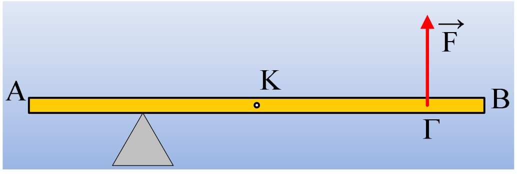
Συνισταμένη, κοίλη σφαίρα και μερικές άλλες εφαρμογές…

Καλοκαιρινές….

Ας ξεκινήσουμε με ένα γνωστό παράδειγμα.

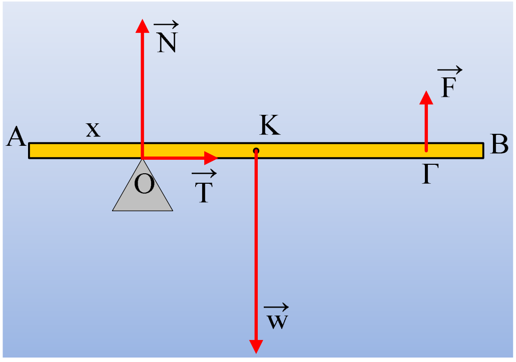
Παράδειγμα 1ο:

Η λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ του διπλανού σχήματος έχει βάρος w=100N, μήκος ℓ=4m και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε τρίποδο, σε απόσταση x=1m από το ένα της άκρο Α, ενώ δέχεται την επίδραση μιας κατακόρυφης δύναμης F, στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=3,5m. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από το τρίποδο.



Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου Ν η κάθετη αντίδραση από τρίποδο (δύναμη στήριξης) και Τ η αντίστοιχη (στατική) τριβή.



Από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow T=0 \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow N+F-w=0 \ (1) \end{cases}$$

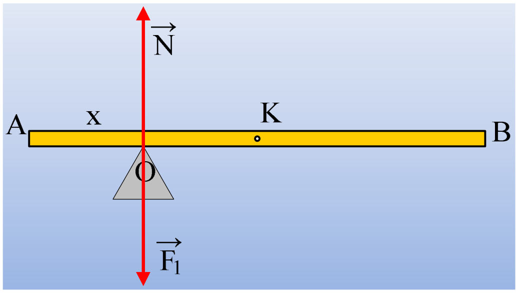
Εξάλλου $\Sigma\tau_{(o)}=0 \rightarrow F\cdot(O\Gamma)-w\cdot(OK)=0 \rightarrow F = w\dfrac{(OK)}{(O\Gamma)}$ (1)

$$F = w\frac{(OK)}{(O\Gamma)} = 100N \cdot \frac{1m}{2{,}5m} = 40N$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε N=w-F=60N.

Βλέπουμε δηλαδή ότι δεν ασκείται δύναμη τριβής από το τρίποδο, παρά μόνο μια κατακόρυφη δύναμη N=60N.

Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι:

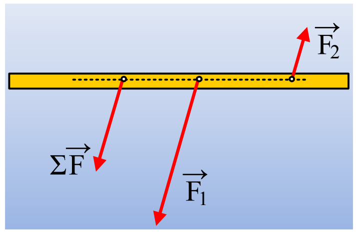


Η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης F, είναι μια κατακόρυφη δύναμη μέτρου F_1=w-F= 60Ν με φορά προς τα κάτω, η οποία ασκείται στο σημείο Γ, οπότε στη ράβδο ασκούνται μόνο δύο δυνάμεις:

Η F_1=60Ν με φορά προς τα κάτω και η αντίθετή της Ν=60Ν με φορά προς τα πάνω, οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σημείο, συνεπώς η ράβδος ισορροπεί.

