UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL VALLEJO
ÁREA DE MATEMÁTICAS

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Hasta ahora hemos calculado probabilidades para algunos eventos específicos definidos dentro de algún experimento aleatorio.

En ocasiones es necesario hacer un análisis completo de los posibles valores de un proceso pero considerando un aspecto de interés, para de esta manera describir la forma en que se espera que varíen los resultados al realizar dicho proceso.

En esta unidad hablaremos de las variables aleatorias, de sus distribuciones de probabilidad y de los procedimientos para calcular su media y su desviación estándar.

Comenzaremos por señalar que una variable aleatoria asigna un número a cada resultado del espacio muestral de un experimento, y que una distribución de probabilidad asocia un valor de probabilidad a cada valor de la variable aleatoria definida dentro del experimento.

Es decir la variable aleatoria se utiliza para asignar números a los resultados de un experimento y al encontrar la probabilidad de aparición para cada número, entonces, podremos asociar a cada valor de la variable aleatoria una probabilidad. Este proceso nos llevará al concepto de *distribución de probabilidad.*

VARIABLE ALEATORIA

Muchas situaciones cotidianas pueden servir como experimentos que producen resultados correspondientes a algún valor y que tales situaciones se pueden describir con una variable aleatoria.

Definición: Una variable aleatoria X definida dentro de un espacio muestral, es una función que asigna a cada elemento del espacio muestral un elemento de los números reales.

Esta definición nos dice que una variable aleatoria es una bien definida regla o mecanismo mediante el cual podemos asignar un valor numérico a cada resultado de un experimento.

Para construir la variable aleatoria es necesario definir todos los posibles resultados del experimento de manera que al aplicar la regla o mecanismo se pueda asignar a cada resultado un valor numérico. Este valor numérico será el de la variable aleatoria en consideración.

Ejemplo 1. Si se arrojan tres monedas, todos los resultados de este proceso son:

(S,S,S), (A,S,S), (S,A,S), (S,S,A), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A), (A,A,A),

Para este experimento existen diferentes reglas o variables aleatorias para asignar un valor numérico a cada resultado.

Primero: se pueden considerar como variable aleatoria *X,* “el número de águilas”, Aplicando esta regla a todos los elementos del espacio muestral

(S, S, S)→ 0,
(A, S, S)→ 1, (S, A, S)→ 1, (S, S, A)→ 1,
(A, A, S)→ 2, (A, S, A)→ 2, (S, A, A)→ 2
(A, A, A)→ 3

por lo tanto valores para esta variable son 0, 1, 2, 3.

Segundo:, podríamos definir una situación en la cual se pueden cobrar $ 2 por cada águila obtenida y pagar $ 1 por cada sol obtenido, de forma que la variable aleatoria *g = ganancia en el lanzamiento,*

(S, S, S)→ - 1 –1 –1 = - 3
(A, S, S)→ 2 – 1 – 1 = 0, (S, A, S)→ 0, (S, S, A)→ 0,
(A, A, S)→ 2 + 2 – 1 = 3; (A, S, A)→ 3, (S, A, A)→ 3
(A, A, A)→ 2 + 2 + 2 = 6

entonces ***g*** puede tener los valores –3, 0, 3 y 6.

Tercero: podemos pedir la variable aleatoria *r que asigna a cada resultado la raíz cuadrada del número de águilas*,

(S, S, S)→ $\sqrt{0} = 0$
(A, S, S)→ $\sqrt{1} = 1$, (S, A, S)→ 1, (S, S, A)→ 1,
(A, A, S)→ $\sqrt{2}$, (A, S, A)→ $\sqrt{2}$, (S, A, A)→ $\sqrt{2}$
(A, A, A)→ $\sqrt{3}$

por lo que los valores de r serían: 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

La manera como se define la regla que asigna un número a cada resultado depende de cuál aspecto del proceso nos interesa estudiar.

Ejemplo 2. Consideremos las llamadas telefónicas recibidas en un teléfono.

