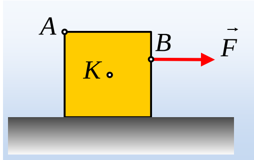
Μια «όρθια» τετράγωνη πλάκα σε οριζόντιο επίπεδο.



Μια επίπεδη τετράγωνη ομογενής πλάκα ακμής α=0,4m και βάρους w=200N ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s$= 0,4. Σε μια στιγμή δέχεται οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα, ασκούμενη σε σημείο Β, το οποίο απέχει κατά h=0,3m από το επίπεδο.

Α) Αν F=50N, τότε:

i) Η τριβή που ασκείται στον κύβο έχει μέτρο T=μ·w=80N.

ii) Η ροπή του βάρους ως προς την κορυφή Α είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα στο σχήμα.

iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

iv) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

v) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

Β) Αν η πλάκα σύρεται με σταθερή ταχύτητα υ=1m/s, με την επίδραση της δύναμης F τότε:

i) Το μέτρο της δύναμης F, είναι ίσο με 80N.

ii) Η ροπή της δύναμης F ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι οριζόντια με μέτρο τ_F=8N·m.

iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

iv) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς την κορυφή Α έχει μέτρο τ_N= ½ w·α.

v) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

Γ) Στην αρχικά ακίνητη πλάκα ασκούμε τη δύναμη F με μέτρο F=100N, τότε:

i) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

ii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

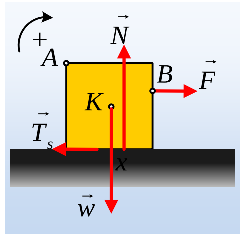
Α) Η μέγιστη τιμή της τριβής η οποία μπορεί να ασκηθεί στο σώμα, η οριακή τριβή, έχει μέτρο $T_{ορ}=T_{ολ}=\mu_s \cdot N = \mu_s \cdot w$=80N. Από τη στιγμή που η δύναμη F έχει μικρότερο μέτρο (F=50N), η τριβή θα είναι στατική και το σώμα δεν θα κινηθεί. Αλλά τότε από την ισορροπία της πλάκας παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-T_s=0 \rightarrow T_s=F=50N,\quad \Sigma F_y=0 \rightarrow N-w=0 \rightarrow N=w=200N \text{ και}$$

$$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow \tau_w+\tau_N+\tau_F+\tau_{Ts}=0$$

Και παίρνοντας τις δεξιόστροφες ροπές ως θετικές, έχουμε:

$$w\cdot 0+\tau_N-F\cdot y-T_s\cdot \tfrac{1}{2}\alpha=0 \rightarrow \tau_N=F\cdot y+ \tfrac{1}{2} T_s\cdot\alpha=50N\cdot 0{,}1N\cdot m+ \tfrac{1}{2}\, 50N\cdot 0{,}2N\cdot m=10N\cdot m.$$



Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι η κάθετη αντίδραση του επιπέδου (η δύναμη στήριξης) δεν περνάει από το κέντρο Κ της πλάκας, αλλά ο φορέας της απέχει κατά x από το Κ, όπου:

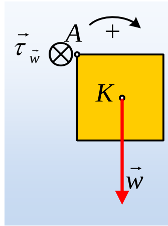
$$\tau_N = N \cdot x \rightarrow \quad x = \frac{\tau_N}{N} = \frac{10}{200} m = 0{,}05\, m$$

όπως στο διπλανό σχήμα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, έχουμε:

i) Η τριβή που ασκείται στον κύβο έχει μέτρο $T=\mu \cdot w=80N$. (Λ)

ii) Η ροπή του βάρους ως προς την κορυφή Α είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα στο σχήμα. (Σ)



Αφού η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το σημείο Α και ο φορέας τους βάρους, το οποίο είναι το κατακόρυφο επίπεδο, το επίπεδο της πλάκας. Εξάλλου η ροπή αυτή, με βάση τη σύμβαση που πήραμε είναι θετική, δηλαδή έχει φορά προς το μέσα μέρος της σελίδας.

iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. **(Σ)**

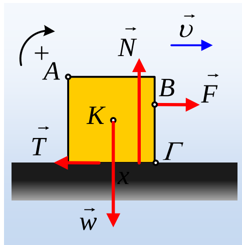
iv) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική. **(Σ)**

Από τη στιγμή που η πλάκα ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται πάνω της είναι ίσο με μηδέν, ως προς οποιοδήποτε σημείο.

v) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. **(Λ).**

Η δικαιολόγηση παραπάνω.

