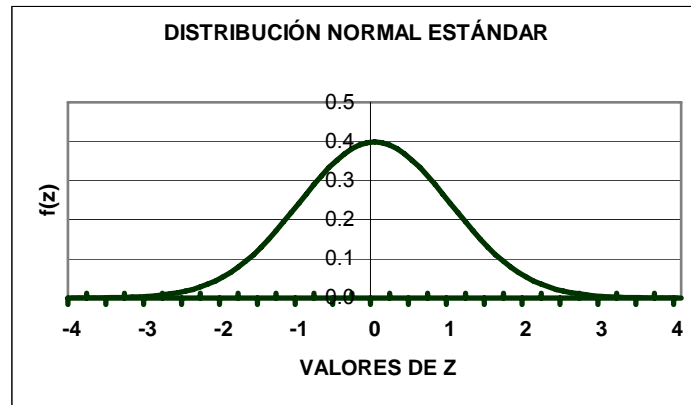
Las puntuaciones  $z$  forman a su vez una distribución normal, que se caracteriza por tener una media igual a cero y desviación estándar igual a 1.

*Definición: La distribución de probabilidad estándar es una distribución de probabilidad normal que tiene media 0 (cero) y desviación estándar 1 (uno).*

*Su expresión matemática es:*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

*y la gráfica correspondiente es:*



### ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

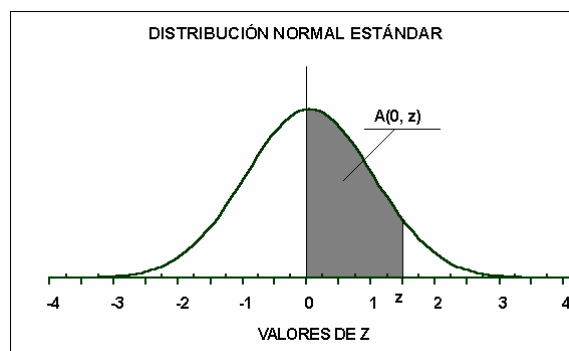
Para tener un manejo estadístico y de utilidad práctica, dado que el número de curvas normales es infinito, y apoyados en las puntuaciones tipificadas, todas ellas son estudiadas a través de la curva normal estándar.

### LECTURA DE LA TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

Es una tabla de doble entrada que contiene

- En la primera columna, el valor de  $z$ , hasta la primera cifra decimal, que representan las diferentes distancias, medidas desde la media (igual a 0), sobre el eje horizontal,
- Los decimales complementarios, en la fila superior, indican cuál debe ser el segundo decimal de la puntuación  $z$ .
- Cuerpo, integrado por diez columnas las cuales contienen las probabilidades correspondientes al área bajo la curva normal delimitada a la izquierda por la línea vertical sobre la media 0 y a la derecha por una línea vertical sobre una puntuación positiva  $z$ , la que denotaremos por  $A(0, z)$ ;

*Para encontrar el valor de un área de interés, se busca la intersección del renglón de  $z$  hasta el primer decimal con la columna de su segundo decimal, el número en dicha intersección es la probabilidad buscada.*

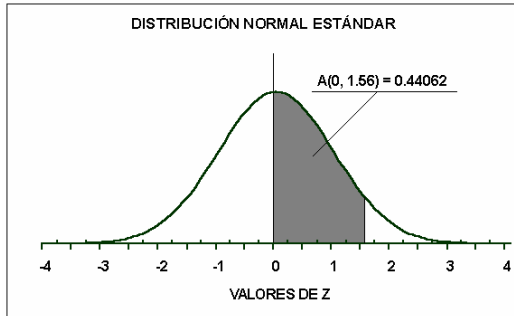


$A(0, Z)$  área bajo la curva normal limitada por la izquierda por la recta vertical que pasa por 0 (cero) y la recta vertical que pasa por  $Z$ .

La tabla da los valores de sólo una porción de la curva. Por ello, las z carecen de signos y los porcentajes son inferiores a 0.5 (50%).

Mostraremos mediante varios ejemplos el cálculo de áreas bajo la curva normal

Ejemplo 1.- Para empezar queremos calcular el área entre 0 y 1.56 =  $A(0, 1.56)$



El área que deseamos calcular es el área bajo la curva que está limitada a la izquierda por la recta vertical que pasa por 0 y a la derecha por la recta vertical que pasa por el valor  $z = 1.56$ .

