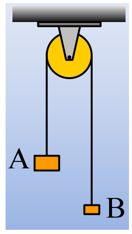
# *Ποια ροπή επιταχύνει την τροχαλία;*

Πώς στρέφεται μια τροχαλία με τη βοήθεια ενός νήματος;

Είναι η τάση του νήματος, η ροπή της οποίας, προκαλεί την γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας;

Παίζουν κάποιο ρόλο οι τριβές μεταξύ νήματος και τροχαλίας και αν ναι, ποιον;

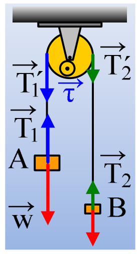
Ας κάνουμε μια διερεύνηση της κατάστασης που επικρατεί, μέσω ενός παραδείγματος.




Δίνεται η διάταξη του διπλανού σχήματος, όπου στα άκρα ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος, έχουμε δέσει δυο σώματα Α και Β με μάζες $m_1$=2kg και $m_2$=1kg. Το νήμα περνά από τροχαλία μάζας Μ=4kg και ακτίνας R=20cm. Το σύστημα ηρεμεί, αφού εμείς συγκρατούμε το σώμα Β στη θέση του. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Β, το οποίο αρχίζει να ανέρχεται, χωρίς να γλιστρά το νήμα στο αυλάκι της τροχαλίας.

Να βρεθεί η ροπή που επιταχύνει την τροχαλία.

**Απάντηση:**




Η λύση που δίνουμε (**και καλά κάνουμε…**), είναι να σχεδιάζουμε τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου $T_1$ η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα Α, $T_1{'}$η αντίστοιχη τάση του αριστερού τμήματος **του νήματος που ασκείται στην τροχαλία** και αφού το νήμα είναι αβαρές $T_1=T_1{'}$, ενώ με την ίδια συλλογιστική, το δεξιό τμήμα του νήματος **ασκεί** δυνάμεις $T_2$ και $T_2{'}$στο σώμα Β και στην τροχαλία αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τα τρία σώματα παίρνουμε:

Για το σώμα Α: $\Sigma F=m_1\cdot\alpha_1 \rightarrow m_1g-T_1=m_1\cdot\alpha_1$ (1)

Για το σώμα Β: $\Sigma F=m_2\cdot\alpha_2 \rightarrow T_2-m_2g=m_2\cdot\alpha_2$ (2)

Για την τροχαλία: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1\cdot R{'}-T_2{'}R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1-T_2 = ½\, MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

Αλλά αφού το νήμα έχει σταθερό μήκος και δεν γλιστράει στην τροχαλία $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha$ και το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) δίνει:

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+M/2} \rightarrow$$

Και με αντικατάσταση $a=\dfrac{(2-1)\cdot 10}{2+1+2/2}m/s^2=2{,}5m/s^2$

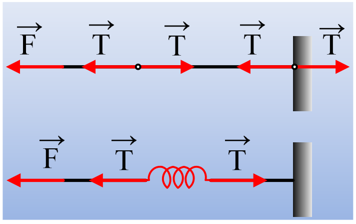
Συνεπώς η ροπή που επιταχύνει την τροχαλία, είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δύο τάσεων του νήματος:

$$\Sigma\tau= T_1\cdot R{'}-T_2{'}R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}= ½\, MR\cdot\alpha= ½\cdot 2\cdot 0{,}2\cdot 2{,}5N\cdot m=0{,}5N\cdot m$$

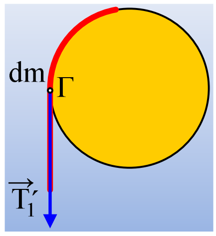
Με διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής της τροχαλίας και φορά προς τα έξω (στο σχήμα).