Ή για να το πούμε με άλλα λόγια:

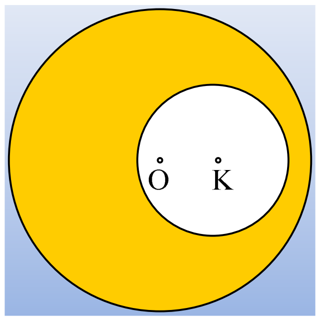
> ***Η συνισταμένη δύο παραλλήλων δυνάμεων με αντίθετη φορά, είναι μια δύναμη, της ίδιας διεύθυνσης, με φορά αυτή της δύναμης με το μεγαλύτερο μέτρο, ενώ το μέτρο της είναι ίσο με τη διαφορά των μέτρων των δύο δυνάμεων. Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης, είναι στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων, προς την πλευρά της μεγαλύτερης δύναμης.***



Ας προχωρήσουμε τώρα με έναν υπολογισμό, στο πνεύμα των τελευταίων εξετάσεων.

Παράδειγμα 2º:

Από μια ομογενή σφαίρα ακτίνας R, έχουμε αφαιρέσει μια σφαιρική περιοχή ακτίνας r= ½ R, το κέντρο της οποίας Κ, απέχει d=14cm από το κέντρο Ο της σφαίρας. Να βρεθεί το κέντρο μάζας της κοίλης σφαίρας.



Απάντηση:

Ας θεωρήσουμε ότι η σφαιρική περιοχή κέντρου Κ, γεμίζεται με ένα υλικό της ίδιας πυκνότητας με το υλικό της κοίλης σφαίρας. Έτσι θα είχαμε μια πλήρη σφαίρα με κέντρο μάζας, το κέντρο της Ο και βάρος:

$$w= Mg=\rho g V=\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho g \quad (1)$$

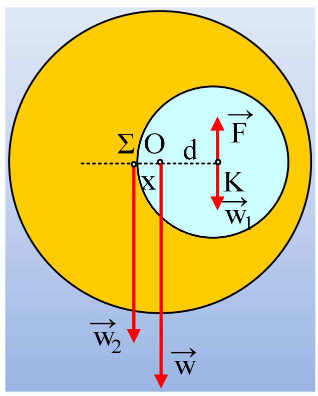
όπου ρ η πυκνότητα του υλικού.

Αντίστοιχα το βάρος της μικρής σφαίρας, θα ασκείτο στο κέντρο της Κ και θα ήταν:

$$w_1 = m_1 g=\rho g V_1 =\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho g \quad (2)$$

Αν αντί να αφαιρέσουμε το υλικό περιεχόμενο της μικρής σφαίρας, ασκούσαμε στο Κ μια κατακόρυφη δύναμη, με φορά προς τα πάνω, μέτρου $F=w_1$, θα παίρναμε ουσιαστικά την κοίλη σφαίρα με βάρος

$$w_2=w-F$$



το σημείο εφαρμογής του οποίου, (το κέντρο βάρους Σ, και κέντρο μάζας, αφού το βαρυτικό πεδίο είναι ομογενές), θα βρίσκεται στην προέκταση της ΟΚ, προς την πλευρά του Ο, όπως στο σχήμα. Στην πραγματικότητα δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το βάρος της κοίλης σφαίρας είναι η συνισταμένη του βάρους της συμπαγούς σφαίρας και της αντίθετης του βάρους που θα είχε η κοίλη αν πληρούτο από το ίδιο υλικό.

Αλλά τότε από το θεώρημα των ροπών (η ροπή της συνισταμένης είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών) παίρνουμε:

$$\tau_{(\Sigma)w_2} = \tau_{(\Sigma)w} + \tau_{(\Sigma)F} \rightarrow$$

$$0=-w \cdot x+F \cdot (x+d) \rightarrow$$

$$x = \frac{Fd}{w-F} \quad (3)$$

Αλλά με διαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{w}{w_1} = \frac{w}{F} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho g}{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho g} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 2^3 = 8 \rightarrow$$

$$x = \frac{Fd}{w-F} = \frac{Fd}{8F-F} = \frac{d}{7} = \frac{14cm}{7} = 2cm$$

Σημείωση:

Προφανώς θα μπορούσε να υποστηρίξει κάποιος ότι το βάρος w της συμπαγούς σφαίρας, είναι η συνισταμένη του βάρους w_1 της περιοχής της κοίλης και του βάρους w_2 της κοίλης σφαίρας και να γράψει:

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rightarrow \vec{w}_2 = \vec{w} + (-\vec{w}_1)$$

Καταλήγοντας στο ίδιο συμπέρασμα…

Και αν την κοίλη σφαίρα την βυθίσουμε στο νερό;

Παράδειγμα 3^o:

Η παραπάνω κοίλη σφαίρα βυθίζεται στην θάλασσα σε ορισμένο βάθος και αφήνοντάς την, παρατηρούμε ότι παραμένει στη θέση της (δεν ανεβαίνει, ούτε κατεβαίνει). Να υπολογιστεί η πυκνότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη, αν η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=1g/cm^3$.

Απάντηση:

Από τη στιγμή που η σφαίρα δεν μετακινείται κατακόρυφα η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδενική, συνεπώς το βάρος της w_2 εξουδετερώνεται από την άνωση:

$$w_2=A \rightarrow w-w_1=\rho g V$$

όπου $w_1=F= 1/8\ w$

οπότε

$$w - \frac{w}{8} = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \frac{7}{8}\rho_1 g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho g \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow$$

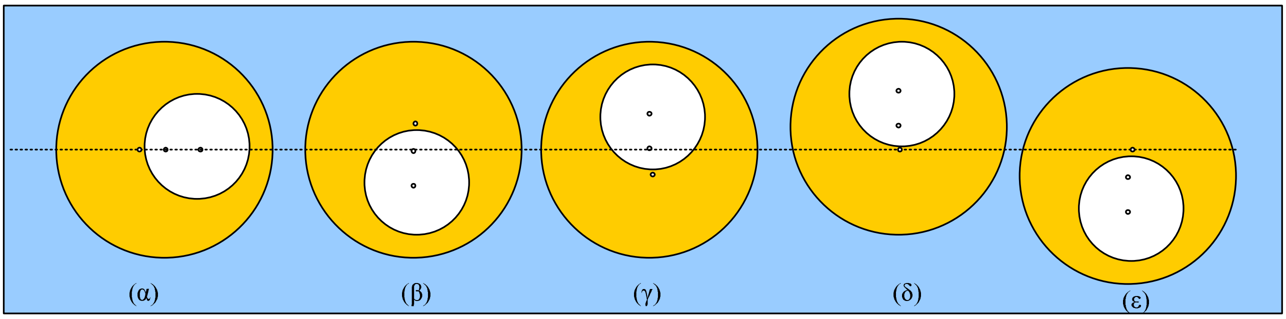
$$\frac{7}{8}\rho_1 = \rho \rightarrow \rho_1 = \frac{8}{7}\rho = 1{,}14g/cm^3$$

Δηλαδή αν αφεθεί η κοίλη σφαίρα μέσα στο νερό θα ισορροπήσει;

Παράδειγμα 4^o:

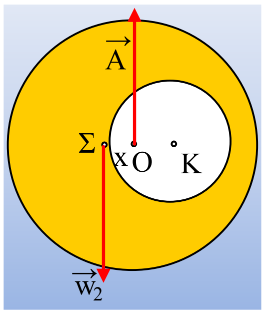
Η παραπάνω σφαίρα αφήνεται στη θέση που φαίνεται στο (α) σχήμα. Θα ισορροπήσει;

Αν όχι, ποιο από τα διπλανά σχήματα δείχνει την τελική θέση ισορροπίας της;



Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της, στο κέντρο μάζας της Σ και η άνωση, στο **κέντρο ανώσεως,** το οποίο είναι το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού, συνεπώς το κέντρο Ο της σφαίρας, όπως στο σχήμα:



Έτσι στην αρχική θέση μόλις αφεθεί η σφαίρα θα δεχτεί τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα.