Dicho valor lo encontramos en la intersección del renglón 1.5 con la columna correspondiente a

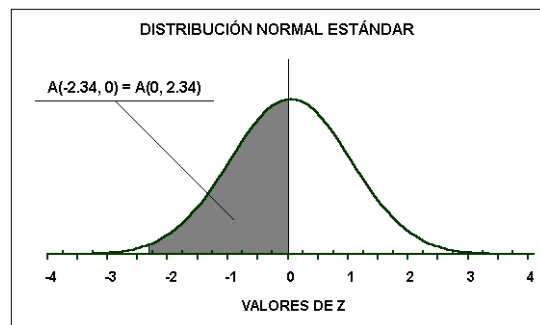
Z	...	.06	...
•			
•			
•			
1.5		.44062	

.06.

Es decir,  $A(0, 1.56) = 0.44062$

Ejemplo 2.- Calcular: el área entre  $-2.34$  y  $0 = A(-2.34, 0)$

Nos interesa el área sombreada en la figura, pero la tabla sólo se aplica a regiones que están a la derecha de la media, sin embargo debido a la simetría, que es un factor clave para determinar las áreas a la izquierda de la media, el área entre  $-2.34$  y la media, es exactamente igual al área entre la media y  $2.34$ ; por lo tanto el valor del área se encuentra en la intersección del renglón 2.3 y la columna .04.



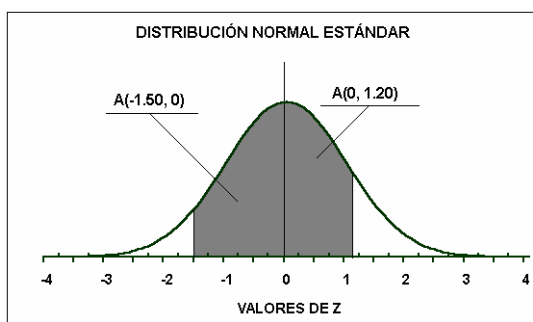
El área tiene el valor 0.49036.

Es decir  $A(-2.34, 0) = A(0, 2.34) = 0.49036$

La solución de este problema nos ilustra un principio importante:

***Aunque una puntuación Z puede ser negativa, el área bajo la curva (o, la probabilidad correspondiente) nunca puede ser negativa.***

Ejemplo 3.- Calcular el área entre  $-1.50$  y  $1.20 = A(-1.50, 1.20)$ .



El área buscada está formada por dos áreas; una a la izquierda de la media y otra a la derecha de la media, por lo tanto el área resultante es igual a la suma de estas áreas.

El área a la izquierda es

$$A(-1.50, 0) = A(0, 1.50) = 0.43319$$

El área a la derecha es

$$A(0, 1.20) = 0.38493.$$

Luego entonces:

$$A(-1.50, 1.20) = A(0, 1.50) + A(0, 1.20) = 0.43319 + 0.38493 = 0.81812$$

Antes de continuar establezcamos la notación a utilizar al calcular áreas bajo la curva normal estándar:

NOTACIÓN	
$A(a, b)$	Área bajo la curva normal entre $a$ y $b$
$A(z > k)$	Área bajo la curva normal a la derecha de $k$
$A(z < k)$	Área bajo la curva normal a la izquierda de $k$

Ejemplo 4.- Calcular el área a la derecha de 1.25 =  $A(z > 1.25)$ .

El área que buscamos es la sombreada en tono oscuro, pero su valor no está dado directamente en la tabla. Para calcularla recordemos que el área bajo la curva a la derecha de la media es igual a la mitad del área total por lo que su valor de **0.5**.

