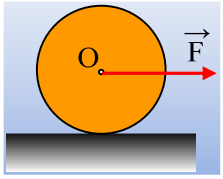
Ολίσθηση και κύλιση τροχού.



Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας M=10kg και ακτίνας =0,5m, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}3$. Σε μια στιγμή t=0 ασκείται στο κέντρο Ο του τροχού οριζόντια δύναμη F μέτρου $F_1=100N$, ενώ τη στιγμή $t_1=2s$, το μέτρο της δύναμης μειώνεται στην τιμή $F_2=60N$.

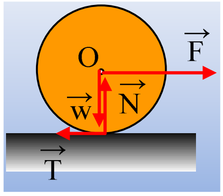
i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του τροχού τη στιγμή t_1.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του κέντρου Ο του τροχού μέχρι τη στιγμή $t_2=4s$.

iii) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, μέχρι την παραπάνω στιγμή t_2, εξαιτίας της τριβής που ασκείται στον τροχό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Το ερώτημα είναι τι κίνηση κάνει ο τροχός από 0-4s; Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=M\alpha_{cm} \rightarrow F_1-T=M\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T=\frac{1}{2}MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T=\frac{1}{2}M\cdot\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F_1=\frac{3}{2}Ma_{cm} \quad (4)$$

$$a_{cm}=\frac{2F_1}{3M} \rightarrow T=\frac{F_1}{3}=33{,}3N$$

Αλλά η μέγιστη τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, η οριακή στατική τριβή έχει μέτρο:

$$T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu\cdot N=\mu\cdot Mg=0{,}3\cdot 10\cdot 10N=30N.$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ήταν λάθος και ο τροχός, στρέφεται μεν αλλά και ολισθαίνει. Αλλά τότε από την (1) παίρνουμε:

$$a_{cm}=\frac{F_1-T_{o\lambda}}{M}=\frac{100N-30N}{10kg}=7m/s^2$$

Οπότε τη στιγμή $t_1=2s$ το κέντρο Ο του τροχού έχει ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t_1=14m/s$.

Εξάλλου από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{2T}{MR}=\frac{2\cdot 30}{10\cdot 0{,}5}rad/s^2=12rad/s^2.$$

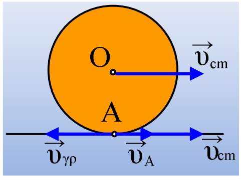
Και τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1=12\cdot 2\ rad/s=24rad/s.$$

Με βάση αυτά η κινητική ενέργεια του τροχού τη στιγμή αυτή είναι:

$$K=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega^2=\frac{1}{2}10\cdot 14^2\,J+\frac{1}{2}\frac{1}{2}10\cdot 0{,}5^2\cdot 24^2\,J=1340J$$

ii) Τη στιγμή t_1 μικραίνει το μέτρο της δύναμης στην τιμή F_2=60N, ενώ ο τροχός συνεχίζει να ολισθαίνει, αφού αν πάρουμε την ταχύτητα του σημείου επαφής Α του τροχού με το έδαφος, θα βρούμε:



$$\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega R=14m/s-24\cdot 0{,}5m/s=2m/s$$

με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

Αλλά τότε από την σχέση (1) βρίσκουμε τώρα ότι ο άξονας του τροχού επιταχύνεται με επιτάχυνση κέντρου μάζας $a_{cm1}=\frac{F_2-T_{ολ}}{M}=\frac{60N-30N}{10kg}=3m/s^2$, ενώ η γωνιακή του επιτάχυνση συνεχίζει να έχει μέτρο $α_{γων}$=12rad/s^2, όπως και πριν, αφού δεν έχει αλλάξει η ασκούμενη τριβή, η οποία συνεχίζει να είναι τριβή ολίσθησης.

Αυτό σημαίνει ότι ο τροχός συνεχίζεται να επιταχύνεται μεταφορικά και να αυξάνεται η υ_{cm} και στροφικά, οπότε αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα, άρα και η γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{γρ}$ του σημείου Α. Αλλά ενώ ο ρυθμός μεταβολής της $\upsilon_{γρ}$ είναι όση και πριν την μείωση του μέτρου της δύναμης, ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της υ_{cm} μειώθηκε. Συνεπώς πολύ σύντομα οι δυο παραπάνω ταχύτητες θα αποκτήσουν ίσα μέτρα και ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Οπότε για την κίνηση για t>2s, έχουμε:

$$\upsilon_{cm}=\upsilon_2+\alpha_{cm1}\cdot(t-2) \quad και \quad \upsilon_{γρ}=[\omega_2+\alpha_{γων2}\cdot(t-2)]\cdot R \quad (S.I.)$$