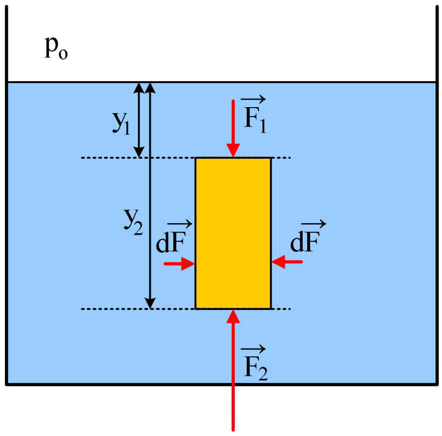
Οι δυο αυτές δυνάμεις αποτελούν ζεύγος, το οποίο έχει ροπή μέτρου $\tau = w_2 \cdot x$, η οποία θα του προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση τείνοντας να το στρέψει αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Έτσι ενώ το κέντρο μάζας Σ θα παραμείνει ακίνητο, η σφαίρα θα εκτελέσει μια φθίνουσα στροφική ταλάντωση (εξαιτίας της αντίστασης του νερού) και θα ισορροπήσει όπως στο σχήμα (δ).

Ερώτηση:

Ποιο είναι το **κέντρο ανώσεως** και πώς βρίσκεται;

Απάντηση:



Αρχικά να πούμε τι είναι η άνωση.

Είναι μια δύναμη που ασκείται από το υγρό, σε ένα σώμα που είναι βυθισμένο, με κατεύθυνση προς τα πάνω και ίσο κατά μέτρο με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Στην πραγματικότητα είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται από το υγρό στο σώμα. Ας το αποδείξουμε, όχι στην περίπτωση της παραπάνω σφαίρας, για να αποφύγουμε τις δύσκολες μαθηματικές πράξεις, αλλά στην περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του σχήματος.

Στην πάνω επιφάνεια ασκείται κατακόρυφη δύναμη. Με φορά προς τα κάτω μέτρου $F_1=p_1\cdot S=(p_o+\rho g y_1)\cdot S$, όπου p_o η πίεση στην επιφάνεια του υγρού (στην περίπτωσή μας η ατμοσφαιρική πίεση).

Στην κάτω επιφάνεια η αντίστοιχη δύναμη έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο $F_2=p_2\cdot S=(p_o+\rho g y_2)\cdot S$.

Εξάλλου σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια dA στην δεξιά πλευρά $dF=p\cdot dA=(p_o+\rho g y)\cdot dA$. Η δύναμη όμως αυτή εξουδετερώνεται από μια αντίθετη δύναμη, στην ακριβώς απέναντι στοιχειώδη επιφάνεια.

Έτσι η συνολική δύναμη είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω μέτρου:

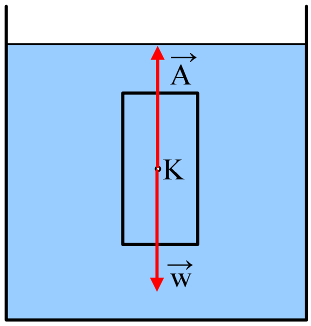
$$\Sigma F=F_2-F_1=(p_o+\rho g y_2)\cdot S-(p_o+\rho g y_1)\cdot S=\rho g\cdot S\cdot(y_2-y_1)=\rho g\cdot S\cdot h$$

Όπου ρ η πυκνότητα του υγρού και h το ύψος του παραλληλεπίδου. Αλλά $S\cdot h=V$ ο όγκος του στερεού, συνεπώς και ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού, οπότε:

$$\Sigma F=\rho g V=mg$$

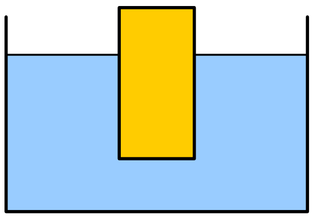
Το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται. Η δύναμη αυτή ονομάζεται άνωση.

