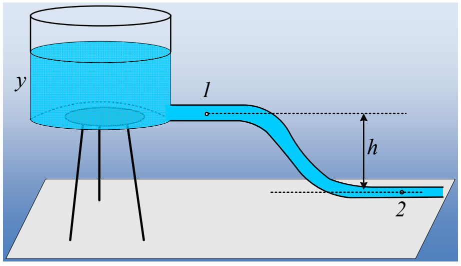
Η διαφορά πίεσης σε ένα μικρό δίκτυο.



Για την ύδρευση μιας εξοχικής κατοικίας, έχουμε ένα υπερυψωμένο ντεπόζιτο (μια δεξαμενή) με νερό, από όπου ένας σωλήνας, ο οποίος συνδέεται στη βάση της, μεταφέρει το νερό στο σπίτι. Μετά το σημείο 2 του σχήματος, επακολουθεί διακλάδωση και το νερό διοχετεύεται σε διάφορα σημεία του σπιτιού.

Η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2 ($\Delta p_{21}=p_2-p_1$), τα οποία απέχουν κατακόρυφη απόσταση h, εξαρτάται ή όχι από το ύψος y του νερού στη δεξαμενή;

Να εξεταστούν οι εξής περιπτώσεις:

i) Με μηδενική παροχή (κλειστές όλες οι βρύσες).

ii) Έχουμε μια σταθερή παροχή, ενώ ο σωλήνας έχει την ίδια διατομή στα σημεία 1 και 2 ($A_1=A_2$).

iii) Έχουμε μια σταθερή ροή, ενώ για τις διατομές του σωλήνα στα σημεία 1 και 2, ισχύει ότι $A_1=2A_2$.

Το νερό να θεωρηθεί ασυμπίεστο ιδανικό ρευστό και οι ροές μόνιμες και στρωτές.

Απάντηση:

i) Με κλειστές τις βρύσες έχουμε ένα ρευστό σε ισορροπία, οπότε η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2 δίνεται από τη σχέση:

$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

Εξαρτάται δηλαδή από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ τους και όχι από το τι συμβαίνει στη δεξαμενή!

Σημείωση:

Μπορούμε να το αποδείξουμε, λαμβάνοντας υπόψη και την αρχή του Pascal για τα δύο σημεία:

$$p_1 = p_{ατ} + \rho g y \text{, ενώ } p_2 = p_{ατ} + \rho g(y+h)$$

$$\text{Οπότε } p_2 - p_1 = p_{ατ} + \rho g(y+h) - p_{ατ} - \rho g y = \rho g h$$

ii) Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής για τα σημεία 1 και 2 παίρνουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad (1)$$

Εξάλλου από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές του σωλήνα στις θέσεις 1 και 2 έχουμε:

$$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \quad (2)$$

Αλλά αφού η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή, $\upsilon_1 = \upsilon_2$, οπότε η (1) γίνεται:

$$p_1 + \rho g h = p_2 \rightarrow p_2 - p_1 = \rho g h$$

Παρατηρούμε ότι ξανά η διαφορά πίεσης δεν εξαρτάται από το ύψος του νερού στη δεξαμενή, ενώ η διαφορά πίεσης είναι η ίδια και με την προηγούμενη περίπτωση, που το νερό ηρεμούσε!

iii) Από την σχέση (2) παίρνουμε:

$$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \rightarrow 2A_2 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

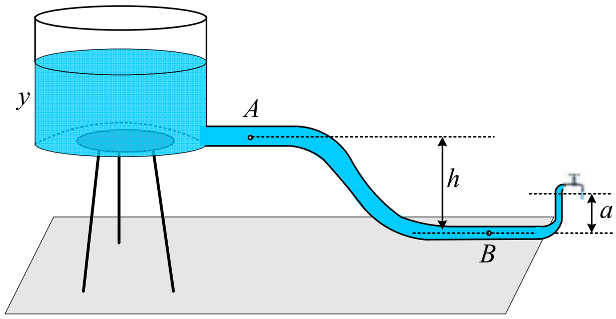
Και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho gh = p_2 + \frac{1}{2}\rho(2\upsilon_1)^2 \rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \rho gh - \frac{3}{2}\rho\upsilon_1{}^2 \quad (3)$$

Αλλά η ταχύτητα υ_1 στο σωλήνα εξαρτάται από το ύψος του νερού στη δεξαμενή, συνεπώς η διαφορά πίεσης εξαρτάται επίσης από το ύψος y.

Ας το δούμε λίγο αναλυτικότερα.



Έστω ότι ο σωλήνας καταλήγει σε μια βρύση που βρίσκεται σε ύψος α από το έδαφος και όπου η φλέβα εκροής έχει διατομή A_3. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli ανάμεσα σε ένα σημείο στην επιφάνεια της δεξαμενής και στην έξοδο της βρύσης έχουμε:

$$p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2 + \rho g(h+y) = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho ga \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2g(h+y-a)} \quad (4)$$

Θεωρώντας ότι $\upsilon_0=0$ η ταχύτητα ροής στην επιφάνεια της δεξαμενής.

Και από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής 1 και της εξόδου της βρύσης:

$$A_1 \cdot \upsilon_1 = A_3 \cdot \upsilon \rightarrow \upsilon_1 = \frac{A_3}{A_1} \cdot \upsilon \rightarrow \upsilon_1 = \frac{A_3}{A_1} \cdot \sqrt{2g(h+y-a)}$$

Έτσι η (3) γίνεται:

$$p_2 - p_1 = \rho gh - \frac{3}{2}\rho \cdot \left(\frac{A_3}{A_1} \cdot \sqrt{2g(h+y-a)}\right)^2 \rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \rho gh - 3\rho g(h+y-a) \cdot \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2$$

dmargaris@gmail.com