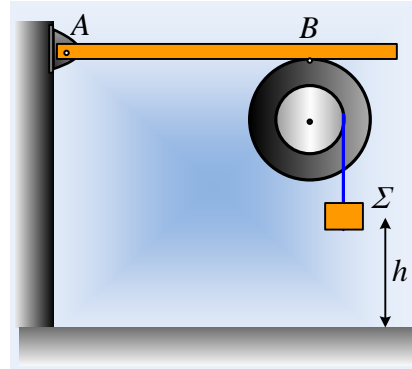


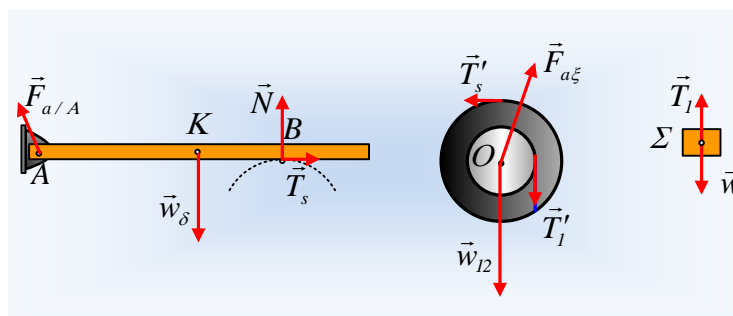
### Ισορροπία, πτώση και μήκος νήματος.

Δύο ομόκεντροι ομογενείς δίσκοι με ακτίνες  $R_1=0,2\text{m}$  και  $R_2=0,3\text{m}$  είναι κολλημένοι δημιουργώντας ένα στερεό  $s$ . Το στερεό  $s$  μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος έχει στερεωθεί σε κατακόρυφο τοίχο και διέρχεται από τα κέντρα των δίσκων, ως προς τον οποίο, το στερεό  $s$  παρουσιάζει ροπή αδράνειας  $I=0,24\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Πάνω στον μεγάλο δίσκο στηρίζεται μια ομογενής οριζόντια λεπτή δοκός μήκους  $4\text{m}$ , η οποία είναι αρθρωμένη στο άκρο της  $A$ , μάζας  $M=3\text{kg}$ . Η δοκός στηρίζεται στο σημείο  $B$ , όπου  $(AB)=3\text{m}$ . Γύρω από τον μικρό δίσκο ακτίνας  $R_1$ , τυλίγουμε ένα μακρύ αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα  $\Sigma$ , το οποίο απέχει  $h=0,5\text{m}$  από το έδαφος.



- i) Αν η μάζα του σώματος  $\Sigma$  είναι  $m=1,5\text{kg}$ , αυτό ισορροπεί. Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δίσκου, για την ισορροπία αυτή;
  - ii) Αν το σώμα  $\Sigma$  έχει μάζα  $m=2\text{kg}$ , τότε κινείται προς τα κάτω, φτάνοντας στο έδαφος με ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$ , όπου και προσκολλάται.
    - a) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση με την οποία κινήθηκε το σώμα  $\Sigma$ .
    - β) Να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στη δοκό από τον δίσκο κατά την πτώση του σώματος  $\Sigma$ , καθώς και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ δοκού και δίσκου.
    - γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού  $s$ , μέχρι τη στιγμή  $t'=2\text{s}$ .
    - δ) Πόσο θα είναι τελικά το μήκος του νήματος που θα παραμείνει σε επαφή με το έδαφος;
- Δίνεται ότι το νήμα δεν γλιστρά στο μικρό δίσκο ενώ και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:



- i) Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, στο στερεό  $s$  και στο σώμα  $\Sigma$ . Από την ισορροπία κάθε σώματος παίρνουμε:

Σώμα  $\Sigma$ :  $\Sigma F=0 \rightarrow T_1=w=mg=15\text{N}$ , όπου  $T_1$  η τάση του νήματος.

Στερεό  $s$ : Η τάση του νήματος  $T_1'=15\text{N}$ , αφού το νήμα είναι αβαρές, η οποία τείνει να περιστρέψει δεξιόστροφα το στερεό. Αλλά τότε θα δεχτεί τριβή  $T_s'$  από τη δοκό με φορά προς

τα αριστερά.

$$\Sigma \tau_O = 0 \rightarrow T_s' \cdot R_2 - T_l' \cdot R_1 = 0 \rightarrow T_s' = T_l' \frac{R_1}{R_2} = 15 \frac{0,2}{0,3} N = 10 N$$

Η δοκός δέχεται την αντίδραση της  $T_s'$ , την  $T_s=10N$  και ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma \tau_A = 0 \rightarrow N \cdot (AB) - w_s \cdot (AK) = 0 \rightarrow N = Mg \frac{(AK)}{(AB)} = 30 \frac{2}{3} N = 20 N$$

Αλλά για να μην υπάρξει ολίσθηση πρέπει:

$$T_s \leq T_{op} \rightarrow T_s \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_s}{N} \rightarrow \mu_s \geq 0,5$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής για να μην περιστραφεί το στερεό s και έχουμε ολίσθηση είναι  $\mu_{s/min}=0,5$ .