Ας πάρουμε τώρα τον ίδιο όγκο υγρού. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος και η άνωση. Αλλά αφού ισορροπεί και το βάρος ασκείται στο κέντρο μάζας Κ της ποσότητας αυτής και η άνωση θα ασκείται στο σημείο Κ, **το κέντρο άνωσης.**



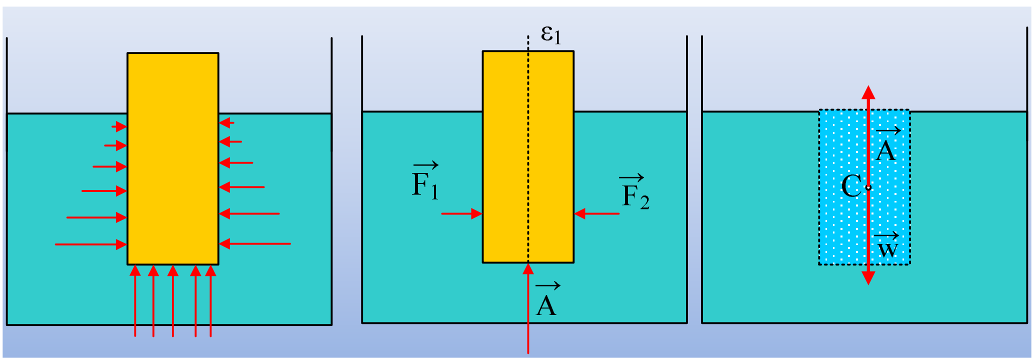
Ερώτηση:

Ένα σώμα σχήματος παραλληλεπιπέδου, επιπλέει στην επιφάνεια υγρού, όπως στο σχήμα. Να σχεδιαστεί η άνωση που ασκείται πάνω του και να βρεθεί το κέντρο άνωσης.



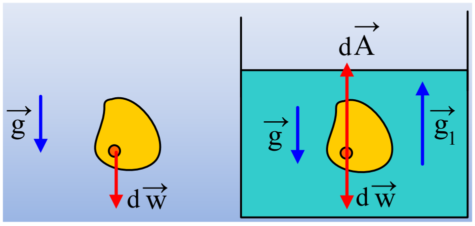
Απάντηση:

Οι δυνάμεις που ασκεί το υγρό στο σώμα, φαίνονται στο σχήμα, όπου οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό αλληλοεξουδετερώνονται. Οπότε τελικά η άνωση, δεν είναι τίποτα άλλο από τη συνισταμένη των κατακορύφων δυνάμεων που δέχεται η βάση $A=\rho g V_1$, όπου V_1 ο όγκος του στερεού, που έχει βυθιστεί.



Ποιο είναι το κέντρο άνωσης; Μόνο με αυτές τις πληροφορίες, δεν μπορούμε να απαντήσουμε. Η άνωση έχει γνωστό φορέα, την ευθεία $ε_1$, η οποία περνά από το κέντρο της βάσης, αλλά όχι ένα «γνωστό» σημείο εφαρμογής. Αν όμως αντικαταστήσουμε το μέρος του στερεού που είναι βυθισμένο, με ίσο όγκο νερού, προφανώς η ποσότητα αυτή του νερού ισορροπεί και μάλιστα η ισορροπία του είναι αδιάφορη, οπότε το κέντρο άνωσης C, θα ταυτίζεται με το κέντρο βάρους του νερού.

Από τη στιγμή τώρα, που κάθε σώμα που βυθίζεται σε υγρό, δέχεται δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι και κάθε στοιχειώδης μάζα του σώματος, δέχεται αντίστοιχη δύναμη. Αλλά στην περίπτωση αυτή, κάθε στοιχειώδης μάζα dm ενός σώματος δέχεται από το βαρυτικό πεδίο της Γης στοιχειώδες βάρος **dw**, αλλά όταν βυθίζεται στο υγρό, θα δέχεται επιπλέον και μια στοιχειώδη άνωση **dA**, την οποία μπορούμε να αποδώσουμε σε ένα αντίστοιχο ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης $\vec{g}_1$, όπως στο σχήμα.



