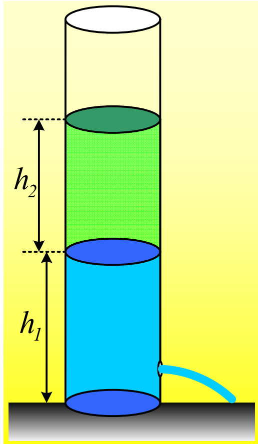
Εκροή από ένα δοχείο με δύο υγρά.



Σε ένα μεγάλο κατακόρυφο σωλήνα ηρεμούν δύο υγρά, νερό με πυκνότητα ρ_1=1.000kg/m^3 και λάδι πυκνότητας ρ_2=700kg/m^3, όπως στο σχήμα, όπου h_1=0,8m και h_2=0,7m. Μια τάπα, κλείνει μια οπή του δοχείου, εμβαδού Α=0,4cm^2, η οποία βρίσκεται σε ύψος h=0,2m από την βάση του σωλήνα.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που δέχεται η τάπα από το νερό, καθώς και η δύναμη την οποία δέχεται από τα τοιχώματα του σωλήνα, θεωρώντας αμελητέο το βάρος της.

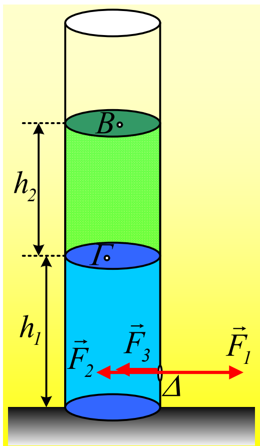
ii) Σε μια στιγμή βγάζουμε την τάπα, οπότε μέσα σε ελάχιστο χρόνο, αποκαθίσταται μια μόνιμη και στρωτή ροή. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής, θεωρώντας ότι η διατομή του σωλήνα, είναι πολύ μεγαλύτερη από την διατομή της οπής.

iii) Αν η διατομή του σωλήνα έχει εμβαδόν A_1=2cm^2, να υπολογιστεί ξανά η ταχύτητα εκροής, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η πάνω επιφάνεια του λαδιού.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=10^{5}N/m^2, ενώ και οι δύο παραπάνω ροές να θεωρηθούν μόνιμες και στρωτές ροές ιδανικού ρευστού.

Παρατήρηση: Η ταχύτητα εκροής του νερού δεν θα παραμένει σταθερή, αλλά θα μειώνεται καθώς θα κατεβαίνει η στάθμη του λαδιού, οπότε γενικά, η ροή δεν θα είναι μόνιμη. Η ζητούμενη ταχύτητα εκροής, είναι αυτή που θα αποκατασταθεί μέσα σε ελάχιστο χρόνο, μόλις απομακρυνθεί η τάπα και την οποία για ένα μικρό διάστημα μπορούμε να θεωρήσουμε σταθερή.

Απάντηση:



i) Θεωρώντας πολύ μικρό το εμβαδόν της τάπας μπορούμε να δεχτούμε ότι σε όλα τα σημεία της, επικρατεί η ίδια πίεση $p_Δ$. Αλλά στην επιφάνεια του λαδιού $p_B=p_{ατμ}$, ενώ αν πάρουμε το σημείο Γ στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών:

$$p_Γ-p_B=\rho_2 g h_2 \rightarrow p_Γ=p_B+\rho_2 g h_2.$$

Όμοια $p_Δ-p_Γ=\rho_1 g(h_1-h)$ $\rightarrow$ $p_Δ=p_Γ+\rho_1 g(h_1-h)$ ή

$$p_Δ= p_{ατ}+\rho_2 g h_2 +\rho_1 g(h_1-h)$$

Αλλά τότε η τάπα δέχεται μια οριζόντια δύναμη από το νερό μέτρου:

$$F_1=p_Δ\cdot A=(p_{ατ}+\rho_2 g h_2 +\rho_1 g(h_1-h))\cdot A$$

$$F_1=(10^5+700\cdot 10\cdot 0,7+1.000\cdot 10\cdot 0,6)\cdot 0,4\cdot 10^{-4}N=4,436N$$

