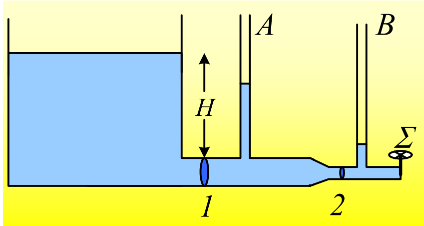
Ποια τα ύψη στα μανόμετρα.



Ένας οριζόντιος σωλήνας συνδέεται κοντά στον πυθμένα μιας μεγάλης δεξαμενής σε βάθος H=10m, όπως στο διπλανό σχήμα. Αρχικά ο σωλήνας έχει διατομή A_1, ενώ στη συνέχεια στενεύει αποκτώντας διατομή $A_2=0{,}4A_1$. Οι ακτίνες των δύο σωλήνων θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με το ύψος H.

i) Αν η στρόφιγγα Σ στο άκρο του σωλήνα είναι ανοικτή και το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, ενώ η ροή μόνιμη και στρωτή, να υπολογιστούν:

α) Το ύψος h_2 της στήλης στο σωλήνα Β.

β) Το ύψος h_1 της στήλης στο σωλήνα Α.

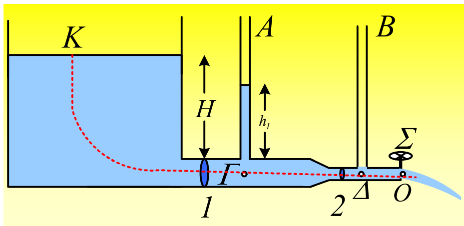
ii) Κλείνουμε τη στρόφιγγα Σ. Να υπολογιστούν ξανά τα ύψη h_1 και h_2 στους σωλήνες Α και Β.

iii) Αν η στρόφιγγα Σ στο άκρο του σωλήνα είναι ανοικτή και το νερό θεωρηθεί πραγματικό ρευστό, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται εσωτερικές τριβές:

α) Θα ανέβει ή όχι το νερό στη στήλη Β;

β) Κλείνουμε τη στρόφιγγα Σ. Να υπολογιστούν ξανά τα ύψη h_1 και h_2 στους σωλήνες Α και Β.

Απάντηση:



i) α) Στο στενό σωλήνα το νερό κινείται με μια σταθερή ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα εκροής στο άκρο Ο, με βάση την εξίσωση της συνέχειας ($A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta = A_o \cdot \upsilon_o$). Αλλά η πίεση στο άκρο Ο, είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση και από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Δ και Ο, έχουμε:

$$p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 = p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2 \rightarrow p_\Delta = p_o = p_{\alpha\tau}$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι το νερό δεν θα ανέλθει στο σωλήνα Β και η εικόνα θα είναι αυτή του παραπάνω σχήματος.

β) Από την εξίσωση της συνέχειας για δυο διατομές του οριζόντιου σωλήνα στις θέσεις Γ και Ο, παίρνουμε:

$$A_1 \cdot \upsilon_\Gamma = A_2 \cdot \upsilon \rightarrow \upsilon_\Gamma = \frac{A_2}{A_1}\upsilon = \frac{0{,}4A_1}{A_1}\upsilon = 0{,}4\upsilon \quad (1)$$

Όπου υ η ταχύτητα εκροής στο άκρο Ο του σωλήνα.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Κ και Ο, τα οποία βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή, θεωρώντας μηδενική την ταχύτητα του σημείο Κ, αφού η δεξαμενή έχει πολύ μεγαλύτερη διατομή από το σωλήνα και έχουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 + \rho g H = p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2gH}$$

Τώρα από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Γ και Ο έχουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

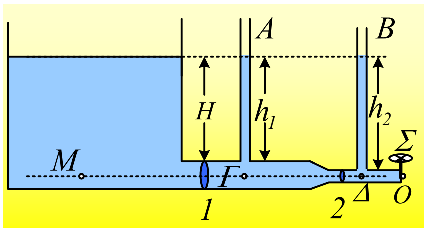
$$p_\Gamma = p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 - \frac{1}{2}\rho(0{,}4\upsilon)^2 \rightarrow$$

$$p_\Gamma = p_{\alpha\tau} + 0{,}84\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_{\alpha\tau} + 0{,}84\frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{2gH}\right)^2 = p_{\alpha\tau} + 0{,}84\rho g H \quad (2)$$

Όμως το σημείο Γ, είναι στο κάτω άκρο της κατακόρυφης στήλης νερού του σωλήνα Α, οπότε η πίεση είναι ίση με: $p_\Gamma = p_{\alpha\tau} + \rho g h_1$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $0{,}84\rho g H = \rho g h_1 \rightarrow h_1 = 0{,}84H = 8{,}4m$

ii) Μόλις κλείσουμε τη στρόφιγγα, το νερό ισορροπεί, οπότε στα σημεία Μ, Γ και Δ επικρατεί η ίδια πίεση, οπότε:

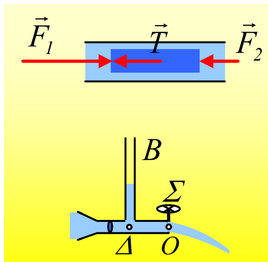


$$p_{\alpha\tau} + \rho g H = p_{\alpha\tau} + \rho g h_1 = p_{\alpha\tau} + \rho g h_2 \rightarrow$$

$$h_1 = h_2 = H = 10m.$$

(Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων…)

iii) Αν το νερό είναι πραγματικό, τότε αν θεωρήσουμε ένα σωμάτιο ρευστού, κυλινδρικού σχήματος, στο τμήμα μεταξύ των σημείων Δ και Ο, δέχεται στη διεύθυνση της κίνησης, τις δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου Τ η δύναμη τριβής από τα διπλανά στρώματα του νερού, F_1 η δύναμη λόγω πίεσης στην αριστερή βάση και F_2 η αντίστοιχη δύναμη από την δεξιά βάση. Αλλά αν έχουμε μια ροή με σταθερή παροχή, το σωμάτιο αυτό θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε ΣF=0 ή



$$F_1 = F_2 + T \rightarrow F_1 > F_2 \rightarrow p_1 A > p_2 A \rightarrow p_1 > p_2$$

Κατά μήκος δηλαδή του στενού σωλήνα η πίεση μειώνεται, αλλά τότε αφού στο άκρο Ο η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, στο Δ η πίεση είναι μεγαλύτερη και το νερό θα ανέβει στο μανόμετρο, όπως στο σχήμα.

iv) Μόλις κλείσουμε την στρόφιγγα και σταματήσει η ροή, θα έχουμε ξανά ένα υγρό σε ισορροπία, χωρίς να εμφανίζεται εσωτερική τριβή και η κατάσταση θα είναι απολύτως ίδια με αυτήν του ii) ερωτήματος, με αποτέλεσμα ξανά να έχουμε:

$$h_1 = h_2 = H = 10m.$$

dmargaris@gmail.com