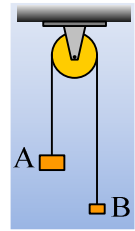


Πότε το νήμα δεν θα ολισθαίνει;

Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα που θέσαμε στην ανάρτηση: «[Ποια ροπή επιταχύνει την τροχαλία:](#)»

Δίνεται η διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου στα άκρα ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος, έχουμε δέσει δυο σώματα Α και Β με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$. Το νήμα περνά από τροχαλία μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=20\text{cm}$. Το σύστημα ηρεμεί, αφού εμείς συγκρατούμε το σώμα Β στη θέση του. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Β, το οποίο αρχίζει να ανέρχεται.



Να βρεθεί ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής μεταξύ νήματος και τροχαλίας, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση του νήματος.

Για την τροχαλία δίνεται $I = \frac{1}{2} MR^2$.

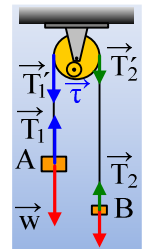
Απάντηση:

Στην προαναφερθείσα ανάρτηση, είχαμε καταλήξει ότι η τριβή που ασκείται στο σχοινί από την τροχαλία έχει μέτρο:

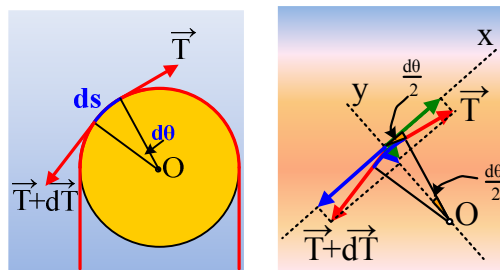
$$T_s = T_1' - T_2' = T_1 - T_2 \quad (1)$$

Το ερώτημα θα μπορούσε να τεθεί και έτσι:

Πόση είναι η τάση του νήματος;



Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα ds του σχοινοῦ, το οποίο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $d\theta$, το οποίο δέχεται δύναμη T (τάση του νήματος) από το δεξιό τμήμα του νήματος και δύναμη $T+dT$, από το αριστερό του, όπως στο πρώτο σχήμα. Αν αναλύσουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, τον άξονα x , εφαπτόμενο στο ds και τον άξονα y , κάθετο στο ds θα πάρουμε την εικόνα του δεύτερου σχήματος, οπότε:



$$\Sigma F_x = (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = dT \cdot \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$\Sigma F_y = (T + dT) \eta \mu \frac{d\theta}{2} + T \eta \mu \frac{d\theta}{2} = 2T \cdot \eta \mu \frac{d\theta}{2} + dT \cdot \eta \mu \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{Αλλά } \frac{d\theta}{2} \rightarrow 0 \text{ συνεπώς } \sin \frac{d\theta}{2} \rightarrow 1 \text{ ενώ } \eta \mu \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2},$$

$$\text{αλλά και } dT \cdot \eta \mu \frac{d\theta}{2} \approx dT \cdot \frac{d\theta}{2} \rightarrow 0$$

και οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\Sigma F_x = dT \text{ ενώ}$$

$$\Sigma F_y = 2T \cdot \frac{d\theta}{2} = T \cdot d\theta$$

Όμως στον άξονα y η στοιχειώδης μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση οπότε:

$$\Sigma F_y - N = dm \frac{v^2}{R}$$

Αλλά επειδή $dm \rightarrow 0$, έχουμε $\Sigma F_y - N = 0 \rightarrow N = \Sigma F_y$

Για να μην ολισθαίνει το νήμα θα πρέπει $T_s \leq T_{op}$ και ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, είναι αυτός για τον οποίο:

$$T_s = T_{op} \text{ ή } dT = \mu_s N \rightarrow dT = \mu_s T \cdot d\theta \rightarrow$$

$$\frac{dT}{T} = \mu_s \cdot d\theta \rightarrow \int \frac{dT}{T} = \mu_s \cdot \int d\theta \rightarrow$$

$$\ln T = \mu_s \cdot \theta \rightarrow T = C \cdot e^{\mu_s \cdot \theta}$$

Αλλά όταν $\theta=0$ (το νήμα στην δεξιά θέση επαφής), $T=T_2$ και η προηγούμενη εξίσωση δίνει:

$$T_2 = C \cdot e^{\mu_s \cdot 0} \rightarrow C = T_2 \text{ οπότε}$$

$$T = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \theta} \quad (2)$$

Σχέση που παρέχει την τάση στο ένα άκρο του νήματος, σε συνάρτηση με την γωνία θ που έχει τυλιχθεί το νήμα και την (μικρότερη) τάση στο άλλο άκρο.