Para este proceso podemos definir distintas variables aleatorias como pueden ser:

a) El número de llamas recibidas en un día, en cuyo caso los valores de la variable aleatoria, serían: 0, 1, 2, 3,...
b) La duración de las llamadas recibidas, en cuyo caso los valores pueden estar dentro del intervalo [0, 1440] minutos.
c) El tipo de llamada. En cuyo caso sería, local, nacional o internacional.

También es importante indicar que las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.
Una variable aleatoria discreta tiene un número finito de valores o un número de valores susceptibles de contarse. Y una variable aleatoria continua tiene un número infinito de valores y dichos valores pueden asociarse a mediciones dentro de un intervalo de números reales.

Ejemplo 3:

a) el número de personas que entran a ver una película es un número entero y por tanto es una variable discreta.
b) el número de puntos anotados por el equipo visitante en un juego de básquetbol, es una variable discreta.
c) La medida del voltaje de la batería de un automóvil, puede tener cualquier valor entre 0 y 12 volts, y es por tanto una variable continua.
d) la temperatura ambiente en un día del mes de diciembre, es una variable continua.

Por el momento nos dedicaremos a manejar variables aleatorias de tipo discreto

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Definición: *Una distribución de probabilidad da la probabilidad para cada valor de una variable aleatoria*.

Es decir, una distribución de probabilidad es una lista de todos los valores posibles de una variable aleatoria junto con la probabilidad asociada para cada valor

Para construir una distribución de probabilidad son necesarias dos cosas:

1) Tener la lista exhaustiva de valores posibles, mutuamente excluyentes, de la variable aleatoria.
2) La probabilidad de ocurrencia para cada valor de la variable aleatoria

Continuando con el ejemplo 1, tenemos que la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X*: numero de águilas* obtenidas al lanzar tres monedas es:

X	*P(X)*
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Para obtener una información cualitativa acerca de la distribución la probabilidad es conveniente representar en forma gráfica la distribución de probabilidad, para representarla necesitamos graficar el número de águilas que podemos obtener en 3 lanzamientos contra la probabilidad de que este número se presente. A esta gráfica la llamaremos: *"Diagrama de Probabilidad".*

El diagrama de probabilidad para la variable aleatoria número de águilas es:

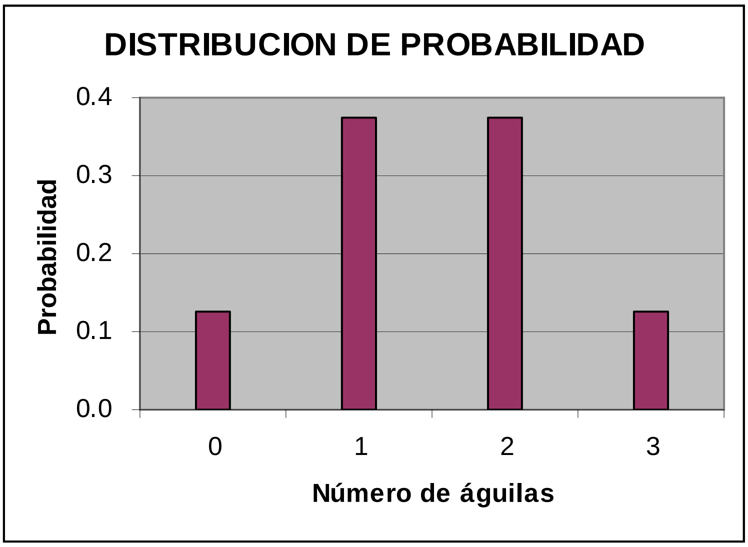

Figura 1

Podemos observar que este diagrama es simétrico con respecto al centro (1.5) ya que si trazamos un eje imaginario que pase por 1.5, este eje dividirá a la grafica en dos partes iguales dejando un 50% de probabilidad a cada lado del eje.

Toda distribución de probabilidad debe satisfacer dos requisitos:

Requisitos de una distribución de probabilidad	
1.	$\sum P(x) = 1$ donde x toma todos los valores
2	$0 \le P(x) \le 1$ para todo valor de x

El primer requisito indica que la suma de todas las probabilidades de una distribución debe ser igual a 1, ya que como los valores de la variable aleatoria *X* representan todos los posibles sucesos del espacio muestral, se tiene la certeza (con probabilidad 1) de que uno de los sucesos ocurrirá.