Έτσι αφού dw=dm·g, αντίστοιχα θα έχουμε $dA=dm·g_1$.

Όμως $dm=ρ_1·dV$, οπότε $dA=ρ_1·g_1·dV$, ενώ και dA=ρ·g·dV, οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη βρίσκουμε:

$$\rho_1 \cdot g_1 \cdot dV = \rho \cdot g \cdot dV \rightarrow$$

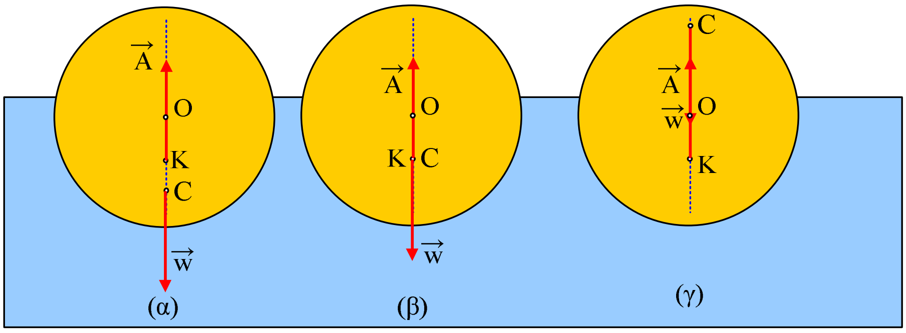
$$g_1 = \frac{\rho}{\rho_1} g$$

Όπου ρ η πυκνότητα του υγρού και $ρ_1$ η πυκνότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται η στοιχειώδης μάζα dm.

Ας δούμε τώρα αν μια ισορροπία είναι ευσταθής ή όχι.

Παράδειγμα 5^{ο}:

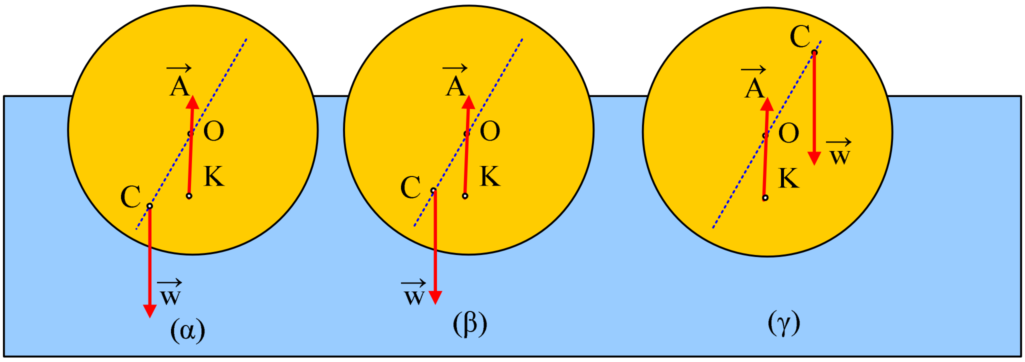
Στην επιφάνεια ενός υγρού ισορροπεί μια ανομοιογενής σφαίρα κέντρου μάζας C, μισοβυθυσμένη και έστω K, το κέντρο άνωσης. Η παραπάνω ισορροπία είναι ευσταθής, ασταθής ή αδιάφορη;



Απάντηση:

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις η σφαίρα ισορροπεί. Για να χαρακτηρίσουμε την ισορροπία, ας υποθέσουμε ότι οι τρεις σφαίρες, εκτρέπονται λίγο προς τα δεξιά. Η περιστροφή έγινε ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το κέντρο μάζας C και προφανώς προκλήθηκε από κάποια ροπή.

Στο παρακάτω σχήμα δείχνει την κατάσταση, κατά την οποία οι σφαίρες έχουν στραφεί κατά μια μικρή γωνία.



Στα δυο πρώτα σχήματα, η ροπή της άνωσης (ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο μάζας C), τείνει να στρέψει τη σφαίρα με φορά αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, με αποτέλεσμα η σφαίρα να έρθει στην αρχική του θέση ισορροπίας. Συνεπώς οι δυο ισορροπίες είναι ευσταθείς.