Luego podemos observar que:

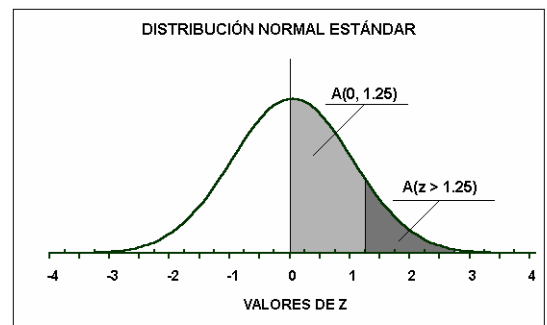
$$0.5 = A(0, 1.25) + A(z > 1.25),$$

Por lo que:

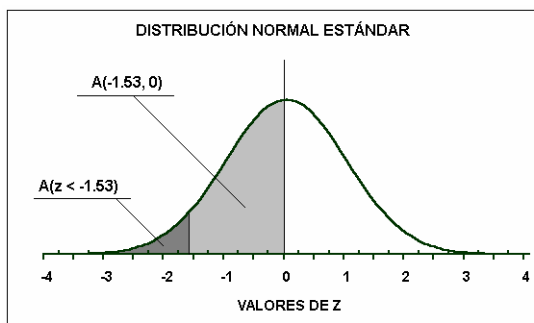
$$A(z > 1.25) = 0.5 - A(0, 1.25)$$

Entonces:

$$A(z > 1.35) = 0.5 - 0.39435 = 0.10565$$



Ejemplo 5.- Calcular el área a la izquierda de -1.53 =  $A(z < -1.53)$



El área que buscamos es la sombreada en tono oscuro, pero el valor no está dado en la tabla, para calcularla utilizamos la propiedad de simetría y de que el área a la izquierda de cero es la mitad del área total por lo que tiene un valor de **0.5**.

Luego podemos observar que:

$$0.5 = A(z < -1.53) + A(-1.53, 0)$$

Por lo que:  $A(z < -1.53) = 0.5 - A(0, 1.53)$

Entonces:  $A(z < -1.53) = 0.5 - 0.43699 = 0.06301$

Ejemplo 6.- Calcular el área entre 0.80 y 2.45 =  $A(0.80, 2.45)$

El área entre 0.80 y 2.45 debe determinarse mediante una resta, ya que  $A(0, 2.45)$  contiene a  $A(0, 0.80)$ , la cual debe por lo tanto restarse, es decir:

$$A(0, 2.45) = A(0, 0.80) + A(0.80, 2.45)$$

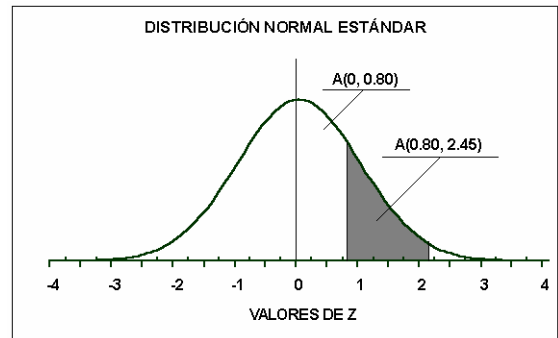
Por lo tanto:

$$A(0, 2.45) - A(0, 0.80) = A(0.80, 2.45)$$

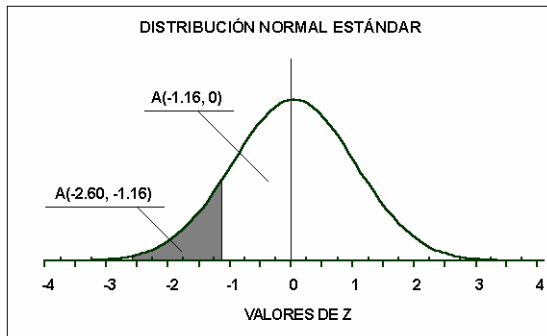
Entonces:

$$0.49286 - 0.28814 = A(0.80, 2.45)$$

$$0.20472 = A(0.80, 2.45)$$



Ejemplo 7.- Calcular el área entre  $-2.60$  y  $-1.16 = A(-2.60, -1.16)$



El área entre  $-2.60$  y  $-1.16$  debe determinarse mediante una resta, ya que  $A(0, -2.60)$  contiene a  $A(0, -1.16)$ , la cual debe por lo tanto restarse, es decir:

$$A(-2.60, -1.16) = A(0, -2.60) - A(0, -1.16)$$

Por la simetría:

$$A(0, 2.60) = A(0, -1.16) + A(1.16, 2.60)$$

Entonces:

$$A(0, 2.60) - A(0, 1.16) = A(1.16, 2.60)$$

$$0.49534 - 0.37698 = A(1.16, 2.60)$$

$$0.11836 = A(1.16, 2.60) = A(-2.60, -1.16)$$

Ejemplo 8.- Calcular el área a la derecha de  $-1.25 = A(z > -1.25)$

El área buscada está constituida por el área entre  $-1.25$  y cero más el área a la derecha de la media.

