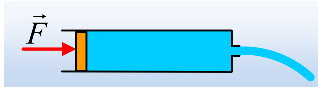
Η δύναμη στο έμβολο σε μια μόνιμη ροή.

Διαθέτουμε μια σύριγγα η οποία περιέχει νερό και κλείνεται με αβαρές έμβολο εμβαδού Α, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.



Με οριζόντια την σύριγγα, ασκώντας μια δύναμη F στο έμβολο, αποκαθίσταται μια μόνιμη ροή (εκδοχή Α) και το νερό εξέρχεται από το δεξιό άκρο με σταθερή ταχύτητα υ, δημιουργώντας φλέβα διατομής ίσης με A_1.

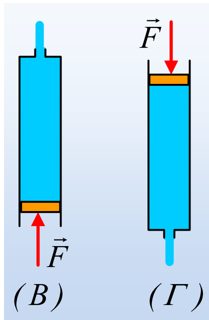
i) Η δύναμη F, με την οποία σπρώχνεται το έμβολο στη διάρκεια της μόνιμης ροής:

α) είναι σταθερή β) αυξάνεται με το χρόνο, γ) μειώνεται με το χρόνο.

ii) Το μέτρο της δύναμης, εξαρτάται από την ταχύτητα εκροής υ, με την σχέση:

α) F=λυ, β) $F= λυ^2$, γ) $F= λυ^2+ μ$

όπου λ και μ σταθερές.



iii) Επαναλαμβάνουμε το παραπάνω πείραμα σε δυο εναλλακτικές εκδοχές (Β) και (Γ) με κατακόρυφη τη σύριγγα. Στην (Β) με το άνοιγμα πάνω, στην (Γ) με το άνοιγμα κάτω. Η απαραίτητη δύναμη F, που πρέπει να ασκηθεί στο έμβολο, για την μόνιμη εκροή με ταχύτητα υ, είναι:

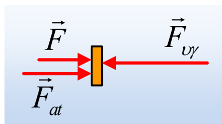
α) μεγαλύτερη στην Β περίπτωση,

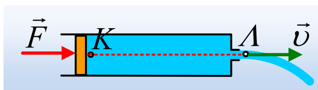
β) μεγαλύτερη στην Γ περίπτωση,

γ) ίδια και στις δυο περιπτώσεις και ίσου μέτρου με τη δύναμη με την περίπτωση που η σύριγγα είναι οριζόντια.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας, θεωρώντας το νερό ιδανικό ρευστό.

Απάντηση:





Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο σε μια θέση. Αυτές είναι η δύναμη από την ατμόσφαιρα $F_{ατ}$, η δύναμη F και η δύναμη από το υγρό, $F_υ=p_K \cdot A$. Από τη στιγμή που η ταχύτητα εκροής είναι σταθερή, σταθερή θα είναι και η ταχύτητα του εμβόλου, αφού από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών που περιλαμβάνουν τα σημεία Κ και Λ έχουμε:

$$A_K \cdot u = A_Λ υ \rightarrow u = \frac{A_1}{A} υ \rightarrow (1)$$

Αλλά τότε για το έμβολο ισχύει:

$$ΣF=0 \rightarrow F+F_{ατ}=F_{υγ} \rightarrow \frac{F_υ}{A} = \frac{F_{at}}{A} + \frac{F}{A} \rightarrow$$

$$p_K = p_{ατ} + \frac{F}{A}$$

Έστω τώρα δύο σημεία Κ και Λ μιας ρευματικής γραμμής, όπως στο παραπάνω σχήμα, όπου το Κ είναι σημείο στην δεξιά πλευρά του εμβόλου με ταχύτητα ροής u και το Λ στην έξοδο από τη σύριγγα.