εξισώνοντας τα πρώτα μέλη παίρνουμε:

$$14+3(t-2)=[24+12(t-2)]\cdot 0{,}5 \rightarrow t=8/3\ s.$$

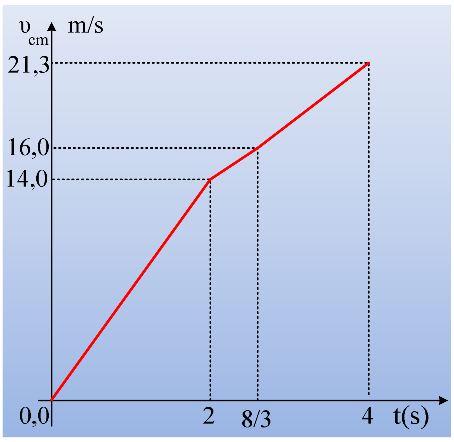
Τη στιγμή αυτή ο τροχός παύει να ολισθαίνει, έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας:

$$\upsilon'_{cm}=\upsilon_2+\alpha_{cm1}\cdot(t-2)=14m/s+3\cdot\left(\frac{8}{3}-2\right)m/s=16m/s.$$

Από τη στιγμή t΄=8/3s που ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει η σχέση (4) από την οποία βρίσκουμε $a_{cm2}=\frac{2F_2}{3M}=\frac{2\cdot 60}{3\cdot 10}m/s^2=4m/s^2$ με αποτέλεσμα η ταχύτητά του τη στιγμή t_2=4s θα είναι:

$$\upsilon_{cm}=\upsilon'_{cm}+a_{cm2}\left(t-\frac{8}{3}\right)=16m/s+4\left(4-\frac{8}{3}\right)m/s=21{,}3m/s$$

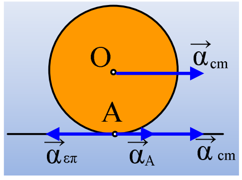
Με βάση τα παραπάνω η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος



iii) Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική είναι κατά απόλυτο τιμή ίση με το έργο της τριβής ολίσθησης:

$$Q_{θερ}=|W_T|=T_{ολ}\cdot s$$

Όπου s η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της τριβής.



Αλλά από 0-2s το σημείο Α έχει τις επιταχύνσεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου $α_1=α_{cm}-α_{επ}=α_{cm}-α_{γων}\cdot R= 7m/s^2-12\cdot 0{,}5m/s^2=1\ m/s^2$, οπότε μετατοπίζεται κατά $x_1= ½\ α_1\cdot t^2= ½\ 1\cdot 2^2 m=2m$.

Εξάλλου με την ίδια λογική από 2s-8/3s η επιτάχυνση του σημείου Α θα είναι:

$$α_2=α_{cm}-α_{επ}=α_{cm}-α_{γων}\cdot R= 3m/s^2-12\cdot 0{,}5m/s^2=-3\ m/s^2$$

και μετατοπίζεται κατά $x_2=υ_{2A}\cdot(t-2) + ½\ α_2\cdot(t-2)^2$ όπου $υ_{2A}$=2m/s

$$x_2=2\cdot\left(\frac{8}{3}-2\right)+\frac{1}{2}(-3)\cdot\left(\frac{8}{3}-2\right)^2 m \approx 0{,}67m$$

Έτσι η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική θα είναι:

$$Q_{θερ}=T_{ολ}\cdot s=T_{ολ}(x_1+x_2)=30\cdot(2+0{,}67)J=80J.$$

Σχόλια.

1) Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την παραπάνω θερμική ενέργεια, βρίσκοντας πόσο γλίστρησε ο τροχός. Έτσι αν γλίστρησε κατά s, τότε η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική θα είναι ίση με:

$$Q_{θερ}=T_{ολ}\cdot s$$

Όπου $s=x_{cm}-θ\cdot R$

ενώ θ η γωνία κατά την οποία στρέφεται ο τροχός στο διάστημα της ολίσθησης.

2) Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να εφαρμόζαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. χωριστά για μεταφορική και στροφική κίνηση. Έτσι θα είχαμε για το διάστημα που ο τροχός ολισθαίνει:

Μεταφορική κίνηση: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_F+W_T$

Όπου το έργο της τριβής θα προκύψει αρνητικό, μετρώντας την μείωση της μεταφορικής κινητικής ενέργειας, την οφειλόμενη στην τριβή.

Στροφική κίνηση: $K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{τT}$

Όπου το αντίστοιχο έργο της ροπής της τριβής είναι θετικό, μετρώντας την ενέργεια που μετατρέπεται σε περιστροφική κινητική.

Η διαφορά $|W_T|- W_{τT}$ εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται από τον τροχό και δεν γίνεται κινητική, συνεπώς την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική.

3) Και βέβαια τελευταίο, αλλά ίσως το πιο σημαντικό από άποψη θεωρίας, είναι να εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας για το χρονικό διάστημα της ολίσθησης.

Η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης F, κατά ένα μέρος εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας του τροχού και το υπόλοιπο μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια:

$$W_F=\frac{1}{2}Mυ_{cm}^2+\frac{1}{2}Iω^2+Q$$

dmargaris@sch.gr