Por tanto el área total será igual a:

$$A(z > -1.25) = A(-1.25, 0) + 0.5$$

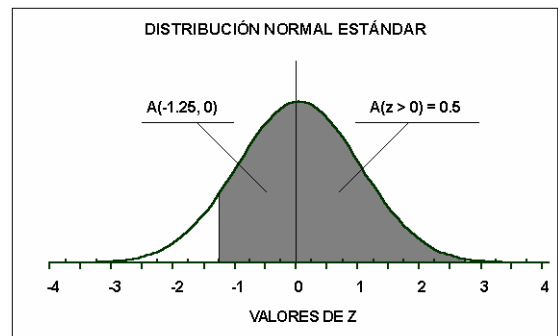
Por la simetría de la curva normal:

$$A(z > -1.25) = A(0, 1.25) + 0.5$$

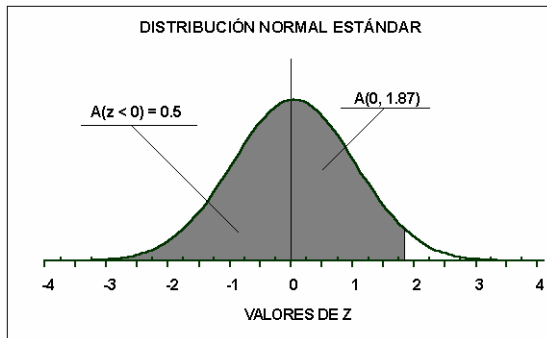
$$A(Z > -1.25) = 0.39435 + 0.5$$

Por lo tanto:

$$A(Z > -1.25) = 0.89435$$



Ejemplo 9.- Calcular el área a la izquierda de 1.87 =  $A(z < 1.87)$



El área buscada está constituida por el área a la izquierda de la media más el área entre cero y 1.87.

Por tanto el área total será igual a:

$$A(z < 1.87) = 0.5 + A(0, 1.87)$$

$$A(z < 1.87) = 0.5 + 0.46926$$

Por lo tanto:

$$A(Z > -1.25) = 0.96926$$

### APLICACIONES DE LA DISTRIBUCION NORMAL

Cuando se trabaja con una distribución normal, es necesario conocer su media  $\mu$  y su desviación estándar  $\sigma$ . Una vez conocidos estos valores entonces las probabilidades asociadas a eventos definidos dentro de esta distribución pueden determinarse empleando los procedimientos usados en los ejemplos anteriores. Sin embargo antes de utilizarlos debemos de “estandarizar” la información a manipular.

Una vez que se ha estandarizado la información podemos hacer uso de la distribución normal estándar, para determinar las probabilidades de interés.

La estandarización la podemos sintetizar en las siguientes situaciones:

Si una variable aleatoria  $X$  continua se distribuye normalmente con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , entonces:

a) la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome un valor entre  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ), está dada por:

$$P(a \leq x \leq b) = A(z_a, z_b)$$

donde:

$$z_a = \frac{a - \mu}{\sigma} \quad z_b = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Observación: Esta desigualdad puede tener cualquiera de las siguientes formas iguales:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b)$$

ya que al tener  $X$  una función continua de densidad de probabilidad, la probabilidad de que  $X = c$ ,  $c$  constante, es cero, es decir,  $P(x = c) = 0$ . Por lo tanto  $P(x = a) = 0$ , y  $P(x = b) = 0$ , por lo que la probabilidad de que  $x$  se encuentre en el intervalo de  $a$  a  $b$ , es igual, tanto si se incluye  $a$  como si se excluye, y si  $b$  es incluida o excluida. Esta situación no es posible en una variable aleatoria discreta.

b) la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome un valor mayor a  $k$  está dada por:

$$P(x \geq k) = A(z \geq z_k)$$

donde:

$$z_k = \frac{k - \mu}{\sigma}$$

c) la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome un valor menor a  $k$  está dada por:

$$P(x \leq k) = A(z \leq z_k)$$

donde:

$$z_k = \frac{k - \mu}{\sigma}$$

Ejemplo 1.- Sea  $X$  una variable aleatoria distribuida normalmente con media 62.7 y desviación estándar 4.3. Determinar la probabilidad de que un valor de  $x$  seleccionado aleatoriamente, se encuentre: a) entre 62.7 y 73.1, b) entre 50 y 70, c) entre 55 y 60.