El segundo requisito nos vuelve a recordar que la probabilidad asociada a un valor (o cualquier evento), es un valor entre 0 y 1, es decir el valor de probabilidad asociada a cualquier valor de la variable aleatoria no puede ser negativa ni mayor de uno.

MEDIA, VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Sabemos que un conjunto de datos tiene tres importantes características:

1.- *Un valor representativo*, por ejemplo: su media.
2.- *Una medida de dispersión*, como su desviación estándar.
3.- *La forma o naturaleza de la distribución*, digamos en forma de campana.

Para una distribución de probabilidad existen procedimientos, para calcular; la media, la varianza y la desviación estándar, y el diagrama de probabilidad nos proporciona una idea de la forma o naturaleza de la distribución.

La media, la varianza y la desviación estándar de una distribución de probabilidad se pueden calcular aplicando las siguientes formulas:

Característica	Fórmula
Media	$\mu = \sum x \cdot P(x)$
Varianza	$\sigma^2 = \sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{\sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2}$

Para ejemplificar él calculo de la media, varianza y desviación estándar utilizaremos la distribución de probabilidad, para la variable aleatoria número de águilas en el lanzamiento de 3 monedas..

Para calcular la media $\mu = \sum x \cdot P(x)$ primero se multiplica cada valor de X por su correspondiente probabilidad y luego se suman los productos resultantes.

X	$P(X = x)$	$x \cdot P(x)$
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	3/4
3	1/8	3/8
	1	$\frac{3}{2}$

La media de la distribución es: $\mu = \frac{3}{2} = 1.5$

Cuando calculamos la media de una distribución de probabilidad, obtenemos el valor promedio (media) que esperaríamos obtener si el experimento se repitiera indefinidamente, no obtenemos el valor que esperamos con mayor frecuencia.

Para calcular la varianza $\sigma^2 = \sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2$ primero se eleva al cuadrado cada valor de *x,* multiplicando luego cada cuadrado por la P(x) correspondiente, sumando estos productos y por último restándole a esta suma el valor de la media elevado al cuadrado.

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$	x^2	$x^2 \cdot P(x)$
0	1/8	0	0	0
1	3/8	3/8	1	3/8
2	3/8	¾	4	1 1/2
3	1/8	3/8	9	1 1/8
	1	$\frac{3}{2}$		3

$$\sigma^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Para calcular la desviación estándar se extrae la raíz cuadrada a la varianza, entonces para este ejercicio:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660$$

La desviación estándar nos da una medida de qué tanto la distribución de probabilidad está dispersa alrededor de la media. Una desviación estándar grande refleja una dispersión considerable, mientras que una desviación estándar menor refleja una variabilidad más baja, con los valores relativamente cerca de la media.

De acuerdo al diagrama de probabilidad , figura 1, podemos observar que la distribución de probabilidad es simétrica respecto a la media $\mu = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 4: Sea la siguiente distribución de probabilidad:

x	$P(x)$
0	0.210
1	0.367
2	0.275
3	0.115
4	0.029
5	0.004

Determinar: la media y la desviación estándar de la distribución y trazar el diagrama de probabilidad correspondiente.

Para calcular la media $\mu = \sum x \cdot P(x)$ primero multiplicamos cada valor de *x* por su correspondiente probabilidad y luego sumamos los productos resultantes.

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$
0	0.21	0
1	0.367	0.367
2	0.275	0.55
3	0.115	0.345
4	0.029	0.116
5	0.004	0.02
	1	1.398

Para este ejemplo la media es: $\mu = 1.398$

Para calcular la varianza $\sigma^2 = \sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2$ primero elevamos al cuadrado cada valor de *x,* luego multiplicamos cada cuadrado por su P(x) correspondiente, posteriormente sumamos estos productos y por último restamos a esta suma el valor de la media elevado al cuadrado.

