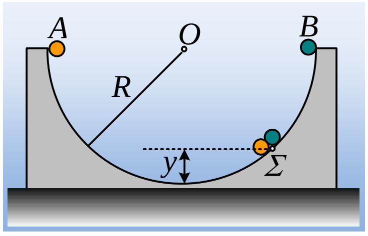
Ελαστική κρούση δύο σφαιρών.



Δύο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες, συγκρατούνται όπως στο σχήμα στις κορυφές ενός λείου ημικυκλικού οδηγού. Σε μια στιγμή αφήνουμε την Α να πέσει, κινούμενη κατά μήκος του οδηγού σε κατακόρυφο επίπεδο. Μετά από λίγο αφήνουμε να κινηθεί και την σφαίρα Β. Οι δυο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά στο σημείο Σ, η κατακόρυφη απόσταση του οποίου, από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς είναι y=0,25R. Αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα της Β σφαίρας είναι μηδενική.

i) Η κίνηση των σφαιρών είναι:

α) μεταφορική, β) στροφική, γ) σύνθετη.

ii) Για τις πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 των υλικών των σφαιρών Α και Β αντίστοιχα, ισχύει:

α) $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{1}{3}$ β) $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=1$, γ) $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{3}{1}$

iii) Μετά την κρούση, η Α σφαίρα θα φτάσει μέχρι:

α) Την θέση που αφέθηκε να κινηθεί.

β) Πάνω από τη θέση Σ σε ύψος 3(R-y).

γ) Πάνω από τη θέση Σ σε ύψος 3R.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

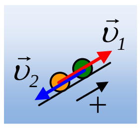
i) Οι σφαίρες θα εκτελέσουν μεταφορική κίνηση, αφού το επίπεδο είναι λείο και δεν ασκείται πάνω τους κάποια ροπή, που να προκαλέσει την περιστροφή τους.

ii) Ελάχιστα πριν την κρούση, οι δυο σφαίρες έχουν ταχύτητες με ίσα μέτρα. Πράγματι αν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη μια σφαίρα, ανάμεσα στην αρχική θέση και τη θέση Σ, ελάχιστα πριν την κρούση, θα πάρουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{Σ}+U_{Σ} \rightarrow$$

$$0+mg(R-y)=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \rightarrow \upsilon=\sqrt{2g\frac{3}{4}R}=\sqrt{1{,}5gR}$$

Αλλά αμέσως μετά την κεντρική ελαστική κρούση η Β σφαίρα θα έχει ταχύτητα:



$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$0=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}(-\upsilon)\rightarrow 2m_1=m_2-m_1\rightarrow m_2=3m_1$$

Αλλά η πυκνότητα κάθε σφαίρας είναι $\rho=\dfrac{m}{V}$, όπου οι όγκοι είναι ίσοι (ίσες ακτίνες), οπότε:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\frac{m_1}{V}}{\frac{m_2}{V}}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_1}{3m_1}=\frac{1}{3}$$

Σωστό το α).

iii) Η ταχύτητα εξάλλου της Α σφαίρας, αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{-2m_1}{4m_1}\upsilon+\frac{6m_1}{4m_1}(-\upsilon)=-2\upsilon$$

Η σφαίρα Α, αποκτώντας ταχύτητα μεγαλύτερη (κατά μέτρο) από αυτήν που είχε πριν την κρούση, θα κινηθεί ξανά προς την αρχική της θέση και στη συνέχεια θα κινηθεί κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά της.

Οπότε εφαρμόζοντας ξανά την ΑΔΜΕ, ανάμεσα στη θέση Σ (θεωρούμε ότι η σφαίρα έχει U_Σ=0) και στην θέση που θα φτάσει, σε ύψος Η, παίρνουμε:

$$K_\Sigma+U_\Sigma=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2+0=mgH\rightarrow\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1{,}5gR}\right)^2=gH\rightarrow$$

$$H=3R$$

Σωστό το γ).

dmargaris@gmail.com