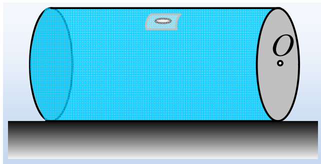
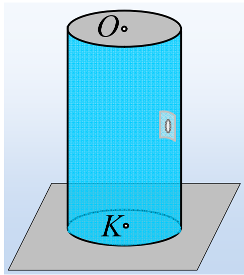
Μια τρύπα στο κυλινδρικό δοχείο…



Διαθέτουμε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης R=0,1m και ύψος H=0,4m, σε οριζόντιο επίπεδο. Στο μέσον της απόστασης των δύο βάσεων υπάρχει μια μικρή οριζόντια τρύπα ακτίνας r=0,2cm, μέσω της οποίας γεμίζουμε πλήρως, μέχρι υπερχείλισης, το δοχείο με νερό. Στη συνέχεια καλύπτουμε την τρύπα με μια μεμβράνη κουζίνας.



i) Να βρεθεί η πίεση σε σημείο Α της τρύπας, στο κάτω μέρος της μεμβράνης, καθώς και στο κέντρο Ο της μιας βάσης του δοχείου.

Ανασηκώνουμε το δοχείο, στηρίζοντάς το στη μια βάση του, όπως στο δεύτερο σχήμα.

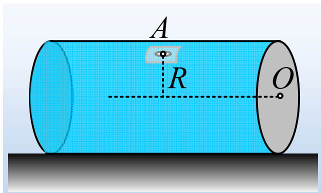
ii) Θα συνεχίσει η μεμβράνη να καλύπτει την τρύπα ή το νερό θα αρχίσει να ρέει, συμπαρασύροντας και την μεμβράνη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

iii) Αφού υπολογίστε τις πιέσεις στα κέντρα Ο και Κ των δύο βάσεων, να υπολογίσετε τις δυνάμεις που το νερό ασκεί στις βάσεις του δοχείου.

iv) Ανοίγουμε μια μικρή τρύπα στο κέντρο Ο της πάνω βάσης. Να υπολογίσετε την αρχική παροχή με την οποία εκρέει το νερό από το δοχείο, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη και στρωτή ροή.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό, πυκνότητας $\rho=1g/cm^3$, ενώ δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5Pa$.

Απάντηση:



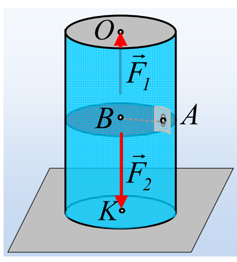
i) Το σημείο Α, είναι σημείο του υγρού που έρχεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα (η παρουσία της μεμβράνης δεν συνοδεύεται με άσκηση δύναμης), συνεπώς η πίεση στο σημείο Α είναι ίση με την ατμοσφαιρική, $p_A=p_{ατ}=10^5$ Pa.

Η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Α και Ο είναι:

$$P_o - p_A=\rho g y \rightarrow p_o=p_A+\rho gR=10^5\ \text{Pa}+1\frac{10^{-3}\,kg}{10^{-6}\,m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}1m = 1{,}01\cdot 10^5\ Pa$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε, εφαρμόζοντας την αρχή του Pascal:

$$p_o=p_{εξ}+\rho gy=p_{ατ}+\rho gR.$$



ii) Η μεμβράνη θα παραμείνει στη θέση της και το νερό δεν θα χυθεί. Η πίεση στο σημείο Α συνεχίζει να είναι ίση με $p_{ατ}$, όπως ίδια τιμή έχει και σε κάθε σημείο του νερού, που βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Να σημειωθεί ότι σε κάθε σημείο πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α η πίεση έχει μικρότερη τιμή. Δεν υπάρχει δηλαδή η απαραίτητη διαφορά πίεσης που να θέσει σε κίνηση του νερό*.

iii) Για τις πιέσεις στα κέντρα των βάσεων Ο και Κ έχουμε:

$$p_B\text{-}p_o=\rho gy \rightarrow p_o=p_B\text{-}\rho g\ \ ½\ h=10^5\ Pa\text{-}10^3\ 10\ \ ½\ \ 0{,}4Pa=0{,}98\ 10^5Pa.$$