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$	x^2	$x^2 \cdot P(x)$
0	0.210	0.	0	0.
1	0.367	0.367	1	0.367
2	0.275	0.550	4	1.100
3	0.115	0.345	9	1.035
4	0.029	0.116	16	0.464
5	0.004	0.020	25	0.100
	1	1.398		3.066

$$\sigma^2 = 3.066 - (1.398)^2 = 3.066 - 1.9544$$
$$\sigma^2 = 1.1116$$

Para calcular la desviación estándar extraemos la raíz cuadrada a la varianza, entonces para este ejercicio:

$$\sigma = \sqrt{1.1116} = 1.0543$$

El diagrama de probabilidad correspondiente es:

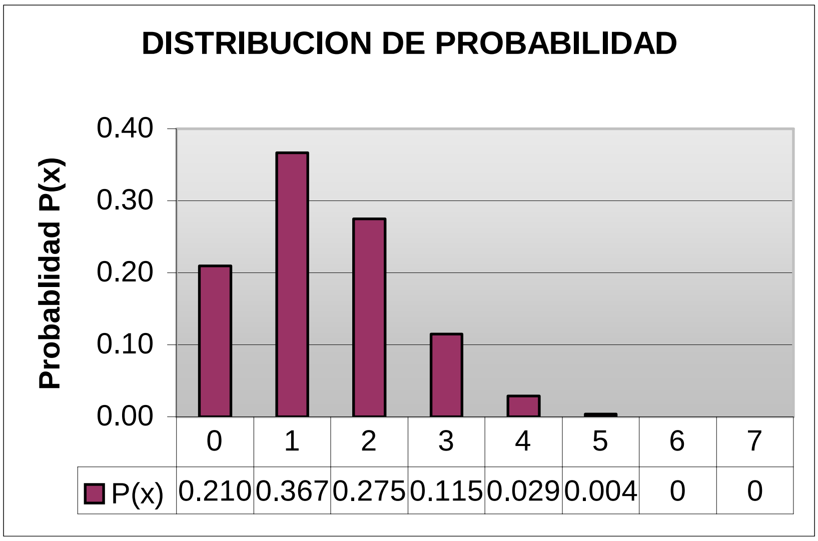

Figura 2.

En este diagrama se puede observar que la distribución no es simétrica ya que el punto más alto está cerca de la media (1.11), antes de este punto la distribución crece rápidamente y después de él decrece lentamente. Es decir la distribución está sesgada en forma positiva.

Ejemplo 5.-Una compañía electrónica fabrica dispositivos de conmutación para semáforos. Un lote de 12 conmutadores incluye 4 que son defectuosos. Si se escogen tres conmutadores aleatoriamente, y la variable aleatoria *X representa el número de conmutadores defectuosos seleccionados*,
a) determinar la distribución de probabilidad para X,
b) determinar la media, la varianza y la desviación estándar para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria,
c) construir el diagrama de probabilidad.
d) describir cualitativamente la forma del diagrama de probabilidad.

Solución:
a) Como la muestra es de tres elementos, entonces el número de conmutadores defectuosos en ella puede ser 0, 1, 2, 3.

Calculemos ahora la probabilidad para cada uno de los valores de la variable aleatoria:

Si x = 0, esto nos indica que de los tres ninguno es defectuoso, es decir los 3 son no defectuosos y estos los elegimos de los 8 que hay.

$$P(x=0) = \frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

Para x = 1, uno debe ser defectuoso (el cual se toma de los 4 que hay), y dos son no defectuosos (estos los elegimos de los 8 que hay).

$$P(x=1) = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_8C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{4 \cdot 28}{220} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$$

Para x = 2, dos deben ser defectuoso (los cuales se toman de los 4 que hay), y uno es no defectuoso (este se elige de los 8 que hay).

$$P(x=2) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_8C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{6 \cdot 8}{220} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

Para x = 3, solamente hay 3 defectuosos (los cuales se toman de los 4 que hay).

$$P(x=3) = \frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{4}{220} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

b) la distribución de probabilidad y los cálculos necesarios para la media y la desviación estándar.

