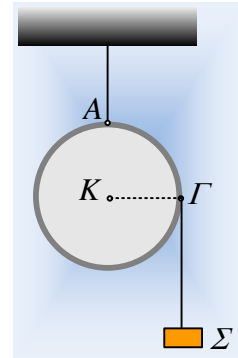


### Οι επιταχύνσεις τη στιγμή μηδέν.

Ένας λεπτός ομογενής δίσκος μάζας  $M=6\text{kg}$  και ακτίνας  $R=0,5\text{m}$ , κρέμεται από ένα μη ελαστικό νήμα, το οποίο έχει δεθεί σε σημείο  $A$  της περιφέρειάς του. Δένουμε σε ένα άλλο σημείο  $\Gamma$  της περιφέρειας του δίσκου, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας  $K\Gamma$ , ένα άλλο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m=1\text{kg}$ , το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο. Συγκρατούμε τα δυο σώματα, ώστε τα νήματα να είναι κατακόρυφα και τεντωμένα και τη στιγμή  $t=0$ , τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν. Για τη στιγμή, αμέσως μόλις αφεθούν τα σώματα ελεύθερα ( $t=0^+$ ) να βρεθούν:



- i) Η επιτάχυνση του κέντρου  $K$  του δίσκου και η επιτάχυνση του σώματος  $\Sigma$ .
- ii) Οι τάσεις των δύο νημάτων.
- iii) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- iiii) Οι επιταχύνσεις των σημείων  $A$  και  $\Gamma$  που έχουν δεθεί τα δυο νήματα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, όλες κατακόρυφες δυνάμεις. Εφαρμόζοντας το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά και θεωρώντας την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική του κέντρου μάζας  $K$  και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το  $K$ , παίρνουμε:

$$\text{Σώμα } \Sigma: \Sigma F = \Sigma F_y = m_1 \cdot a_1 \rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \cdot a_1 \quad (1)$$

$$\text{Δίσκος: } \Sigma F = \Sigma F_y = M a_{cm} \rightarrow Mg + T_1' - T_2 = M \cdot a_{cm} \quad (2)$$

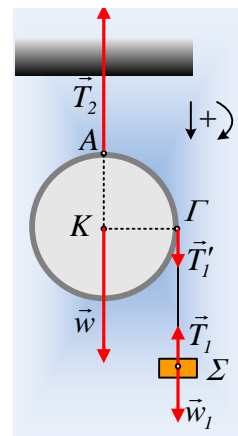
$$\Sigma \tau_K = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1' R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T_1' = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Η εξίσωση (2) αναφέρεται στην επιτάχυνση του κέντρου μάζας  $K$  του δίσκου, αλλά αφού οι δυνάμεις είναι κατακόρυφες, κατακόρυφη θα είναι και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Όμως αφού το πρώτο νήμα δεν παρουσιάζει ελαστικότητα, ο δίσκος δεν μπορεί να επιταχυνθεί κατακόρυφα και  $a_{cm}=0$ , οπότε η (2) γίνεται:

$$Mg + T_1' - T_2 = 0 \quad (2^a)$$

Εξάλλου, αφού το δεύτερο νήμα είναι αβαρές  $T_1 = T_1'$ , ενώ όλα τα σημεία του νήματος αποκτούν την ίδια επιτάχυνση, συνεπώς  $a_1 = a_\Gamma = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ , όπου  $a_\Gamma$  η επιτάχυνση του σημείου  $\Gamma$ , εξαιτίας της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης του δίσκου, η λεγόμενη και επιτρόχια επιτάχυνση του  $\Gamma$ . Να σημειωθεί ότι τη στιγμή αυτή  $\omega=0$ , οπότε το σημείο  $\Gamma$  δεν έχει κεντρομόλο επιτάχυνση. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3) γίνεται:



$$\left. \begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 \cdot a_1 \\ T_1 &= \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} M \cdot a_1 \end{aligned} \right\} + m_1 g = (m_1 + \frac{1}{2} M) \cdot a_1 \rightarrow$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{M}{2}} = \frac{1 \cdot 10}{1 + \frac{6}{2}} m / s^2 = 2,5 m / s^2.$$

ii) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$m_1 g - T_1 = m_1 \cdot a_1 \rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 \cdot a_1 = 1 \cdot 10 N - 1 \cdot 2,5 N = 7,5 N.$$

και επανερχόμενοι στην εξίσωση (2<sup>α</sup>) βρίσκουμε:

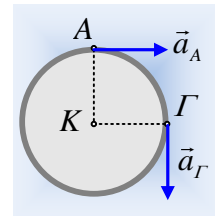
$$Mg + T_1' - T_2 = 0 \rightarrow T_2 = Mg + T_1 = 6 \cdot 10 N + 7,5 N = 67,5 N.$$

iii) Από την (3) εξίσωση και αφού  $T_1' = T_1$  παίρνουμε:

$$T_1' = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T_1}{MR} = \frac{2 \cdot 7,5}{6 \cdot 0,5} rad / s^2 = 5 rad / s^2.$$

iv) Με βάση τα παραπάνω τα σημεία Α και Γ εκτελούν επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο Κ του δίσκου. Δεν έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση, αφού τη στιγμή  $t=0$  η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδενική, έχουν όμως επιτρόχια επιτάχυνση:

$$\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = 2,5 m / s^2$$



ίση κατά μέτρο και με την επιτάχυνση του σώματος Σ, όπως υπολογίστηκε στο i) ερώτημα, με διεύθυνση εφαπτόμενη στο δίσκο, οριζόντια για το Α και κατακόρυφη για το σημείο Γ, όπως στο διπλανό σχήμα.

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)