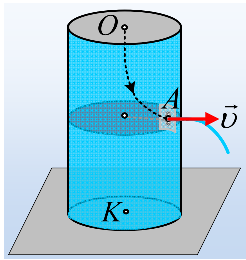
$$p_K\text{-}p_B=\rho gy \rightarrow p_K=p_B+\rho g\ \ ½\ h=10^5\ Pa+10^3\ 10\ \ ½\ \ 0{,}4Pa=1{,}02\ 10^5Pa.$$

Αλλά τότε οι δυνάμεις που δέχονται οι δύο βάσεις από το νερό έχουν μέτρα:

Πάνω βάση: $F_1=p_o\,A=p_o\,\pi r^2=0{,}98\ 10^5\ 3{,}14\ (0{,}1)^2N=3.077N$

Κάτω βάση: $F_2=p_K\,A=p_K\,\pi r^2=1{,}02\ 10^5\ 3{,}14\ (0{,}1)^2N=3.203N$

iv) Μόλις ανοίξουμε τρύπα στην πάνω βάση, δημιουργείται διαφορά πίεσης μεταξύ του Ο και του Α, με αποτέλεσμα το νερό να επιταχύνεται και να εκρέει από την τρύπα στο Α. Παίρνοντας την εξίσωση Bernoulli για τα σημεία Ο και Α, τα οποία βρίσκοντας σε μια ρευματική γραμμή, όπως στο σχήμα, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη και στρωτή ροή, έχουμε:



$$p_o+\rho gy+\frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2=p_A+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

Όπου y η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τους y= ½ h και $p_o=p_A=p_{\alpha\tau}$.

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας $A_\beta\ \upsilon_o=A_A\ \upsilon$ και επειδή $A_\beta=\pi R^2$, ενώ $A_A=\pi r^2$, έχουμε:

$$\frac{A_\beta}{A_A}=\frac{\upsilon}{\upsilon_o}=\left(\frac{R}{r}\right)^2=\left(\frac{10cm}{0{,}2cm}\right)^2=2.500$$

Οπότε αφού η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται η πάνω επιφάνεια του νερού, είναι 2.500 φορές μικρότερη από την ταχύτητα εκροής. μπορούμε να την θεωρήσουμε σχεδόν μηδενική, γράφοντας:

$$p_{\alpha\tau}+\rho g\cdot\frac{1}{2}y=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{2gy}=\sqrt{gh}=\sqrt{10\cdot 0{,}4}m/s=2m/s$$

Αλλά τότε η ζητούμενη παροχή είναι ίση:

$$\Pi=A\cdot\upsilon=\pi r^2\cdot\upsilon=3{,}14\cdot\left(0{,}2\cdot 10^{-2}\right)^2\cdot 2\ m^3/s=25{,}1\cdot 10^{-6}\,m^3/s\ \text{ ή}$$

$$\Pi=25{,}1\,cm^3/s$$

Σχόλια.

1) Μόλις ανοίξουμε την τρύπα στην πάνω βάση, αρχίζει το νερό να επιταχύνεται, μέχρι να αποκτήσει την παραπάνω ταχύτητα 2m/s. Για κάποιο μικρό διάστημα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη ροή αυτή μόνιμη και να εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli, αγνοώντας το άδειασμα του δοχείου και το κατέβασμα της στάθμης του νερού.

2) *Θα μπορούσε να έχουμε ροή νερού μόλις τοποθετούσαμε όρθιο το δοχείο; Ναι, αν το ύψος του νερού,

πάνω από το σημείο Α ήταν τέτοιο ώστε η «υδροστατική πίεση», η πίεση δηλαδή που οφείλεται στο βάρος του νερού, είχε τιμή μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι για ύψος $y>10m$ θ είχαμε για την διαφορά πίεσης μεταξύ Α και Ο θα ήταν $p'_A-p_O=\rho g y$ και παίρνοντας $p_O=0$, $p'_A=\rho g y>1Atm$, οπότε στην εσωτερική πλευρά της μεμβράνης θα είχαμε πίεση μεγαλύτερη από ότι στην εξωτερική της πλευρά και η μεμβράνη θα απομακρυνόταν, ακολουθούμενη από εκροή του νερού.

dmargaris@gmail.com