Είναι έτσι η πραγματικότητα; Ασκούνται στην τροχαλία οι δύο παραπάνω τάσεις;

Για να απαντήσουμε, θα πρέπει να αναρωτηθούμε τι ονομάζουμε τάση του νήματος. Τάση του νήματος έχει επικρατήσει να ονομάζουμε τη δύναμη που το νήμα ασκεί σε ένα σώμα. Έτσι εξετάζοντας το σώμα Β, βλέπουμε να επιταχύνεται προς τα πάνω, δεχόμενο από το νήμα την δύναμη $T_2$, την οποία ονομάζουμε τάση του νήματος.



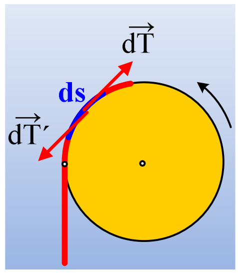

Στην πραγματικότητα όταν ασκούμε μια δύναμη τραβώντας ένα νήμα, η τάση του νήματος είναι η δύναμη που ασκεί κάθε τμήμα του νήματος στο διπλανό του και μπορούμε να την μετρήσουμε, αν κόψουμε το νήμα σε ένα σημείο παρεμβάλλοντας ένα ελατήριο, όπως στο σχήμα. Αλλά με βάση το πάνω σχήμα, ο τοίχος ασκεί στο νήμα μια δύναμη προς τα δεξιά και αφού το νήμα ισορροπεί ΣF=0, συνεπώς η δύναμη αυτή έχει το ίδιο μέτρο με την δύναμη F. Έτσι λέμε απλά ότι ασκώντας μια δύναμη F στο ένα άκρο του νήματος, η δύναμη μεταφέρεται μέσω του νήματος, με αποτέλεσμα να ασκείται και μια ίση δύναμη στον τοίχο από το νήμα, η λεγόμενη τάση του νήματος.




Ας έρθουμε τώρα στην τροχαλία και στο σημείο επαφής Γ του νήματος με αυτήν. Πού ασκείται η τάση $T_1΄$; Προφανώς όχι στην τροχαλία. Αν πάρουμε μια στοιχειώδη μάζα dm του νήματος που βρίσκεται σε επαφή με την τροχαλία, τότε το ευθύγραμμο αριστερό μέρος του νήματος, του ασκεί την τάση του νήματος $T_1΄$, όπως στο σχήμα. Η τάση του νήματος $T_1΄$ ασκείται σε υλικό σημείο του νήματος και όχι στην τροχαλία!!!

Αλλά τότε ποια ροπή επιταχύνει στροφικά την τροχαλία;

### ***Η ροπή της στατικής τριβής μεταξύ νήματος και τροχαλίας.***



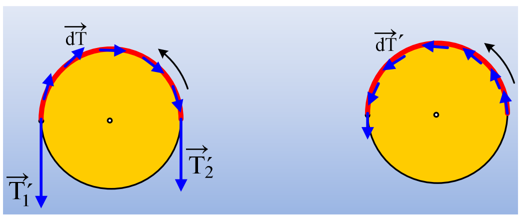

Πράγματι αν εστιάσουμε σε ένα στοιχειώδες τμήμα ds του νήματος που βρίσκεται σε επαφή με την τροχαλία, τότε το τμήμα αυτό τείνει να κινηθεί, ως προς την τροχαλία, συνεπώς στο τμήμα ds του σχοινιού αναπτύσσεται δύναμη στατικής τριβής dT, ενώ dT΄, η αντίδρασή της η οποία ασκείται στην τροχαλία, όπως στο διπλανό σχήμα.

Η δύναμη αυτή έχει αντίστοιχα ροπή, ως προς τον άξονα περιστροφής dτ=dT΄·R.