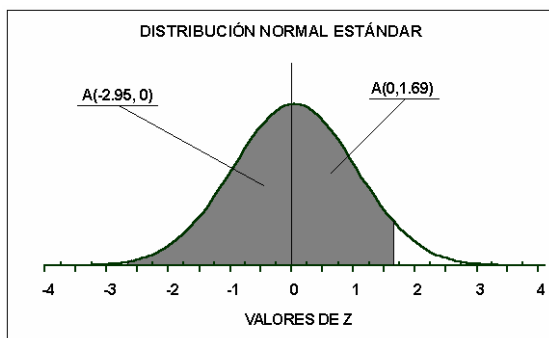
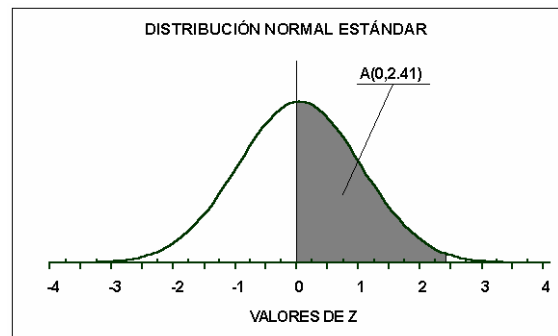
Sol:

a)  $P(62.7 \leq x \leq 73.1) = A(0, 2.41)$

$$z_a = \frac{62.7 - 62.7}{4.3} = \frac{0}{4.3} = 0$$

$$z_b = \frac{73.1 - 62.7}{4.3} = \frac{10.4}{4.3} = 2.41$$

$$\therefore P(62.7 \leq x \leq 73.1) = 0.49202$$



b)  $P(50 \leq x \leq 70) = A(-2.95, 1.69)$

$$z_a = \frac{50 - 62.7}{4.3} = \frac{-12.7}{4.3} = -2.95$$

$$z_b = \frac{70 - 62.7}{4.3} = \frac{7.3}{4.3} = 1.69$$

$$P(50 \leq x \leq 70) = 0.49841 + 0.45449 = 0.9529$$

$$\therefore P(50 \leq x \leq 70) = 0.9529$$

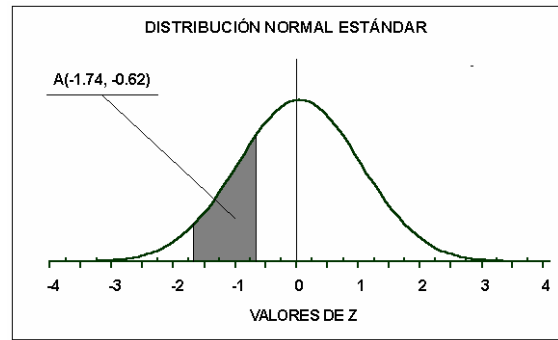
c)  $P(55 \leq x \leq 60) = A(-1.74, -0.62)$

$$z_a = \frac{55 - 62.7}{4.3} = \frac{-7.5}{4.3} = -1.74$$

$$z_b = \frac{60 - 62.7}{4.3} = \frac{-2.7}{4.3} = -0.62$$

$$P(55 \leq x \leq 60) = 0.45907 - 0.23237 = 0.2267$$

$$\therefore P(55 \leq x \leq 60) = 0.2267$$



Ejemplo 2.- Se ha determinado que la vida útil de llantas radiales para automóvil tienen una distribución normal con media de 38 700 Km, y una desviación estándar de 3150 Km

¿Cuál es la probabilidad de que una llanta elegida al azar tenga una vida útil de

a) entre 40000 y 45000 Km?

b) al menos de 35 000 Km?

