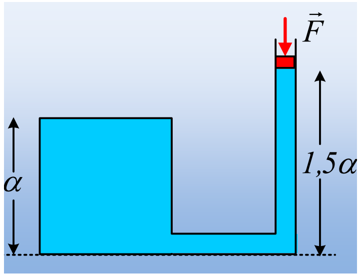
Η δύναμη, η πίεση και η αρχή του Pascal.



Το δοχείο κυβικού σχήματος πλευράς α είναι γεμάτο με νερό. Το δοχείο συνδέεται με σωλήνα διατομής Α, όπως στο σχήμα, όπου το νερό φτάνει σε ύψος 1,5α. Ο σωλήνας φράσσεται με έμβολο βάρους w, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Αν $p_{ατ}$ η ατμοσφαιρική πίεση, ρ η πυκνότητα του νερού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας:

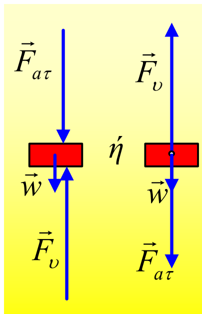
i) Η πίεση του νερού σε σημείο πολύ κοντά στην βάση του δοχείου, έχει τιμή:

α) $p=p_{ατ}+ ρgα$, β) $p=p_{ατ}+ 1,5ρgα$, γ) $p=p_{ατ}+w+1,5ρgα$, δ) $p=p_{ατ}+w/A+1,5ρgα$.

ii) Αν ασκήσουμε στο έμβολο κατακόρυφη δύναμη F, μέτρου F=3w, όπου w το βάρος του εμβόλου, τότε η δύναμη που ασκείται από το νερό στην πάνω έδρα του κύβου, αυξάνεται κατά:

α) 3w, β) $\dfrac{3w}{A}$, γ) $\dfrac{3w}{A}\cdot α^2$, δ) $\dfrac{4w}{A}\cdot α^2$

Απάντηση:

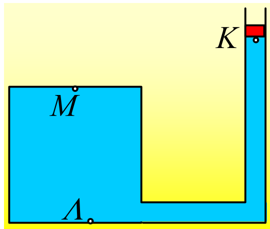


i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, το οποίο ισορροπεί.

$$ΣF=0 \rightarrow F_υ=F_{ατ}+w \text{ ή } p_1\cdot A=p_{ατ}\cdot A+w \text{ ή}$$

$$p_1 = p_{ατ} + \frac{w}{A}$$

Όπου p_1 η πίεση του νερού στην κάτω επιφάνεια του εμβόλου.

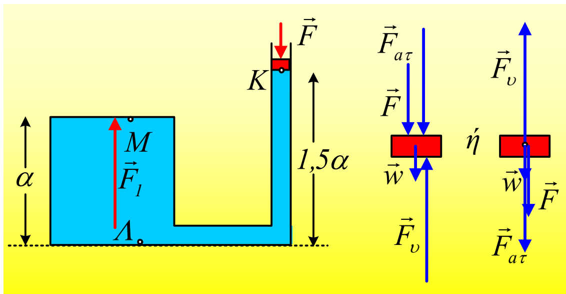


Έστω ένα σημείο Κ του υγρού σε επαφή με το έμβολο και ένα δεύτερο σημείο Λ σε επαφή με την κάτω έδρα του κύβου. Για τις πιέσεις στα σημεία αυτά ισχύει:

$$p_Λ-p_K=ρgh \rightarrow$$

$$p_Λ=p_K+ρgh = p_1+ρgh= p_{ατ} + \frac{w}{A} + 1,5ρga$$

σωστή η δ) πρόταση.



ii) Πριν την άσκηση της δύναμης F, στα σημεία του νερού σε επαφή με την πάνω έδρα του κύβου, έστω ένα τέτοιο σημείο Μ, η πίεση έχει τιμή:

$$p_Λ-p_M=ρgh \rightarrow p_M=p_Λ-ρgh \text{ ή}$$

$$p_M = p_{ατ} + \frac{w}{A} + 1,5ρga - ρga \text{ ή}$$

$$p_M = p_{ατ} + \frac{w}{A} + 0{,}5\rho g a$$

Αλλά τότε η πάνω έδρα του κύβου δέχεται δύναμη από το νερό, κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω μέτρου:

$$F = p_M \cdot a^2 = \left(p_{ατ} + \frac{w}{A} + 0{,}5\rho g a \right) \cdot a^2$$