Αλλά η γωνία που αντιστοιχεί στο μέρος του σχοινού που είναι σε επαφή με την τροχαλία είναι $\theta=\pi$ και η εξίσωση μας δίνει:

$$T_1 = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \pi}$$

και η (1) γίνεται:

$$T_s = T_1 - T_2 = T_2 \cdot e^{\mu_s \cdot \pi} - T_2 = T_2 (e^{\mu_s \cdot \pi} - 1) \quad (3)$$

Όμως (δες <Ποια ροπή επιταχύνει την τροχαλία;>) $T_1 - T_2 = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} M \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5N = 2,5N$ ενώ

$T_2 - m_2 g = m_2 \cdot \alpha \rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 \cdot \alpha = 1 \cdot 10N + 1 \cdot 2,5N = 12,5N$, οπότε από την (3) θα έχουμε:

$$T_s = T_2 (e^{\mu_s \cdot \pi} - 1) \rightarrow$$

$$e^{\mu_s \cdot \pi} = \frac{T_s + T_2}{T_2} \rightarrow$$

$$\ln e^{\mu_s \cdot \pi} = \ln \frac{T_s + T_2}{T_2} \rightarrow$$

$$\mu_s = \frac{1}{\pi} \cdot \ln \frac{T_s + T_2}{T_2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2,5 + 12,5}{12,5} \approx 0,06$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ένας ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής είναι αρκετός ώστε να μην γλιστράει το νήμα στο αυλάκι της τροχαλίας.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι αντιστρόφως ανάλογος με την γωνία θ (για ορισμένη τάση T_2), πράγμα αναμενόμενο και από την εξίσωση (2), αλλά προφανώς εξαρτάται και από την τάση του νήματος.

Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση του ίδιου συστήματος, με τα ίδια κινηματικά χαρακτηριστικά.

Ας πάρουμε τη διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου το Α σώμα μπορεί τώρα να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και το αριστερό τμήμα του νήματος είναι οριζόντιο. Ποιος θα είναι τώρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής οριακής τριβής, μεταξύ σχοινιού και κυλίνδρου;

Οι μαθηματικές εξισώσεις είναι (τελικά) ίδιες, οπότε μπορούμε να βρούμε:

$$\alpha = 2,5 \text{ m/s}^2, T_1 = 5 \text{ N}, T_2 = 7,5 \text{ N}, T_s = 2,5 \text{ N και:}$$

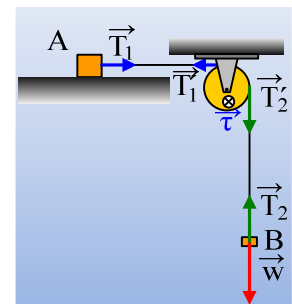
$$T_s = T_1 \left(e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \rightarrow$$

$$e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{T_s + T_1}{T_1} \rightarrow$$

$$\ln e^{\mu_s \cdot \frac{\pi}{2}} = \ln \frac{T_s + T_1}{T_1} \rightarrow$$

$$\mu_s = \frac{2}{\pi} \cdot \ln \frac{T_s + T_1}{T_1} = \frac{2}{3,14} \cdot \ln \frac{2,5 + 5}{5} \approx 0,26$$

Βλέπουμε δηλαδή μια σημαντική αύξηση στην τιμή του μ_s , που οφείλεται κυρίως στην μικρότερη τάση του νήματος. Αν η τάση παρέμενε ίδια, (πράγμα που μπορεί να συμβεί επιλέγοντας κατάλληλες τιμές μαζών, $m_1 = 5 \text{ kg}$ και $m_2 = 1,2 \text{ kg}$), θα είχαμε απλά διπλασιασμό της τιμής του συντελεστή οριακής στατικής τριβής.



dmargaris@sch.gr