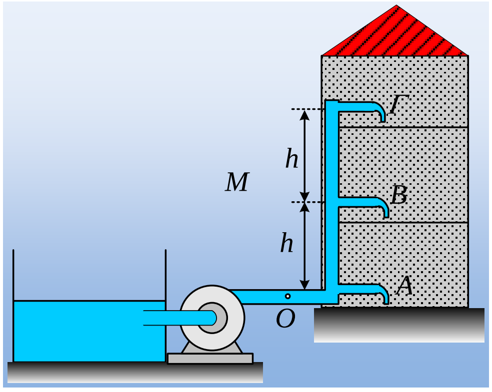
Μια αντλία τροφοδοτεί με νερό μια κατοικία.



Μια τριώροφη κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (Μ), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει διατομή A_1=3cm^2, οι τρεις οριζόντιες διακλαδώσεις A_2=1cm^2, ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται από διατομές A=0,3cm^2. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ κάθε όροφος έχει ύψος h=4m. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση p=2atm.

i) Με κλειστές τις βρύσες, να υπολογιστεί η πίεση του νερού σε κάθε βρύση.

ii) Ανοίγουμε πλήρως την βρύση του πρώτου ορόφου. Θεωρώντας ότι η ροή πραγματοποιείται χωρίς τριβές και είναι μόνιμη και στρωτή, να υπολογιστούν:

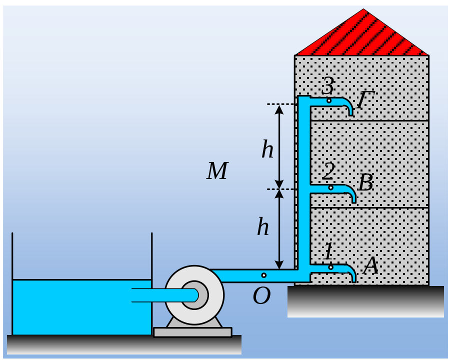
α) Η παροχή της βρύσης.

β) Η πίεση στους τρεις οριζόντιους σωλήνες.

γ) Η ισχύς της αντλίας.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=1atm=10^{5}N/m^2, η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2, ενώ το κατακόρυφο μήκος κάθε βρύσης θεωρείται αμελητέο.

Απάντηση:



i) Αν οι βρύσες είναι κλειστές, το νερό που περιέχεται στους σωλήνες ισορροπεί, οπότε για τις πιέσεις, στο εσωτερικό κάθε βρύσης (σημεία Α, Β και Γ, αλλά και σημεία 1,2 και 3 έχουμε:

$p_1=p_A= p_O=2atm=2\cdot 10^5 N/m^2$.

$p_o-p_2=\rho gh \rightarrow p_B= p_2=p_o-\rho gh \rightarrow$

$p_2=2\cdot 10^5 N/m^2-10^3\cdot 10\cdot 4N/m^2=1{,}6\cdot 10^5 N/m^2$.

$p_o-p_3=\rho g\cdot 2h \rightarrow p_\Gamma= p_3=p_o-2\rho gh \rightarrow$

$p_3=2\cdot 10^5 N/m^2-2\cdot 10^3\cdot 10\cdot 4N/m^2=1{,}2\cdot 10^5 N/m^2$.

ii) Μόλις ανοίξουμε τη βρύση Β, του πρώτου ορόφου, το νερό εξέρχεται με ταχύτητα υ. Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής του σωλήνα στο σημείο Ο και της διατομής της βρύσης, παίρνουμε:

$$A_o\cdot \upsilon_o=A\cdot \upsilon \rightarrow \upsilon_o=\frac{A}{A_o}\upsilon=\frac{0{,}3cm^2}{3cm^2}\upsilon=0{,}1\upsilon$$

α) Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και της ανοικτής βρύσης Β, παίρνουμε:

$$p_o+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2+\rho gh\rightarrow$$

$$2p_B+\frac{1}{2}\rho(0{,}1\upsilon)^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho gh\rightarrow$$

$$p_B-\rho gh=\frac{1}{2}\rho\upsilon^2(1-0{,}01)\approx\frac{1}{2}\rho\upsilon^2\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{2p_B}{\rho}-2gh}=\sqrt{\frac{2\cdot10^5}{10^3}-2\cdot10\cdot4m/s}=\sqrt{120}m/s\approx11m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης είναι:

$$\Pi_2=A\cdot\upsilon=0{,}3\cdot10^{-4}m^2\cdot11m/s=3{,}3\cdot10^{-4}m^2=0{,}33L/s$$

β) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών στο σημείο 2 και την έξοδο της βρύσης Β έχουμε:

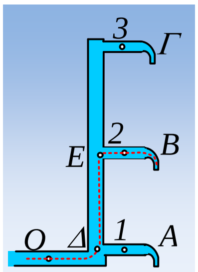
$$A_2\cdot\upsilon_2=A\cdot\upsilon\rightarrow\upsilon_2=\frac{A}{A_2}\upsilon=\frac{0{,}3cm^2}{1cm^2}11m/s=3{,}3m/s$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου 2 και ενός σημείου στο άνοιγμα της βρύσης Β, παίρνουμε:

$$p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2$$

$$p_2=p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2-\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2=p_B+\frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_B^2-\upsilon_2^2\right)$$

$$p_2=10^5N/m^2+\frac{1}{2}1.000\cdot\left(11^2-3{,}3^2\right)N/m^2=1{,}55\cdot10^5N/m^2.$$



Εξάλλου από την εξίσωση Bernoulli έχουμε:

$$p_o+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2=p_\Delta+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2\rightarrow p_o=p_\Delta$$

$$p_o+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2=p_E+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2+\rho gh\rightarrow p_E=p_o-\rho gh$$

Αλλά από την ισορροπία του νερού στο σωλήνα Α, έχουμε:

$$p_A=p_1=p_\Delta=p_o=2\cdot10^5N/m^2.$$

Ενώ από την αντίστοιχη ισορροπία της στήλης πάνω από το Ε:

$$p_E-p_\Gamma=\rho gh\rightarrow p_\Gamma=p_E-\rho gh \text{ ή}$$

$$p_3=p_\Gamma=p_o-2\rho gh=2\cdot10^5N/m^2-2\cdot10^3\cdot10\cdot4N/m^2=1{,}2\cdot10^5N/m^2.$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι το άνοιγμα της βρύσης του πρώτου ορόφου, δεν μεταβάλει την πίεση στις άλλες δυο κλειστές βρύσες.

γ) Η ισχύς της αντλίας, ίση με το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας στο νερό μέσω έργου, θα είναι ίση με την ενέργεια, ανά μονάδα χρόνου, που θα εμφανιστεί με τη μορφή της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του νερού στην Β βρύση:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta m\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\Delta m\cdot \upsilon^2}{\Delta t}=\frac{\rho\Delta V\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\rho\Delta V\cdot \upsilon^2}{\Delta t}\rightarrow$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Pi\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\ \rightarrow$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=3{,}3\cdot 10^{-4}\left(10^3\cdot 10\cdot 4+\frac{1}{2}10^3(\sqrt{120})^2\right)J/s=33J/s$$

Αλλά τότε η ισχύς της αντλίας είναι P=33W.

Εναλλακτικά: Η ισχύς της γεννήτριας, είναι ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο πάνω στη στήλη του νερού. Αλλά:

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{(p_o-p_{\alpha\tau})\Delta V}{\Delta t}=(p_o-p_{\alpha\tau})\cdot\Pi_2\quad(3)$$

$$P=(p_o-p_{\alpha\tau})\cdot\Pi_2=(2-1)10^5\cdot 3{,}3\cdot 10^{-4}W=33W$$

dmargaris@gmail.com