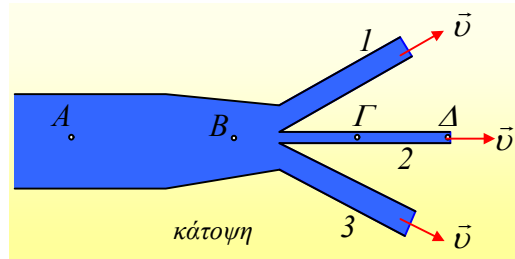


Τρεις παροχές από έναν σωλήνα.

Το παρακάτω σχήμα, δείχνει ένα τμήμα ενός οριζώντιου συστήματος ύδρευσης που καταλήγει σε τρεις σωλήνες, από τους οποίους το νερό εκρέει με την ίδια ταχύτητα $v=0,4\text{m/s}$. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή μόνιμη και στρωτή, σε όλο το μήκος της σωληνώσεως.



Ο σωλήνας 1 έχει διατομή $A_1=2\text{cm}^2$. Από τον σωλήνα 2 εξέρχονται 2L νερού σε 100s, ενώ η παροχή του σωλήνα 3, είναι ίση με το άθροισμα των παροχών των δύο άλλων σωλήνων.

- i) Να βρεθούν οι παροχές των τριών σωλήνων.
- ii) Να υπολογιστούν τα εμβαδά διατομής των δύο άλλων σωλήνων.
- iii) Να βρεθεί η πίεση του νερού στα σημεία Γ και Β, αν η εγκάρσια διατομή του σωλήνα στο σημείο Β είναι 10cm^2 .
- iv) Για τις τιμές της πίεσης στα σημεία Α και Β ισχύει:

$$\alpha) p_A < p_B, \quad \beta) p_A = p_B, \quad \gamma) p_A > p_B.$$

Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{at}=1\text{atm}=10^5\text{N/m}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000\text{kg/m}^3$.

Απάντηση:

- i) Για τις τρεις παροχές των σωλήνων έχουμε:

$$\Pi_1 = A_1 \cdot v_1 = 2\text{cm}^2 \cdot 40\text{cm/s} = 80\text{cm}^3/\text{s} = 0,08\text{L/s} \quad \text{ή} \quad \Pi_1 = 8 \cdot 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}.$$

$$\Pi_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2\text{L}}{100\text{s}} = 0,02\text{L/s} = 20\text{cm}^3/\text{s} \quad \text{ή} \quad \Pi_2 = 2 \cdot 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$$

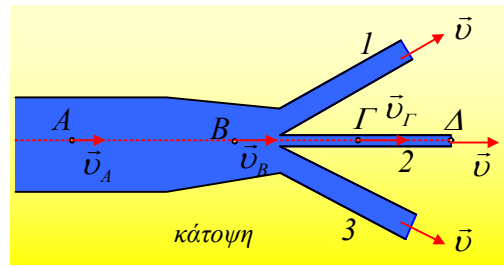
$$\Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2 = 0,1\text{L/s} = 100\text{cm}^3/\text{s} \quad \text{ή} \quad \Pi_3 = 10 \cdot 10^{-5}\text{m}^3/\text{s}.$$

- ii) Για την παροχή κάθε σωλήνα ισχύει $\Pi = A \cdot v$, οπότε:

$$A_2 = \frac{\Pi_2}{v} = \frac{20\text{cm}^3/\text{s}}{40\text{cm/s}} = 0,5\text{cm}^2$$

$$A_3 = \frac{\Pi_3}{v} = \frac{100\text{cm}^3/\text{s}}{40\text{cm/s}} = 2,5\text{cm}^2$$

- iii) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, η οποία περνάει από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, όπου το Δ είναι στο άκρο του 2ου σωλήνα όπου $p_\Delta = 1\text{atm} = 10^5\text{N/m}^2$.



Μεταξύ του σημείου Γ και του σημείου Δ:

$$p_{\Gamma} + \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 = p_{\Delta} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Αλλά ο καθένας από τους τρεις τελικούς σωλήνες έχει σταθερή διατομή και από το νόμο της συνέχειας:

$$A_{\Gamma} \cdot v_{\Gamma} = A_{\Delta} \cdot v_{\Delta} \rightarrow v_{\Gamma} = v_{\Delta} = v$$

Οπότε και $p_{\Gamma} = p_{\Delta} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Μεταξύ του σημείου Β και του σημείου Δ:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_{\Delta} + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1)$$

Αλλά από το νόμο της συνέχειας (διατήρηση της μάζας) για την παροχή από την εγκάρσια διατομή που περνά από το Β ισχύει:

$$\Pi_B = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = (80 + 20 + 100) \text{ cm}^3/\text{s} = 200 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

$$\text{Οπότε } \Pi_B = A_B v_B \rightarrow v_B = \frac{\Pi_B}{A_B} = \frac{200 \text{ cm}^3/\text{s}}{10 \text{ cm}^2} = 20 \text{ cm/s} = 0,2 \text{ m/s}$$

Συνεπώς από την (1) παίρνουμε:

$$p_B = p_{\Delta} + \frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 \rightarrow$$

$$p_B = 10^5 \text{ N/m}^2 + \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,4^2 \text{ N/m}^2 - \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,2^2 \text{ N/m}^2 = 100.060 \text{ N/m}^2$$

- iv) Από την εξίσωση της συνέχειας $A_A v_A = A_B v_B$ αλλά με βάση το σχήμα, ο σωλήνας έχει μεγαλύτερη διατομή στο Α, οπότε το νερό θα τρέχει με μικρότερη ταχύτητα. Αλλά τότε και πάλι από την εξίσωση Bernoulli

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

Αφού στο Α έχουμε μικρότερη ταχύτητα, η πίεση στο Α θα είναι μεγαλύτερη από την πίεση στο Β. Σωστή η γ) πρόταση.