Αλλά τότε η συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία από το νήμα θα είναι:

$$\tau_{ολ} = \int dT'R = R\int dT' = T_s \cdot R$$

όπου $\int dT' = T_s$ η στατική τριβή, μέτρου ίσου με το άθροισμα των μέτρων όλων αυτών των στοιχειωδών στατικών τριβών που ασκούνται στην τροχαλία.




| | |
|---|---|
| *Οι στοιχειώδεις δυνάμεις στατικής τριβής στο νήμα.* | *Οι στοιχειώδεις δυνάμεις στατικής τριβής στη τροχαλία.* |

Αλλά αν πάρουμε όλο το μήκος του νήματος που έρχεται σε επαφή με την τροχαλία και εφαρμόσουμε το 2$^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα γι' αυτό, θα έχουμε:

$$T_1'-T_s-T_2'=m\cdot\alpha \ ^{(*)}$$

Όπου m η μάζα του τμήματος αυτού. Αλλά επειδή το νήμα θεωρείται αβαρές m→0, συνεπώς

$$T_1'-T_s-T_2'=0 \rightarrow$$

$$T_s=T_1'-T_2'\rightarrow$$

$$\tau_{ολ}=\int dT'R=R\int dT'=R\cdot T_s=(T_1'-T_2')\cdot R=T_1'R-T_2'R$$

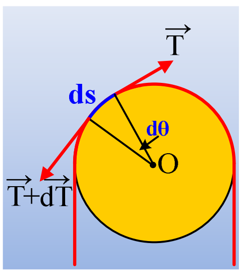
Βλέπουμε δηλαδή ότι η ροπή που υπολογίζουμε θεωρώντας ότι στην τροχαλία ασκούνται οι ροπές των δυο τάσεων $T_1'$και $T_2'$, είναι ίση με την πραγματική ροπή που δέχεται, που δεν είναι άλλη από τη ροπή της στατικής τριβής.

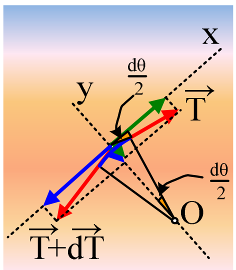
ΥΓ.

Επειδή το θέμα έχει προεκτάσεις, θα χρειαστεί να επανέλθω.

(*)

Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα ds του σχοινιού, το οποίο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία dθ, το οποίο δέχεται δύναμη Τ (τάση του νήματος) από το δεξιό τμήμα του νήματος και δύναμη Τ+dT, από το αριστερό του, όπως στο πρώτο σχήμα. Αν αναλύσουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, τον άξονα x, εφαπτόμενο στο ds και τον άξονα y, κάθετο στο ds θα πάρουμε την εικόνα του δεύτερου σχήματος, οπότε:




$$\Sigma F_{Tx}=(T+dT)\sigma\upsilon\nu\frac{d\theta}{2}-T\sigma\upsilon\nu\frac{d\theta}{2}=dT\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{d\theta}{2}$$

Αλλά $\frac{d\theta}{2}\rightarrow 0$ συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\frac{d\theta}{2}\rightarrow 1$ οπότε:

$$\Sigma F_{Tx}=dT$$

Έτσι αν μείνουμε στην εφαπτομενική διεύθυνση, θα έχουμε από τον 2$^{ο}$ νόμο:

$$\Sigma F_x=dm\cdot\alpha$$

Για κάθε στοιχειώδη μάζα dm, του στοιχειώδους τόξου ds, με διεύθυνση αυτήν της εφαπτομένης.

Έτσι για τα μέτρα θα έχουμε:

$$dT-dT_s=dm\cdot\alpha$$

όπου $dT_s$ η στοιχειώδης στατική τριβή που δέχεται το αντίστοιχο τόξο.

$\int_{T_2'}^{T_1'} dT - \int dT_s = \int_0^m dm \cdot a \rightarrow [T]_{T_2'}^{T_1'} - T_s = m \cdot a$ όπου, $T_s$ το μέτρο της συνολικής στατικής τριβής, α το μέτρο της κοινής εφαπτομενικής επιτάχυνσης κάθε στοιχειώδους μάζας του νήματος και m η μάζα του νήματος που αντιστοιχεί σε ημιπεριφέρεια. Άρα:

$$T_1' - T_2' - T_s = m \cdot \alpha$$

**dmargaris@sch.gr**