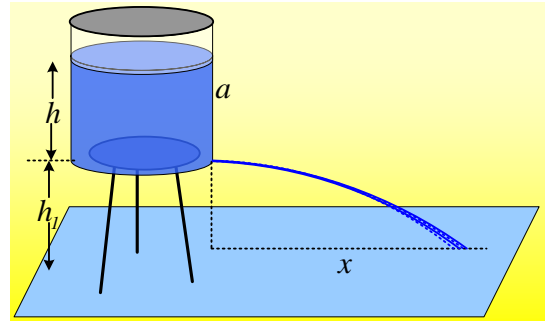


Θα αδειάσει το δοχείο;

Σε ένα τρίποδο σε ύψος $h_1=1,2\text{m}$ από το έδαφος, έχουμε στερεώσει ένα δοχείο το οποίο είναι αεροσταγώς κλεισμένο και το οποίο περιέχει νερό μέχρι ύψος $h=0,8\text{m}$. Το δοχείο, κυλινδρικού σχήματος, έχει εμβαδόν βάσεως $0,3\text{m}^2$ και ύψος $a=1\text{m}$. Αν ανοίξουμε μια μικρή τρύπα, κοντά στη βάση του δοχείου, το νερό πετάγεται, φτάνοντας σε οριζόντια απόσταση $x=12\text{m}$, ενώ σιγά-σιγά η φλέβα εξασθενεί και μετά από λίγο, το νερό σταματά να τρέχει.



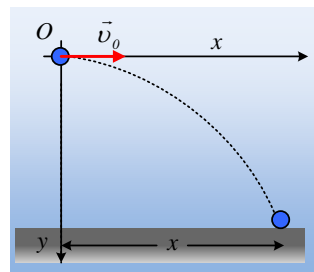
- i) Να βρεθεί η πίεση του αέρα πάνω από την επιφάνεια του νερού, τη στιγμή που αρχίζει η εκροή του νερού.
- ii) Να ερμηνευτεί γιατί το νερό θα φτάνει στη συνέχεια όλο και σε μικρότερη οριζόντια απόσταση στο έδαφος.
- iii) Να υπολογιστεί η πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο, όταν σταματήσει η εκροή του νερού.
- iv) Τελικά πόσος όγκος νερού βγήκε από την τρύπα που ανοίξαμε, αν η βάση του δοχείου έχει εμβαδόν 1m^2 ;

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, με πυκνότητα $\rho=1.000\text{kg/m}^3$, η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με $p_{at}=10^5\text{N/m}^2$, ενώ η θερμοκρασία στη διάρκεια του πειράματος παραμένει σταθερή. Εξάλλου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Το νερό αρχικά, μόλις ανοίξουμε την τρύπα, εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν περιοριστούμε σε μια μικρή μάζα νερού, σε ένα «σωματίδιο-ρευστού» (fluid particle), αντίστοιχο του υλικού σημείου, το οποίο χρησιμοποιούμε σε άλλα κεφάλαια φυσικής, αυτό θα εκτελέσει οριζόντια βολή, για την οποία θα ισχύει:

Άξονας x	Άξονας y
$v_x=v_0$ (1)	$v_y=gt$ (3)
$x=v_0t$ (2)	$y=\frac{1}{2}gt^2$ (4)

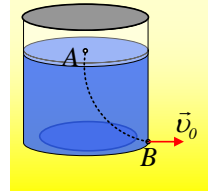


Τη στιγμή που το σωματίδιο ρευστού φτάνει στο έδαφος $x=12\text{m}$, ενώ $y=1,2\text{m}$, οπότε με απαλοιφή του χρόνου από τις εξισώσεις (2) και (4) παίρνουμε:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \rightarrow v_0 = x \sqrt{\frac{g}{2y}} = 12 \sqrt{\frac{10}{2 \cdot 1,2}} \text{ m/s} = 10 \sqrt{6} \text{ m/s}.$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής, μεταξύ ενός σημείου A στην επιφάνεια του νερού και του σημείου εξόδου B:

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$



Όπου όμως η ταχύτητα ροής στο σημείο A είναι σχεδόν μηδενική και θεωρώντας ότι $h_B=0$, τότε $h_A=h$, $p_B=p_{at}$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

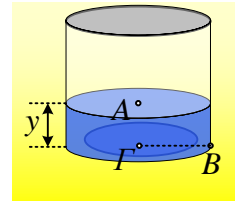
$$p_A + \rho g h = p_B + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (5)$$

$$p_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \rho g h \rightarrow$$

$$p_A = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} 10^3 \cdot (10 \sqrt{6})^2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 10^3 \cdot 10 \cdot 0,8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3,92 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

ii) Καθώς θα εξέρχεται νερό από την τρύπα κοντά στη βάση του δοχείου, η επιφάνεια του νερού στο δοχείο θα κατεβαίνει, οπότε θα μειώνεται η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα (ισόθερμη μεταβολή), ενώ ταυτόχρονα θα μειώνεται το ύψος h , αλλά τότε από την εξίσωση (5) θα μειώνεται και η ταχύτητα εκροής του νερού v . Ενώ όμως το χρονικό διάστημα πτώσης, όπως προκύπτει από την σχέση (4), θα παραμένει σταθερό, θα μειώνεται η οριζόντια απόσταση στην οποία θα φτάνει στο έδαφος.

iii) Με βάση τα προηγούμενα, κάποια στιγμή θα μηδενιστεί η ταχύτητα εκροής του νερού, ενώ στο δοχείο θα υπάρχει νερό σε ύψος y . Προφανώς το νερό βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, οπότε:



$$p_A = p_B = p_{at} \rightarrow$$

$$p'_A + \rho g y = p_{at}$$

Ερχόμαστε τώρα στον αέρα που έχει εγκλωβιστεί πάνω από το νερό. Το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα, οπότε από το νόμο του Boyle παίρνουμε:

$$p_A V_{αρχ} = p'_A V_{τελ} \rightarrow$$

$$p_A A(a - h) = p'_A A(a - y) \rightarrow$$

$$p_A (a - h) = (p_{at} - \rho g y)(a - y) \rightarrow$$

$$3,92 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = (10^5 - 10^3 \cdot 10 y)(1 - y) \rightarrow$$

$$y^2 - 11y + 2,16 = 0 \rightarrow$$

$$y_1 = 10,8 \text{ m} \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad y_2 = 0,2 \text{ m} \text{ δεκτή τιμή.}$$

Αλλά τότε η πίεση του αέρα, τη στιγμή που σταματά η εκροή θα είναι:

$$p'_A = p_{at} - \rho g y = 10^5 \frac{N}{m^2} - 10^3 \cdot 10 \cdot 0,2 \frac{N}{m^2} = 0,98 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

iv) Ο όγκος του νερού που χύθηκε είναι:

$$\Delta V = V_{αρχ} - V_{τελ} = Ah - Ay = A(h - y) \rightarrow$$

$$\Delta V = 0,3 \cdot (0,8 - 0,2) m^3 = 0,18 m^3$$

dmargaris@gmail.com