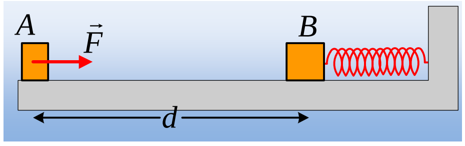
Μια κρούση και οι τριβές.

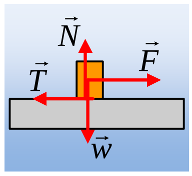
Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα Α και Β με μάζες m=1kg και M=3kg αντίστοιχα, τα οποία απέχουν απόσταση d=4,75m. Το Β είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=240N/m, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του. Σε μια στιγμή, ασκούμε στο Α σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=10N, με κατεύθυνση προς το σώμα Β, για χρονικό διάστημα 2s (η δύναμη παύει στη συνέχεια), οπότε το σώμα αποκτά ταχύτητα v=4m/s. Τα δυο σώματα συγκρούονται μετά από λίγο μετωπικά, με αποτέλεσμα να προκληθεί συσπείρωση του ελατηρίου ίση με 0,05m, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του Β σώματος. Αν τα σώματα εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης και $g=10m/s^2$, να βρεθούν:



i) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου.
ii) Η ταχύτητα του σώματος Α, ελάχιστα πριν την κρούση.
iii) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, που μεταφέρεται στο Β σώμα κατά την κρούση. Είναι η παραπάνω κρούση ελαστική ή όχι;
iv) Η τελική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, όταν σταματήσει η κίνησή τους.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Αφού οι οριζόντιες δυνάμεις (F,T) είναι σταθερές, το σώμα αποκτά και σταθερή επιτάχυνση:



$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha \rightarrow F - T = m\cdot\alpha$$

Ενώ $\Sigma F_y=0$, αφού το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε N=mg και η εξίσωση γίνεται:

$$F-\mu mg = m\cdot\alpha \quad (1)$$

Αλλά τότε η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία:

$$\upsilon=\alpha\cdot t \quad \text{και } \Delta x = ½\, \alpha\cdot t^2 \rightarrow$$

$$a = \frac{\upsilon}{t} = \frac{v}{t} = \frac{4}{2} m/s^2 = 2m/s^2$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{10N - 1\cdot 2N}{1\cdot 10N} = 0{,}8$$

Ενώ $\Delta x = x_1 = ½\ 2\cdot 2^2 m = 4m$.

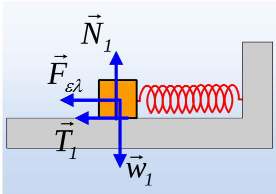
ii) Εφαρμόζουμε για το σώμα Α το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, από τη θέση x_1=4m, μέχρι x_2=4,75m (ελάχιστα πριν την κρούση) και παίρνουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N + W_T \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 + 0 - \mu mg \cdot \Delta x \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu g \cdot \Delta x} = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 0{,}8 \cdot 10 \cdot 0{,}75} m/s = 2m/s$$

iii) Μετά την κρούση το σώμα Β αποκτά ταχύτητα υ₂΄ και κινείται συσπειρώνοντας το ελατήριο. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη διάρκεια της κίνησή του. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σώμα, μέχρι τη θέση της μέγιστης συσπείρωσης.



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w1} + W_{N1} + W_{T1} + W_{F_{ελ}} \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 = 0 + 0 - \mu Mg \cdot \Delta\ell + \left(U_{αρχ/ελ} - U_{τελ/ελ}\right)$$

Όπου υ_2' η ταχύτητά του αμέσως μετά την κρίση, ενώ επειδή η δύναμη του ελατηρίου, είναι συντηρητική δύναμη, το έργο της συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου με τη σχέση:

$$W_{F_{ελ}} = U_{αρχ/ελ} - U_{τελ/ελ} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = -\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2' = \sqrt{\frac{k}{M}(\Delta\ell)^2 + 2\mu g \cdot \Delta\ell} = \sqrt{\frac{240}{3}0{,}05^2 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 10 \cdot 0{,}05} m/s = 1m/s$$

Οπότε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, που μεταφέρεται στο σώμα Β, είναι:

$$\pi = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}100\% = \frac{3 \cdot 1^2}{1 \cdot 2^2}100\% = 75\%$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \rightarrow$$

$$m\upsilon_1 = m\upsilon_1' + M\upsilon_2' \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - \frac{M}{m}\upsilon_2' = 2m/s - \frac{3}{1}1m/s = -1m/s$$

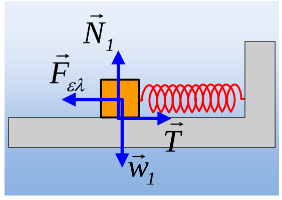
Για τις κινητικές ενέργειες έχουμε:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 2^2 J = 2J \text{ και}$$

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 1^2 J + \frac{1}{2}3 \cdot 1^2 J = 2J$$

Βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται εξαιτίας της κρούσης, συνεπώς η κρούση είναι ελαστική.

iv) Μόλις μηδενιστεί η ταχύτητα του Β σώματος, πάνω του ασκούνται οι δυνάμεις του διπλανού σχήματος, όπου αφού η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα αριστερά, με αποτέλεσμα η τριβή, να κατευθύνεται προς τα δεξιά.

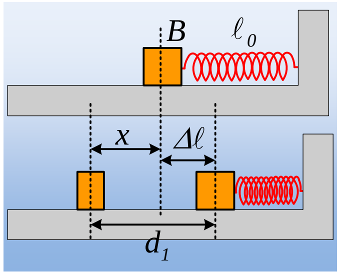


Στη θέση αυτή $F_{ελ}=k\cdot \Delta\ell = 240\cdot 0,05N = 12N$, ενώ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που μπορεί να εμφανιστεί, η οριακή τριβή, έχει μέτρο:

$$T_{ορ}=\mu_s N_1=\mu_s\cdot Mg=0,8\cdot 3\cdot 10N=24N.$$

Αλλά τότε η ασκούμενη τριβή είναι στατική μέτρου Τ=12Ν και το σώμα ισορροπεί, χωρίς να κινηθεί πια.

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. εξάλλου για την κίνηση προς τα αριστερά του Α σώματος, μέχρι να σταματήσει, παίρνουμε:



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N + W_T \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 = 0 + 0 - \mu mg\cdot x \rightarrow$$

$$x = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = \frac{1^2}{2\cdot 0,8\cdot 10}m = 0,0625m = 6,25cm$$

Οπότε η τελική απόσταση των δύο σωμάτων είναι:

$$d_1=|x|+|\Delta\ell| = 6,25cm + 5cm = 11,25cm$$

dmargaris@gmail.com