Αντίθετα στο 3^{ο} σχήμα η ροπή της άνωσης θα προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση και θα αυξήσει τη γωνιακή εκτροπή, ανατρέποντας τη σφαίρα, ώστε να αποκατασταθεί η κατάσταση που φαίνεται στο (α) από τα αρχικά σχήματα.

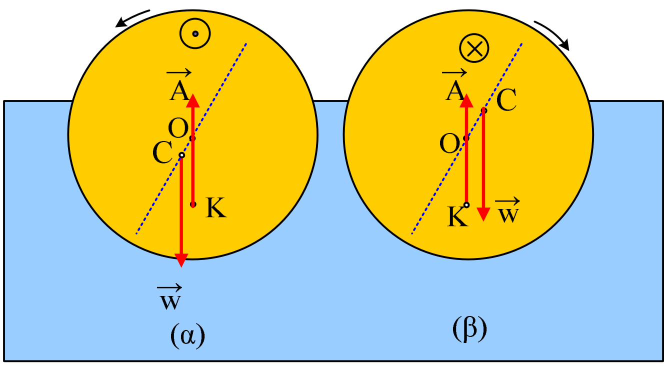
Ερώτηση:

Δηλαδή όταν το κέντρο βάρους C, είναι ψηλότερα του κέντρου άνωσης, η ισορροπία είναι ασταθής;

Απάντηση:

Όχι η πρόταση είναι λανθασμένη.

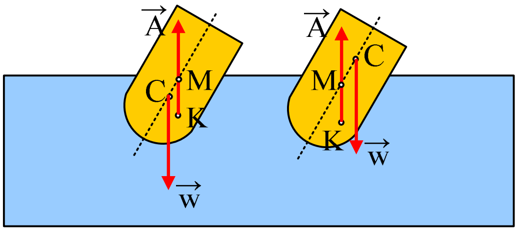
Ας δούμε τα παρακάτω σχήματα, όπου οι σφαίρες έχουν εκτραπεί κατά μια μικρή γωνία.



Στο πρώτο σχήμα, ο φορέας της άνωσης τέμνει την διάμετρο που περνά από το κέντρο μάζας C, στο κέντρο Ο, το οποίο είναι πάνω από το κέντρο μάζας. Στην περίπτωση αυτή η ασκούμενη ροπή της άνωσης ως προς το κέντρο μάζας C, θα προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, επαναφέροντας τη σφαίρα στην αρχική θέση ισορροπίας της.

Στο δεύτερο σχήμα, το κέντρο Ο, είναι χαμηλότερα του κέντρου μάζας C, με αποτέλεσμα η αντίστοιχη ροπή να τείνει να περιστρέψει δεξιόστροφα τη σφαίρα, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα η σφαίρα να ανατρέπεται.

Γενικότερα:



Το σημείο Μ, στο οποίο η άνωση τέμνει τον άξονα του πλοίου που περνάει από το κέντρο βάρους (κέντρο μάζας C), ονομάζεται ***μετάκεντρο*** και η **πλεύση** των πλοίων εξασφαλίζεται αφού το μετάκεντρο Μ είναι πάνω από το κέντρο βάρους C. Έτσι στο πρώτο σχήμα η ισορροπία είναι ευσταθής, ενώ στο δεύτερο το πλοίο θα ανατραπεί.

Η ισορροπία βέβαια εξασφαλίζεται ευκολότερα, όσο χαμηλότερα βρίσκεται το κέντρο βάρους.

Βλέπουμε δηλαδή γιατί στα πλοία χρειάζεται έρμα, πράγμα όμως που δυστυχώς δεν διαθέτουν αρκετοί συνάνθρωποι!!!

Το ύψος CM του μετάκεντρου από το κέντρο μάζας, στα ποντοπόρα πλοία είναι από 20 έως 60 cm, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν αργή και σταθερή ταλάντωση.

dmargaris@sch.gr