Β) Σχεδιάζουμε ξανά τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα.



i) Το μέτρο της δύναμης F, είναι ίσο με 80Ν. **(Σ)**

Η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, συνεπώς και πάλι ΣF=0, ή $\Sigma F_x=0 \rightarrow F=T_{ολ}=80N$.

ii) Η ροπή της δύναμης F ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι οριζόντια με μέτρο $\tau_F=8N\cdot m$. **(Σ)**

Η ροπή είναι οριζόντια με μέτρο $\tau\alpha_F=F\cdot y=80N\cdot 0{,}1m=8N\cdot m$, όπου y η απόσταση του Κ από τον φορέα της δύναμης, δηλαδή $y=h-½\, \alpha=0{,}1m$.

iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. **(Σ)**

Αν υπήρχε ροπή ως προς το Κ, η πλάκα θα άρχιζε να περιστρέφεται, αποκτώντας γωνιακή επιτάχυνση. Μήπως όμως αυτό πράγματι συμβαίνει; Ας υπολογίσουμε ξανά την απόσταση x του φορέα της Ν, από το κέντρο Κ:

$$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow \tau_w+\tau_N+\tau_F+\tau_{Ts}=0$$

$$0-N\cdot x+F\cdot y+T\cdot ½\, \alpha=0 \rightarrow x = \frac{2F\cdot y + T\cdot a}{2N} = \frac{2\cdot 80\cdot 0{,}1 + 80\cdot 0{,}4}{2\cdot 200} m = 0{,}12\, m$$

Δηλαδή ο φορέας της N περνάει από τη βάση στήριξης απέχοντας 0,12m από το μέσον της. Η πλάκα κινδύνευε να ανατραπεί, συνεπώς να αρχίσει να περιστρέφεται, όταν ο φορέας της N φτάσει στην κορυφή Γ, πράγμα που σημαίνει, ότι η πλάκα έρχεται σε επαφή με το επίπεδο, μόνο με ένα!!! της σημείο.

iv) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς την κορυφή Α έχει μέτρο $\tau_N= ½\ w \cdot α$. **(Λ)**

Για την ροπή της N ως προς το Α έχουμε:

$$\tau_A=-N\cdot(½\ α+x)= -200\cdot(0,2+0,12)N\cdot m=-64N\cdot m.$$

v) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

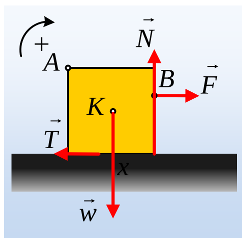
Ας το υπολογίσουμε:

$$\Sigma\tau_A=w\cdot ½\ α-N\cdot(½\ α+x) -F\cdot(½\ α-y)+T\cdot α\rightarrow$$

$$\Sigma\tau_A=200\cdot 0,2N\cdot m-200\cdot(0,2+0,12)N\cdot m-80\cdot 0,1N\cdot m+80\cdot 0,4N\cdot m=0 \quad \textbf{(Σ)}$$

Σχόλιο:

Το ότι η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας σημαίνει ότι ισορροπεί, συνεπώς η κατάσταση, όσον αφορά δυνάμεις και ροπές δεν αλλάζει, σε σχέση με το να παρέμενε ακίνητη. Έτσι το συμπέρασμα της ερώτησης Α iv) ισχύει και εδώ.



Γ) Όταν η δύναμη πάρει τιμή μεγαλύτερη από την οριακή τριβή (F>80N) η πλάκα θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά και δεν θα ισορροπεί πια.

i) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

Αυτό εξαρτάται από το αν η πλάκα ανατρέπεται (αν τεθεί και σε περιστροφή) ή όχι. Ας υποθέσουμε ότι η πλάκα ανατρέπεται, στρεφόμενη γύρω από το Γ με θετική φορά (όπως δεχτήκαμε παραπάνω, δεξιόστροφα). Στην περίπτωση αυτή η κάθετη αντίδραση περνά από την κορυφή Γ και έχουμε:

$$\Sigma\tau_K= \tau_w+\tau_N+\tau_F+\tau_{Ts}=0-N\cdot ½\ α+F\cdot y+Tα\cdot ½\ α \rightarrow$$

$$\Sigma\tau_K=-200\cdot 0,2N\cdot m+100\cdot 0,1N\cdot m+80\cdot 0,2N\cdot m=-14N\cdot m. \quad \text{Άτοπο!}$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ανατρέπεται η πλάκα δεν ήταν σωστή. Η πλάκα εκτελεί μόνο μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε $\Sigma\tau_K=0$. **(Σ)**

ii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

Ερχόμαστε ξανά στην συνθήκη $\Sigma\tau_K=0 \rightarrow$

$$\tau_w+\tau_N+\tau_F+\tau_{Ts}=0 \rightarrow 0-N\cdot x'+F\cdot y+Tα\cdot ½\ α \rightarrow$$

$$x'=\frac{2F\cdot y+T\cdot a}{2N}=\frac{2\cdot 100\cdot 0,1+80\cdot 0,4}{2\cdot 200}m=0,13\,m$$

Οπότε ως προς την κορυφή Α έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = w\cdot \tfrac{1}{2}\alpha - N\cdot(\tfrac{1}{2}\alpha + x') - F\cdot(\tfrac{1}{2}\alpha - y) + T\cdot\alpha \rightarrow$$

$$\Sigma\tau_A = 200\cdot 0{,}2N\cdot m - 200\cdot(0{,}2+0{,}13)N\cdot m - 100\cdot 0{,}1N\cdot m + 80\cdot 0{,}4N\cdot m = 10N\cdot m \quad \textbf{(Λ)}$$

Συμπέρασμα:

Όταν ένα στερεό εκτελεί μόνο μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς να περιστρέφεται, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών, όλων των δυνάμεων που δέχεται, είναι ίσο με το μηδέν **ΜΟΝΟ** ως προς το κέντρο μάζας και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

dmargaris@gmail.com