Sol. Sea la variable X: número de Km de duración

a)  $P(40000 \leq x \leq 45000) = A(0.41, 2.00)$

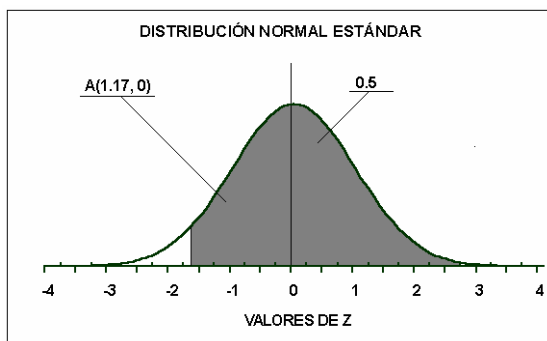
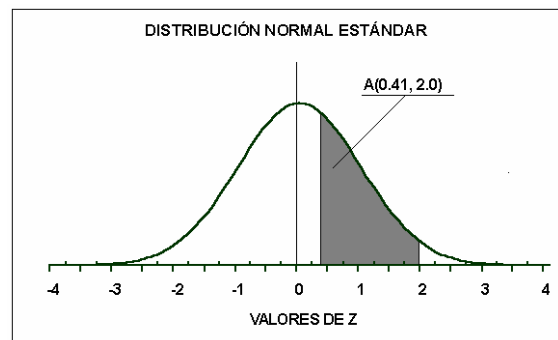
$$z_a = \frac{40000 - 38700}{3150} = \frac{1300}{3150} = 0.41$$

$$z_b = \frac{45000 - 38700}{3150} = \frac{6300}{3150} = 2$$

$$P(40000 \leq x \leq 45000) = A(0, 2.00) - A(0, 0.41)$$

$$P(40000 \leq x \leq 45000) = 0.47725 - 0.15910$$

$$\therefore P(40000 \leq x \leq 45000) = 0.31815$$



b)  $P(x \geq 35000) = A(z \geq -1.17)$

$$z_a = \frac{35000 - 38700}{3150} = \frac{-3700}{3150} = -1.17$$

$$P(x \geq 35000) = A(-1.17, 0) + 0.5$$

$$P(x \geq 35000) = A(0, 1.17) + 0.5$$

$$\therefore P(x \geq 35000) = 0.87900$$

Ejemplo 3.- Después de fraguado y secado, el cemento Pórtland común tienen una resistencia promedio a la compresión de 4000 libras por pulgada cuadrada. Si esta resistencia a la compresión está distribuida normalmente, con una desviación estándar de 120 libras por pulgada cuadrada. Obtenga la probabilidad de que la resistencia a la tensión del cemento Pórtland después de fraguado y secado tenga una resistencia a la compresión a) menor a 3900 b) mayor a 3700 libras por pulgada cuadrada.

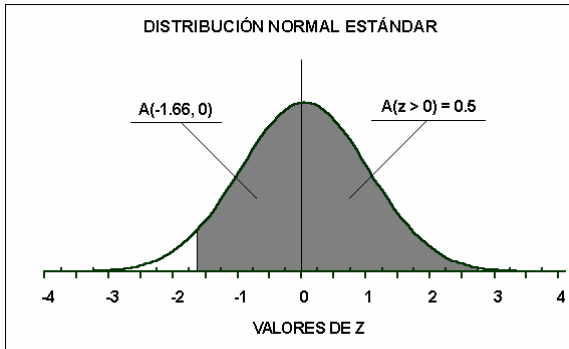
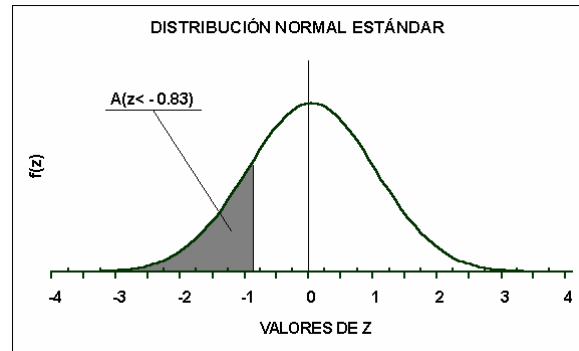
Sol. Sea la variable X: resistencia a la tensión.