Με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των δύο σημείων παίρνουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau} + \frac{F}{A} + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

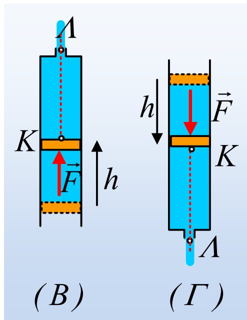
$$F = \frac{1}{2}\rho A(\upsilon^2 - u^2) \xrightarrow{(1)}$$

$$F_A = \frac{1}{2}\rho A \upsilon^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A^2}\right)$$

i) Με βάση την τελευταία εξίσωση η δύναμη F που πρέπει να ασκείται στο έμβολο για να εξασφαλίζεται η μόνιμη ροή, είναι σταθερή. Σωστό το α).

ii) Από την ίδια εξίσωση προκύπτει ότι η δύναμη είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας εκροής υ, οπότε σωστή είναι η β) πρόταση, όπου $\lambda = \frac{1}{2}\rho A\left(1 - \frac{A_1^2}{A^2}\right)$.

iii) Αν θεωρήσουμε t=0 τη στιγμή που ξεκινά η μόνιμη ροή και L το μήκος της σύριγγας που περιέχει νερό, τη στιγμή αυτή. Το έμβολο κατά τη μόνιμη ροή κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = \frac{A_1}{A}\upsilon$ (σχέση 1) οπότε τη στιγμή t, έχει μετατοπισθεί κατά h=ut, προς τα πάνω (Β) ή προς τα κάτω στην (Γ) περίπτωση.



α) Πάμε στην (Β) περίπτωση:

Με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των σημείων Κ και Λ παίρνουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g(L-h) \rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau} + \frac{F}{A} + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho gL - \rho gut \xrightarrow{(1)}$$

$$F = \frac{1}{2}\rho A(\upsilon^2 - u^2) + \rho gAL - \rho gAut \rightarrow$$

$$F_B = \frac{1}{2}\rho A \upsilon^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A^2}\right) + \rho gAL - \rho gAut$$

Όπου $\rho gAL - \rho gAut \geq 0$, συνεπώς η δύναμη F_B είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη δύναμη στην οριζόντια σύριγγα, ξεκινώντας από την μεγαλύτερη τιμή $F_{B/max} = \frac{1}{2}\rho A \upsilon^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A^2}\right) + \rho gAL$ και φτάνοντας σε τελική τιμή $F_{B/min}=\frac{1}{2}\rho A\upsilon^2\left(1-\frac{A_1^2}{A^2}\right)$, ίση με τη δύναμη F_A!

β) Αντίστοιχα στην (Γ) εκδοχή έχουμε:

$$p_K+\frac{1}{2}\rho u^2+\rho g(L-h)=p_\Lambda+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2\rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau}+\frac{F}{A}+\frac{1}{2}\rho u^2+\rho gL-\rho gut=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

$$F=\frac{1}{2}\rho A(\upsilon^2-u^2)-\rho gAL+\rho gAut\xrightarrow{(1)}$$

$$\boxed{F_\Gamma=\frac{1}{2}\rho A\upsilon^2\left(1-\frac{A_1^2}{A^2}\right)-\rho gAL+\rho gAut}$$

Τώρα η απαραίτητη δύναμη αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, ξεκινώντας από την ελάχιστη τιμή της:

$$F_{\Gamma/min}=\frac{1}{2}\rho A\upsilon^2\left(1-\frac{A_1^2}{A^2}\right)-\rho gAL$$

και φτάνοντας σε μέγιστη τιμή:

$$F_{\Gamma/max}=\frac{1}{2}\rho A\upsilon^2\left(1-\frac{A_1^2}{A^2}\right)=F_A\,!$$

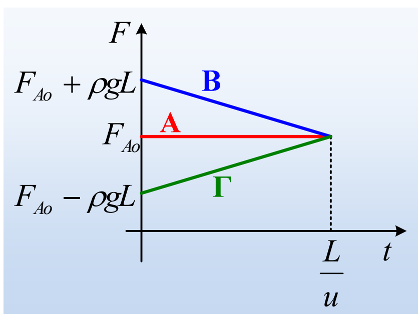
Συνεπώς μεγαλύτερη δύναμη, κάθε στιγμή (εκτός της στιγμής που το έμβολο φτάνει στο άκρο της σύριγγας) ασκείται στην περίπτωση που το νερό εξέρχεται από το άνω άκρο της.

Σωστό το α).

Σημείωση:

Αν κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των σχέσεων F-t και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, στους ίδιους άξονες, θα πάρουμε το διπλανό διάγραμμα, όπου F_{Ao} η δύναμη που απαιτείται κατά την κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση.

Τώρα πια νομίζω ότι τα πράγματα γίνονται ολοφάνερα…



dmargaris@gmail.com