- ii) Αν η μάζα του σώματος Σ είναι 2kg, το στερεό s στρέφεται και το σώμα Σ πέφτει. Εφαρμόζοντας τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά παίρνουμε:

$$\text{Σώμα } \Sigma: \quad \Sigma F = m \cdot a \rightarrow mg - T_l = m \cdot a \quad (1)$$

$$\text{Στερεό } s: \quad \Sigma \tau_o = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_l' R_1 - T_{ol} R_2 = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Σύνδεσμος: Κάθε σημείο του νήματος κινείται με την ίδια επιτάχυνση, συνεπώς η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι ίση με την επιτροχια επιτάχυνση του σημείου Γ, όπου το νήμα συναντά τον δίσκο  $R_1$ . Δηλαδή:

$$a = a_{\epsilon\pi/\Gamma} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_1 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3), παίρνουμε για την επιτάχυνση του σώματος Σ:

$$a = \frac{mgR_1^2 - T_{ol}R_1R_2}{mR_1^2 + I_s} \quad (4)$$

- α) Η τριβή ολίσθησης όμως που αναπτύσσεται μεταξύ δοκού και στερεού s, είναι σταθερή, οπότε με βάση την σχέση (4) το σώμα Σ κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση, εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία ισχύουν:

$$v = a \cdot t \quad \text{και} \quad \Delta y = \frac{1}{2} a t^2.$$

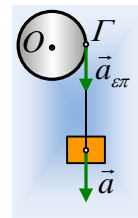
και με απαλοιφή του χρόνου για  $\Delta y = h$  παίρνουμε:

$$h = \frac{v^2}{2a} \rightarrow a = \frac{v^2}{2h} = \frac{I^2}{2 \cdot 0,5} = 1 m/s^2.$$

- β) Λύνουμε την (4) ως προς  $T_{ol}$ , παίρνουμε:

$$T_{ol} = \frac{mgR_1^2 - (mR_1^2 + I_s)a}{R_1R_2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0,2^2 - (2 \cdot 0,2^2 + 0,24) \cdot 1}{0,2 \cdot 0,3} N = 8 N$$

Η δοκός βέβαια ισορροπεί, οπότε ξανά  $N=20N$ , συνεπώς για την παραπάνω τριβή έχουμε:



$$T_{ολ} = \mu \cdot N \rightarrow \mu = \frac{T_{ολ}}{N} = \frac{8N}{20N} = 0,4$$

γ) Μόλις το σώμα Σ ακινητοποιηθεί στο έδαφος, το νήμα χαλαρώνει, παύοντας να ασκεί δύναμη στο στερεό s, το οποίο αρχίζει να επιβραδύνεται εξαιτίας της ροπής της τριβής. Δουλεύοντας με αλγεβρικές τιμές των μεγεθών έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_o &= I_s \cdot \alpha_{γων1} \rightarrow -T_{ολ} \cdot R_2 = I_s \cdot \alpha_{γων1} \rightarrow \\ \alpha_{γων1} &= -\frac{T_{ολ} R_2}{I_s} = -\frac{8 \cdot 0,3}{0,24} \text{ rad} / \text{s}^2 = -10 \text{ rad} / \text{s}^2. \end{aligned}$$

Αλλά αν  $\Delta t$  το χρονικό διάστημα μέχρι να σταματήσει την περιστροφή, έχουμε:

$$\alpha_{γων1} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_1}{\Delta t} \rightarrow \omega = \omega_1 + \alpha_{γων1} \Delta t$$

ενώ  $\omega_1$  η γωνιακή ταχύτητα του s, τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο έδαφος, όπου η ταχύτητα του σώματος θα είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Γ (στο παραπάνω σχήμα)

$$\text{με αποτέλεσμα } v = \omega_1 \cdot R_1 \text{ οπότε } \omega_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{1}{0,2} \text{ rad} / \text{s} = 5 \text{ rad} / \text{s}$$

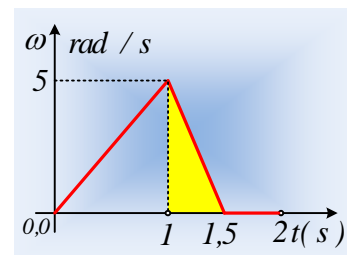
Τη στιγμή εξάλλου που σταματά η περιστροφή του στερεού s,  $\omega = 0$ , οπότε

$$\Delta t = -\frac{\omega_1}{\alpha_{γων1}} = -\frac{5}{-10} \text{ s} = 0,5 \text{ s}$$

Όμως η πτώση του σώματος Σ διαρκεί χρόνο  $t_1$ , όπου:

$$v = a \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{v}{a} = \frac{1}{1} \text{ s} = 1 \text{ s}$$

Με βάση αυτά, η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού s, μεταβάλλεται όπως στο διπλανό σχήμα.



δ) Κατά τη διάρκεια της επιβράδυνσης το στερεό s, στρέφεται κατά γωνία  $\Delta\theta$ , ίση αριθμητικά με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, στο παραπάνω διάγραμμα  $\omega$ - $t$ . Έτσι:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \beta v = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 5 \text{ rad} = 1,25 \text{ rad}$$

Οπότε ελευθερώθηκε νήμα μήκους:

$$\Delta s = \Delta\theta \cdot R_2 = 1,25 \cdot 0,3 \text{ m} = 0,375 \text{ m} = 37,5 \text{ cm}$$

Ίσου μήκος νήματος συνεπώς θα βρίσκεται στο έδαφος (προφανώς άλλα 50cm νήματος θα κρέμονται από το στερεό s)

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)