a)  $P(x \leq 3900) = A(z \leq -0.83)$

$$z_a = \frac{3900 - 4000}{120} = \frac{-100}{120} = -0.83$$

$$P(x \leq 3900) = 0.5 - 0.29673 = 0.20327$$

$$\therefore P(x \leq 3900) = 0.20327$$



b)  $P(x \geq 3800) = A(z \geq -1.66)$

$$z_a = \frac{3800 - 4000}{120} = \frac{-200}{120} = -1.66$$

$$P(x \geq 3800) = 0.5 + 0.45154$$

$$\therefore P(x \geq 3800) = 0.95154$$

Ejemplo 4.- La vida útil de una lámpara fluorescente está distribuida normalmente con media de 880 horas y desviación estándar de 57 horas. Determinar la probabilidad de que una lámpara elegida aleatoriamente tenga una vida útil a) entre 880 y 950 horas, b) mayor a 1000 horas.

Sol. Sea la variable X: número de horas de duración

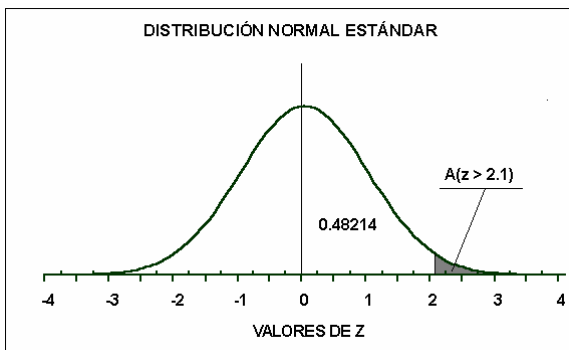
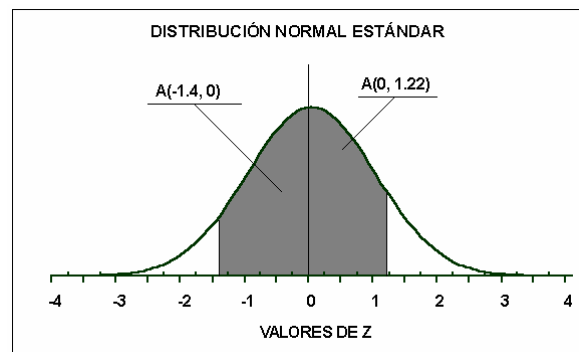
a)  $P(880 \leq x \leq 950) = A(-1.40, 1.22)$

$$z_a = \frac{880 - 880}{57} = \frac{-80}{57} = -1.40$$

$$z_b = \frac{950 - 880}{57} = \frac{70}{57} = 1.22$$

$$P(880 \leq x \leq 950) = 0.41924 + 0.38877$$

$$P(880 \leq x \leq 950) = 0.80801$$



b)  $P(x \geq 1000) = A(z \geq 2.10)$

$$z_a = \frac{1000 - 880}{57} = \frac{120}{57} = 2.10$$

$$P(x \geq 1000) = 0.5 - 0.48214$$

$$\therefore P(x \geq 1000) = 0.01786$$

## PROBLEMAS SOBRE DISTRIBUCIÓN NORMAL

1.- Si la distribución normal estándar tiene media 0 y desviación estándar 1,

A) ¿Cuál es la probabilidad de que:

- 1)  $z$  sea menor que 1.57?
- 2)  $z$  exceda a 1.84?
- 3)  $z$  se encuentre entre 1.57 y 1.84?
- 4)  $z$  sea inferior a 1.59 o mayor que 1.84?
- 5) se encuentre entre -1.57 y 1.84?

B) ¿Cuál es el valor de  $z$  si el 50 % de todos los valores posibles de  $z$  son mayores?

C) ¿Cuál es el valor de  $z$  si solo el 2.50 % de todos los valores posibles de  $z$  son mayores?

D) ¿Entre qué par de valores de  $z$  (distribuidos simétricamente alrededor de la media) se encontrara el 68.26% de todos los posibles valores de  $z$ ?