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$	x^2	$x^2 \cdot P(x)$
0	$\frac{14}{55}$	0	0	0
1	$\frac{28}{55}$	$\frac{28}{55}$	1	$\frac{28}{55}$
2	$\frac{12}{55}$	$\frac{24}{55}$	4	$\frac{48}{55}$
3	$\frac{1}{55}$	$\frac{3}{55}$	9	$\frac{9}{55}$
		1		$\frac{85}{55} = \frac{17}{11}$

Para esta distribución se tiene que:

$$\mu = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{17}{11} - (1)^2 = \frac{6}{11}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6}{11}} = 0.7385$$

El diagrama de probabilidad es:

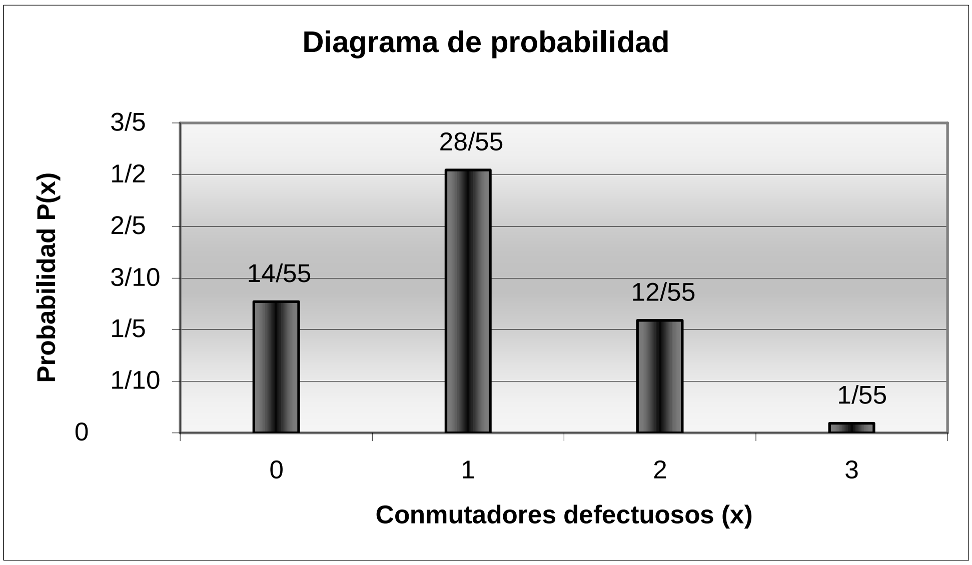

Figura 3

d) La distribución de probabilidad tiene su punto más alto en 1 y es asimétrica, teniendo una cola a la derecha de la distribución por lo que tiene un sesgo positivo.

VALOR ESPERADO

La media de una variable aleatoria discreta es el resultado medio teórico de una cantidad infinita de ensayos. Podemos pensar en esa media como el *valor esperado* en el sentido de que es el valor promedio que esperaríamos obtener si los ensayos pudieran repetirse indefinidamente. Los usos del valor esperado son extensos y variados, y desempeñan un papel importante en un área de aplicación llamada *Teoría de decisiones.*

El valor esperado de una variable aleatoria discreta se denota como *E(x)* y representa el valor promedio de los resultados; se calcula mediante la formula:

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$

Podemos observar que el valor esperado de una variable discreta es igual a su media.

Ejemplo 6. En una rifa se venden 10 000 boletos de a \$ 10 cada uno y que se van a otorgar tres premios, el primero es una computadora con valor de \$ 10 000, el segundo premio es un equipo de sonido con valor de \$ 6000, el tercer premio es un televisor con valor de \$ 3000. Si usted compró un boleto ¿Cuál es su ganancia esperada?.

