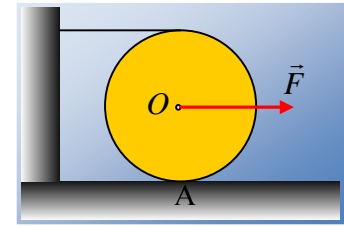


Ο τροχός και το τυλιγμένο νήμα.

Ο τροχός του σχήματος, μάζας 20kg και ακτίνας $R=0,4m$, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές με μη εκτατό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο σε τέτοια θέση, ώστε το νήμα να είναι οριζόντιο.

Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο κέντρο του τροχού μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F=12N$.

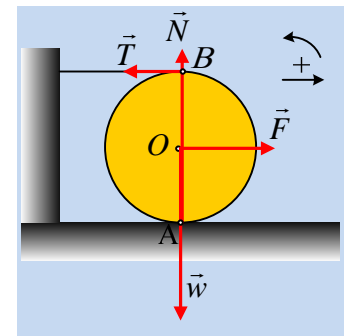


- i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού καθώς και η γωνιακή του επιτάχυνση.
- ii) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση των σημείων επαφής του τροχού με το έδαφος (στην εικόνα του σημείου A) τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.
- iii) Αν το επίπεδο δεν ήταν λείο, αλλά ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και εδάφους ήταν $\mu=0,2$, να βρεθεί η τάση του νήματος μετά την εξάσκηση της δύναμης F .

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του που περνά από το O $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό, όπου T, η τάση του νήματος. Θεωρώντας την κίνηση του τροχού μια μεταφορά και μια στροφή, οπότε με βάση τις ασκούμενες δυνάμεις, βλέπουμε ότι, ο τροχός θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά ενώ θα περιστραφεί αντίθετα από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow F - T = M \cdot a_{cm} \quad (1)$

Στροφοική κίνηση: $\Sigma \tau = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$

Αλλά τότε το σημείο B, θα έχει μια ταχύτητα v_{cm} με φορά προς τα δεξιά, ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, λόγω μεταφοράς και μια $v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R$, με φορά προς τα αριστερά, λόγω της κυκλικής κίνησης που οφείλεται στην περιστροφή του τροχού, όπως στο σχήμα.

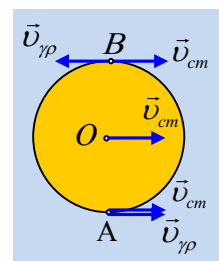
Όμως το σημείο B έχει ταχύτητα όση και κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς μηδενική, από όπου $v_{cm} = v_{\gamma\rho} = \omega \cdot R$. Αλλά τότε:

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3)$$

Έτσι η σχέση (2) γίνεται $T = \frac{1}{2} M \cdot a_{cm} \quad (2^a)$

Με πρόσθεση των (1) και (2^a) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2} M a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{3M} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 20} m/s^2 = 0,4 m/s^2.$$



$$\text{Και από την σχέση (3): } a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{0,4}{0,4} \text{ rad/s}^2 = 1 \text{ rad/s}^2$$

- ii) Τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$ ο άξονας του τροχού έχει ταχύτητα $v_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t_1=0,4\cdot 2\text{m/s}=0,8\text{m/s}$, ενώ ο τροχός στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1=2\text{rad/s}$.

Αλλά τότε το σημείο A:

- A) εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης έχει επιτάχυνση μέτρου:

$$a_{cm}=0,4\text{m/s}^2.$$

- B) εξαιτίας της επιταχυνόμενης κυκλικής κίνησης παρουσιάζει:

- 1) Επιτρόχια επιτάχυνση (ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής του ταχύτητας) μέτρου

$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d(\omega R)}{dt} = a_{\gamma\omega\nu} R = 0,4\text{m/s}^2$$

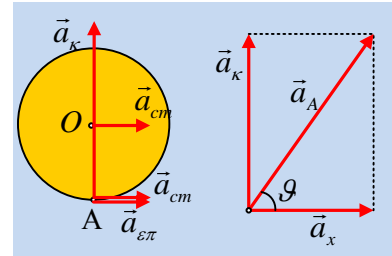
- 2) Κεντρομόλο επιτάχυνση οφειλόμενη στην κυκλική του κίνηση μέτρου:

$$a_{\kappa}=\omega^2\cdot R= 2^2\cdot 0,4\text{m/s}^2=1,6\text{m/s}^2.$$

Οπότε για τη συνολική του επιτάχυνση έχουμε:

$$a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(0,4+0,4)^2 + 1,6^2} \text{ m/s}^2 = 0,8\sqrt{5}\text{m/s}^2$$

Η οποία σχηματίζει με το έδαφος γωνία θ , όπου $\varepsilon\phi\theta = \frac{a_y}{a_x} = 2$.



- iii) Στην περίπτωση που ο τροχός εμφάνιζε τριβή με το έδαφος, εστιάζουμε τι πρόκειται να κάνει το σημείο A, με βάση τις άλλες δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Εξαιτίας της άσκησης της δύναμης F ο τροχός θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση προς τα δεξιά, ενώ εξαιτίας της στροφικής κίνησης, τείνει να αποκτήσει γραμμική ταχύτητα επίσης προς τα δεξιά. Αλλά τότε η ασκούμενη τριβή έχει φορά προς τα αριστερά όπως στο σχήμα. Το ερώτημα βέβαια που ανακύπτει είναι, τι θα κάνει ο τροχός; Αν κινηθεί όπως παραπάνω, τότε το σημείο A έχει ταχύτητα, συνεπώς η τριβή θα είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο:

$$T_{ολ}=\mu\cdot N=\mu\cdot Mg=0,2\cdot 20\cdot 10\text{N}=40\text{N}$$

Όταν η δύναμη που ασκούμε για να κινήσουμε τον τροχό, είναι μόνο 12N!!! Συνεπώς ο τροχός δεν θα κινηθεί αλλά θα ισορροπεί. Αλλά τότε από τη συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-T-T_\rho=0 \quad (1)$$

$$\text{Και } \Sigma \tau_o=0 \rightarrow T\cdot R-T_\rho\cdot R=0 \rightarrow T=T_\rho \quad (2)$$

Από (1) και (2) βρίσκουμε:

$$F=2T \rightarrow T= \frac{1}{2} F= 6\text{N}$$