Τι συμβαίνει, όταν ασκήσουμε μια κατακόρυφη δύναμη F στο έμβολο; Το νερό θεωρείται ασυμπίεστο υγρό, συνεπώς ο όγκος του δεν θα μεταβληθεί και το έμβολο θα ισορροπεί, με την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Αλλά τότε από την ισορροπία του εμβόλου έχουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_υ=F_{ατ}+w+F \rightarrow$$

$$\frac{F_υ}{A} = \frac{F_{ατ}}{A} + \frac{w}{A} + \frac{F}{A} \rightarrow$$

$$p'_K = p_{ατ} + \frac{w}{A} + \frac{3w}{A} = p_{ατ} + \frac{4w}{A}$$

Δηλαδή η άσκηση της δύναμης F στο έμβολο, έχει ως άμεσο αποτέλεσμα την αύξηση της πίεσης στο σημείο Κ του υγρού κατά $\frac{F}{A}$. Συνήθως γράφεται, ότι ασκώντας την εξωτερική δύναμη F, ασκούμε εξωτερική πίεση $\frac{F}{A}$, πράγμα που δεν είναι σωστό, αφού η πίεση δεν ασκείται. Ασκούμε δύναμη στο υγρό (μέσω του εμβόλου), οπότε προκαλείται αύξηση της πίεσής του, κατά $\frac{F}{A}$. Αυτή δε η αύξηση της πίεσης, σύμφωνα με την **Αρχή του Pascal*** είναι η ίδια για όλα τα σημεία του υγρού! Έτσι τώρα η πίεση σε ένα σημείο του υγρού, έστω σε επαφή με την πάνω έδρα του δοχείου, θα είναι αυξημένη επίσης κατά $\frac{F}{A}$, θα είναι δηλαδή ίση με $p'_M = p_M + \frac{F}{A} = p_{ατ} + \frac{4w}{A} + 0{,}5\rho g a$.

Αλλά τότε η πάνω έδρα του κύβου δέχεται κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω, μέτρου:

$$F' = p'_M \cdot a^2 = \left(p_{ατ} + \frac{4w}{A} + 0{,}5\rho g a \right) \cdot a^2$$

Συνεπώς η ασκούμενη δύναμη αυξήθηκε κατά:

$$F' - F = \left(p_{ατ} + \frac{4w}{A} + 0{,}5\rho g a \right) \cdot a^2 - \left(p_{ατ} + \frac{w}{A} + 0{,}5\rho g a \right) \cdot a^2 \text{ ή}$$

$$ΔF = \frac{3w}{A} \cdot a^2 = \frac{F}{A} \cdot a^2$$

Σωστή η γ) πρόταση.

Συμπέρασμα:

Η εξάσκηση μιας επιπλέον δύναμης F στο υγρό μέσω του εμβόλου, προκαλεί αύξηση της πίεσης σε κάθε σημείο του κατά $\frac{F}{A}$, συνεπώς και αύξηση της δύναμης που δέχεται μια επιφάνεια, όπως η πάνω έδρα του κυβικού δοχείου, κατά $\frac{F}{A}\cdot\alpha^2$.

Μια εφαρμογή της παραπάνω κατάστασης έχουμε στο υδραυλικό πιεστήριο…

Σχόλιο:

Βέβαια, κάποιος θα μπορούσε να δουλέψει εναλλακτικά ως εξής:

$$p'_M - p'_K = \rho g h_{KM}$$

$$p'_M = p'_K + \rho g \frac{1}{2}a = p_{\alpha\tau} + \frac{3w}{A} + \frac{1}{2}\rho g a = p_M + \frac{3w}{A}$$

dmargaris@gmail.com