Si se utiliza ***g*** para indicar la ganancia correspondiente, entonces hay 4 posibles valores para g. Tres de ellos positivos (se obtiene un premio), \$ 9990, \$ 5590, \$ 2990 con una probabilidad de 1/10000 para cada uno (\$10 menos del valor de cada premio por el pago del boleto), y uno es negativo -\$10 al no obtener premio, con una probabilidad de 9997/10000. Por lo tanto la ganancia esperada es:

x	$P(x)$	$x \cdot P(x)$
9990	$\frac{1}{10000}$	$\frac{999}{1000}$
5990	$\frac{1}{10000}$	$\frac{599}{1000}$
2990	$\frac{1}{10000}$	$\frac{299}{1000}$
-10	$\frac{9997}{10000}$	$-\frac{9997}{1000}$
		$-\frac{81}{10}$

La esperanza es de E(x) = – \$ 8.10, esto nos indica que la rifa no es justa debido a que en promedio se espera perder \$ 8.10 cada vez que compra un boleto de esta rifa.

Para un juego, se dice, que *el juego es justo o equilibrado si el valor esperado de la ganancia es igual a cero.*

EJERCICIOS.

1.- Para cada uno de las siguientes distribuciones de probabilidad calcule la media y la desviación estándar, y construya el diagrama de probabilidad correspondiente

A)

X	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
P(X)	*.12*	*.15*	*.24*	*.15*	*.24*	*.10*

B)

X	*-1*	*0*	*2*	*4*	*5*	*6*
P(X)	*.12*	*.19*	*.20*	*.24*	*.17*	*.08*

C)

X	*10*	*13*	*15*	*16*	*20*	*21*	*27*
P(X)	*.25*	*.15*	*.10*	*.15*	*.10*	*.10*	*.15*

D)

X	*-5*	*-3*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
P(X)	*.11*	*.13*	*.15*	*.22*	*.16*	*.13*	*.10*

2.- Sea el experimento de elegir una ficha de domino sea *"M" la variable aleatoria que nos* <u>*suma los puntos*</u> *de las dos partes de la ficha seleccionada*. Construir la distribución de probabilidad para la variable aleatoria M, y el diagrama de probabilidad.

3.- Se tiene una caja con 2 canicas blancas, una roja y una azul. Se sacan 2 canicas una por una sin regresar la primera. Sea *X la variable aleatoria "número de canicas rojas" que aparecen al extraer las canicas*. Calcular la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria y construir el diagrama de probabilidad.

4.- Sea el experimento de lanzar dos dados, sea *"M" la variable aleatoria que da la "media aritmética" de los puntos de cada pareja.* a) Dar los diferentes valores de la variable aleatoria "m", b) calcular la media y la desviación estándar de la distribución, c) construya el diagrama de probabilidad.

5.- Se tienen en una urna 10 baleros para carro, 4 de los cuales son defectuosos. Se extraen aleatoriamente 3 sin reemplazo, sea *X: el número de baleros no defectuosos* seleccionados.

a) Determine la distribución de probabilidad para *X*, b) calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad, c) construya el diagrama de probabilidad.

6.- Un paquete contiene una mezcla de semillas de distintos colores, contiene: 5 semillas para flores rojas, 3 para flores amarillas, dos para azules y una para color naranja. Se extraen aleatoriamente 4 semillas del paquete y si *X: indica el número de flores azules extraídas*, determine. A) la distribución de probabilidad para x, b) la media y la desviación estándar de distribución de probabilidad.

7.- Una compañía de publicidad tiene razones para creer que 3 de cada 5 personas que leen sus anuncios compran el producto anunciado. En una encuesta se seleccionaron 4 personas aleatoriamente. Si *X: indica el número de personas que compran el producto anunciado*, determine: a) la distribución de probabilidad para X, b) la media y la desviación estándar de la distribución.

8.- Según los archivos universitarios, de los alumnos inscritos en facultad el 15% cambia de carrera por lo menos una vez durante su primer año. Si se selecciona un grupo de 4 personas de probabilidad y *X: indica el número de alumnos que no cambian de carrera en su primer año*. Calcular: a) la distribución de probabilidad para X, b) la media y la desviación estándar de la distribución.