2.- Con una distribución normal estándar (con media 0 y desviación estándar 1), determine las siguientes probabilidades:

- |                   |                          |                      |
|-------------------|--------------------------|----------------------|
| a) $p(z > 1.34)$  | b) $p(z < 1.17)$         | c) $p(0 < z < 1.17)$ |
| d) $p(z < -1.17)$ | e) $p(-1.24 < z < 1.12)$ | f) $p(-2.09 < z < -$ |

0.57)

3.- El gasto promedio semanal en alimentación para una familia de cuatro personas en una gran ciudad es de \$ 420, con una desviación estándar de \$ 80. Suponiendo que los gastos semanales por alimentación están distribuidos en forma normal ¿Qué porcentaje de estos gastos:

- a) son inferiores a \$ 350?
- b) se encuentran entre \$ 250 y \$ 350?
- c) se encuentren entre \$ 225 y \$ 450?
- d) son inferiores a \$ 200 o mayores a \$ 400?

4.- El tiempo necesario para dar servicio a un automóvil en la estación de servicio esta distribuido normalmente con media de 14.5 minutos y desviación estándar de 1.1 minutos.

I) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil seleccionado aleatoriamente requiera:

- a) entre 13.5 y 15.6 minutos de servicio ?
- b) cuando mucho 13.5 minutos de servicio.
- c) más de 16 minutos o menos de 14 minutos de servicio?

II) ¿Cuál es el tiempo de servicio de modo que solo el 5% de todos los automóviles requiera más de ese tiempo ?.

5.- El tiempo de reacción para cierto experimento sociológico esta distribuido normalmente con media de 20 segundos y varianza de  $16 s^2$

¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga un tiempo de reacción:

- a) entre 14 y 30 segundos ?
- b) entre 25 y 30 segundos ?
- c) de más de 14 segundos ?

¿Cuál es el tiempo de reacción de modo que solo el 1% de todas las personas reaccionen con mayor rapidez?

6.- Se encontró que un grupo de calificaciones de un examen final de un curso de estadística, estaba normalmente distribuido con una media de 73 y una desviación estándar de 8.

- A) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuando mucho una calificación de 91 en este examen?
- B) ¿Qué porcentaje de estudiantes alcanzaron calificaciones entre 65 y 89?
- C) ¿Qué porcentaje de estudiantes alcanzaron calificaciones entre 81 y 91?
- D) ¿Cuál es la calificación del examen final para la cuál solo el 5% de los estudiantes tuvieron calificaciones más altas que esta?

7.- En una afamada escuela de administración de empresas los índices de puntos de calificaciones de sus 1000 estudiantes sin graduar tienen una distribución normal con una media de 72.83 y desviación estándar de 0.38.

- A) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente tenga un índice de puntos de calificación entre 72 y 73. ?
- B) ¿Qué porcentaje de estudiantes se espera que tengan un índice de calificación inferior a 74?
- C) ¿Qué índice de calificaciones será excedido por solo el 15% de los estudiantes?
- D) ¿Cuántos estudiantes se espera que tengan índice de calificaciones de al menos 73.2?

8.- El número de días entre la facturación y el pago de cuentas a crédito de " GROSS " una gran tienda departamental, tiene una distribución normal con una media de 18 días y desviación estándar de 4 días.

¿Qué proporción de las cuentas serán pagadas:

- I) entre 12 y 18 días?
- II) entre 20 y 23 días?
- III) en menos de 8 días?
- IV) en 12 días o más?

9.- Se fabrican bolsas de plástico para envase de productos a granel, de tal forma que la resistencia a la rotura de la bolsa está distribuida normalmente con media de 5 libras por pulgada cuadrada y una desviación estándar de 1.5 libras por pulgada cuadrada.

¿Qué proporción de bolsas tienen resistencia a la rotura:

- I) entre 5 y 5.5 libras por pulgada cuadrada?
- II) entre 3.2 y 4.2 libras por pulgada cuadrada?
- III) de por lo menos 3.6 libras por pulgada cuadrada?
- IV) de menos de 3.17 libras por pulgada cuadrada?

10.- El análisis estadístico de 1 000 llamadas telefónicas de larga distancia realizadas desde las oficinas centrales de una empresa, señala que la duración media de estas, esta normalmente distribuida con media de 440 segundos y desviación estándar de 50 segundos.

- A) ¿Qué porcentaje de estas llamadas duró menos de 380 segundos?
- B) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada en particular dure entre 350 y 500 segundos?
- C) ¿Cuántas llamadas duraron menos de 360 o más de 420 segundos?