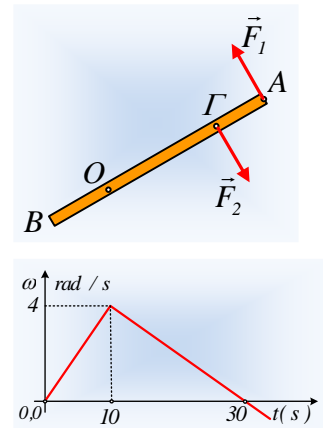


Η επιτάχυνση και η επιβράδυνση της δοκού.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ομογενής δοκός (AB) μήκους 4m και μάζας 30kg, η οποία μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο O της δοκού. Σε μια στιγμή, ασκούνται στη δοκό δυο οριζόντιες δυνάμεις $F_1=F_2=28\text{N}$, ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς και διαρκώς κάθετες στη δοκό, όπως στο σχήμα (κάτοψη), όπου $(AG)=d=1\text{m}$. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου τη στιγμή $t_1=10\text{s}$ μεταβάλλεται το μέτρο της μιας από τις παραπάνω δυνάμεις.



- i) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού από 0-10s, καθώς και η γωνία που στρέφεται η δοκός στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
- ii) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής στο O, καθώς και η απόσταση του O από το άκρο B της δοκού.
- iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K της δοκού της χρονικές στιγμές:
 - a) $t_0=0$ και β) $t_2=5\text{s}$.
- iv) Ποιας δύναμης μειώσαμε το μέτρο μετά το 10^ο δευτερόλεπτο; Αφού δικαιολογήσετε την απάντησή σας, στη συνέχεια να υπολογίσετε το νέο μέτρο της δύναμης αυτής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της K,

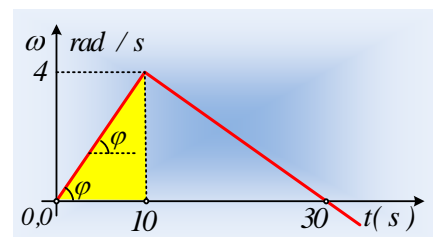
$$I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

Απάντηση:

- i) Στο διάγραμμα ω - t , η κλίση είναι αριθμητικά ίση με την επιτάχυνση του στερεού αφού:

$$a_{I\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - 0}{t - 0} = \frac{\omega}{t}$$

$$a_{I\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{t} = \frac{4}{10} \text{ rad/s}^2 = 0,4 \text{ rad/s}^2.$$



Ενώ το αντίστοιχο εμβαδόν, το εμβαδόν του τριγώνου με κίτρινο χρώμα, είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία στροφής της δοκού:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \beta t = \frac{1}{2} 10 \cdot 4 \text{ rad} = 20 \text{ rad}$$

- ii) Το σύστημα των δύο δυνάμεων F_1 - F_2 , αποτελεί ένα ζεύγος δυνάμεων με ροπή $\tau = F \cdot d$, εξαιτίας της οποίας η δοκός αποκτά κατακόρυφη γωνιακή επιτάχυνση, πάνω στον άξονα με φο-

ρά προς τον αναγνώστη, με αποτέλεσμα η δοκός να στρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση παίρνουμε:

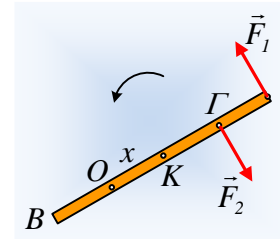
$$\Sigma \tau_o = I_o \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow I_o = \frac{\Sigma \tau_o}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{F_1 d}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{28 \cdot 1}{0,4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Έστω ότι ο άξονας στο O απέχει κατά x από το μέσον (κέντρο μάζας) K της δοκού. Από το θεώρημα του Steiner έχουμε:

$$I_o = I_{cm} + mx^2 \rightarrow x^2 = \frac{I_o}{m} - \frac{I/12 m \ell^2}{m} = \frac{I_o}{m} - \frac{1}{12} \ell^2 \rightarrow$$

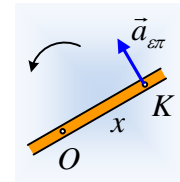
$$x^2 = \frac{70}{30} \text{ m}^2 - \frac{1}{12} 4^2 \text{ m}^2 = 1 \text{ m}^2 \rightarrow x = 1 \text{ m}$$

$$\text{Οπότε } (BO) = (BK) - (OK) = 2 \text{ m} - 1 \text{ m} = 1 \text{ m}$$



iii) Το κέντρο μάζας K της δοκού εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το O.

α) Τη στιγμή $t_0=0$ το σημείο K δεν έχει ταχύτητα, αλλά ξεκινά την κίνησή του. Η επιτάχυνση που αποκτά, είναι κάθετη στην ακτίνα περιστροφής του (OK) και ευθύνεται για την αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας του K. Ονομάζεται **επιτρόχιος** επιτάχυνση και έχει μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του:



$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|v_K|}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = a_{\gamma\omega\nu} \cdot r = 0,4 \cdot 1 \text{ m} / \text{s}^2 = 0,4 \text{ m} / \text{s}^2.$$

β) Τη στιγμή t_2 , το σημείο K, εκτός της παραπάνω επιτάχυνσης (η οποία έχει σταθερό μέτρο, αφού έχουμε σταθερή γωνιακή επιτάχυνση) έχει αποκτήσει και γωνιακή ταχύτητα μέτρου:

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_2 = 0,4 \cdot 5 \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$$

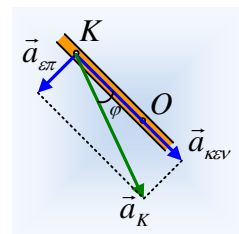
οπότε έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο περιστροφής O, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$a_{\kappa\epsilon\nu} = \omega^2 r = \omega^2 x = 2^2 \cdot 1 \text{ m} / \text{s}^2 = 4 \text{ m} / \text{s}^2.$$

Οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου K, έχει μέτρο:

$$a_K = \sqrt{a_{\varepsilon\pi}^2 + a_{\kappa\epsilon\nu}^2} = \sqrt{0,4^2 + 4^2} \text{ m} / \text{s}^2 \approx 4,02 \text{ m} / \text{s}^2$$

Η οποία σχηματίζει με τη δοκό γωνία φ , όπου $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{a_{\varepsilon\pi}}{a_{\kappa\epsilon\nu}} = \frac{0,4}{4} = 0,1$.



iv) Μετά τη στιγμή $t=10\text{s}$, παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της δοκού μειώνεται, πράγμα που σημαίνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση αλλάζει κατεύθυνση, αποκτά δηλαδή φορά προς τα μέσα. Αλλά για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η ροπή της δύναμης F_2 ως προς τον άξονα να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ροπή της F_1 . Αυτό με τη σειρά του μας λέει, ότι πρέπει

να μειώσουμε το μέτρο της δύναμης F_1 .

Για το χρονικό διάστημα 10s-30s έχουμε γωνιακή επιτάχυνση:

$$a_{2\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - \omega_1}{t_3 - t_1} = \frac{0 - 4}{30 - 10} \text{ rad / s}^2 = -0,2 \text{ rad / s}^2.$$

Οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow +F'_1 \cdot (OA) - F_2 \cdot (OG) = I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F'_1 = \frac{F_2(OG) + I_o \cdot a_{2\gamma\omega\nu}}{(OA)} = \frac{28 \cdot 2 + 70 \cdot (-0,2)}{3} \text{ N} = 14 \text{ N}$$

dmargaris@gmail.com