Εξάλλου η τάπα δέχεται από την ατμόσφαιρα οριζόντια δύναμη:

$$F_2=p_{ατ}\cdot A=10^5\cdot 0,4\cdot 10^{-4}N=4N.$$

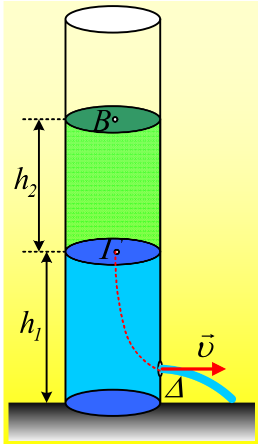
Αλλά η τάπα ισορροπεί και αν F_3 η δύναμη που δέχεται από τα τοιχώματα του σωλήνα, ισχύει:

$$F_1=F_2+F_3 \rightarrow F_3=F_1-F_2=4{,}436N-4N=0{,}436N.$$

ii) Αφαιρώντας την τάπα, το νερό χύνεται με ταχύτητα εκροής υ. Δεχόμενοι ότι ο σωλήνας έχει πολύ μεγαλύτερη διατομή, από την οπή, μπορούμε να αποδεχτούμε, ότι η επιφάνεια του λαδιού, παραμένει σε σταθερό ύψος και το λάδι ηρεμεί, οπότε και $\upsilon_\Gamma=0$.

Αλλά τότε $p_\Gamma=p_B+\rho_2 g h_2$. *(a)*

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΓΔ, παίρνουμε (θεωρούμε h=0 τον πυθμένα του σωλήνα) :



$$p_\Gamma+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Gamma^2+\rho_1 g h_1=p_\Delta+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Delta^2+\rho_1 g h \quad (1)$$

Όπου $p_\Delta=p_{\alpha\tau}$ και $\upsilon_\Gamma=0$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p_{\alpha\tau}+\rho_2 g h_2+\rho_1 g h_1=p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Delta^2+\rho_1 g h \rightarrow$$

$$\upsilon_\Delta=\upsilon=\sqrt{2\frac{\rho_2}{\rho_1}gh_2+2g(h_1-h)}\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{2\frac{700}{1.000}10\cdot 0{,}7+2\cdot 10(0{,}8-0{,}2)}m/s=\sqrt{9{,}8+12}m/s=\sqrt{21{,}8}m/s\approx 4{,}67m/s$$

iii) Στην περίπτωση που η διατομή του σωλήνα, δεν μπορεί να θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερη αυτής της τάπας, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενική την ταχύτητα του σημείου Γ και ακίνητη την στήλη του λαδιού. Έστω λοιπόν τώρα ότι η πάνω επιφάνεια του λαδιού κατέρχεται με ταχύτητα υ_1. Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των σημείων Β και Γ έχουμε:

$$A_B\cdot\upsilon_1=A_\Gamma\cdot\upsilon_\Gamma \rightarrow \upsilon_\Gamma=\upsilon_1 \ (2)$$

Αλλά επίσης, από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της διατομής του νερού στο Γ και στην τάπα:

$$A_\Gamma\cdot\upsilon_1=A_\Delta\cdot\upsilon_\Delta \rightarrow \upsilon_\Delta=\frac{A_1}{A}\upsilon_1=\frac{2cm^2}{0{,}4cm^2}\upsilon_1=5\upsilon_1 \ (3)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΒΓ (εντός του λαδιού) και παίρνουμε (θεωρούμε h=0 τον πυθμένα του σωλήνα) :

$$p_\Gamma+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_\Gamma^2+\rho_2 g h_1=p_B+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_B^2+\rho_2 g(h_1+h_2)\rightarrow$$

$$p_\Gamma=p_B+\rho_2 g h_2 \ (\beta)$$

Από (α) και (β) παρατηρούμε ότι η πίεση στο σημείο Γ είναι ίδια στην περίπτωση που η στήλη του λαδιού είναι ακίνητη και στην περίπτωση που έχουμε μόνιμη και στρωτή ροή, όπου η ταχύτητα της στήλης παραμένει σταθερή (ισορροπία στήλης).

Ξανά με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΓΔ, παίρνουμε (θεωρούμε h=0 τον πυθμένα του σωλήνα) :

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Gamma^2 + \rho_1 g h_1 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Delta^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau} + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_\Delta^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$\rho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^2 + \rho_1 g h_1 = \frac{1}{2}\rho_1 \cdot 25\upsilon_1^2 + \rho_1 g h \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{12\rho_1} g h_2 + \frac{1}{12} g(h_1 - h)} \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_B = \sqrt{\frac{700}{12 \cdot 1.000} 10 \cdot 0,7 + \frac{1}{12} 10(0,8 - 0,2)} m/s = \sqrt{\frac{10,9}{12}} m/s \approx 0,95 m/s$$

Συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η πάνω επιφάνεια του λαδιού, είναι υ_1=95cm/s, ενώ από την (3) η ταχύτητα εκροής του νερού στην οπή είναι:

$$\upsilon_\Delta = 5\upsilon_1 = 5 \cdot 0,95 m/s = 4,75 m/s$$

dmargaris@gmail.com