9.- En una pesero los pasajeros son 3 hombres, 4 mujeres y dos niños, si se selecciona aleatoriamente una muestra de 3 personas ¿cual es la distribución de probabilidad, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria *número de niños en la muestra?*

10.- Un juego al azar consiste en tirar un dado una vez. Si por cada punto que aparece se ganan 2 pesos y *"N" es la variable aleatoria "número de pesos ganados"*. Determinar: a) los valores posibles de "N", b) la distribución de probabilidad de "N", c) el valor esperado de "N", d) la varianza de "N", e) el diagrama de probabilidad.

11.- En un concurso se lanza un par de dados, si se obtienen dos números iguales se ganan 50 pesos, si se obtienen menos de 4 puntos se ganan 15 pesos, en otro caso se pierden 10 pesos. Si *X: indica el dinero ganado o perdido*, determinar: a) la distribución de probabilidad para la variable X, b) el valor esperado del juego.

12.- AL encargado de un servicio de lavado de autos se le paga de acuerdo al número de autos que se atienden. Considere que las probabilidades son 1/12, 1/12, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6 respectivamente, de que el encargado reciba $ 17, $ 19, $ 21, $ 23, $ 25 0 $ 27 entre las 4 PM y 5 PM de cualquier viernes. Determine el pago que espera el encargado en este periodo en particular.

13.- Para invertir en acciones en particular, una persona puede obtener ganancias de $4000 con una probabilidad de 0.35, o una perdida de $1500 con una probabilidad de 0.65. ¿Cuál es la ganancia que espera esta persona?

14.- Una caja contiene 5 fichas. Tres de las fichas están marcadas con $ 5, y las restantes con $ 10. Un jugador saca dos fichas aleatoriamente, y se le paga una cantidad igual a la suma de los valores indicados. Si el costo por jugar es de $13.20 por jugar, ¿es justo el juego?

15.- En un juego de azar se gana $ 9 si se saca una sota o un caballo, $ 15 si se saca un rey o un as de un paquete de 40 cartas. Si se saca cualquier otra carta, se pierde, ¿Cuánto se deberá pagar si el juego debe ser justo?

16.- Un automovilista desea asegurar su automóvil por $ 60 000. La Cia., estima que una pérdida toral puede ocurrir con una probabilidad de 0.002, un 50% de pérdida con una probabilidad de 0.01, y un 25% de pérdida con una probabilidad de 0.1. Ignorando otro tipo de pérdidas parciales, ¿qué prima deberá cobrar anualmente una Cia., aseguradora para tener una utilidad promedio de $ 1000?.

17.- La distribución de probabilidad de X, el número de fallas por cada 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme, es:

X	0	1	2	3	4
P(x)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

¿Cuál es el número esperado de defectos por cada 10 metro de esta tela?

BIBLIOGRAFÍA

1. Johnson, Robert, Estadística Elemental, Editorial: Trillas. México 1979.
2. Levine, Richard I. Estadística para administradores. Sexta edición. Editorial: Prentice Hall. México 1998.
3. Daniel, Wayne W. Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación. Editorial: Mc Graw Hill. México 1988.
4. Triola, Mario F., Estadística elemental. Editorial: Pearson Educación. México 2000.
5. Berenson, Mark L. Estadística para la administración y la economía. Editorial: Interamericana, México 1988.

COMPLEMENTARIA

1. Chou, Ya Lun, Análisis Estadístico. Editorial: Interamericana, México 1987.
2. Mendenhall, William. Estadística para administración y economía. Editorial Iberoamérica, EE. UU. 1981
3. Walpole, Ronald E. Probabilidad y Estadística. Editorial: Mc Graw Hill, México 1999.
4. Mills, Richard L, Estadística para economía y administración. Editorial: Mc Graw Hill, Colombia 1980.
5. Stevenson, William J. Estadística para Administración y Economía Editorial: HARLA, México 1981.
6. Lohr, Sharon L. Muestreo; Diseño y Análisis. Editorial: Thomson Editores, México 2000.
7. Pérez, César. Estadística aplicada a través de Excel. Pearson Educación, Madrid 20