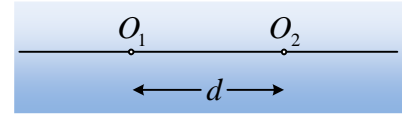


### Δύο κύματα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσον.

Σε δύο σημεία  $O_1$  και  $O_2$ , τα οποία απέχουν απόσταση  $(O_1O_2)=d=4\text{m}$ , ενός άπειρου γραμμικού ελαστικού μέσου, υπάρχουν δυο πηγές κύματος, οι οποίες αρχίζουν να ταλαντώνονται τη στιγμή  $t_0=0$  ταυτόχρονα,



προς την θετική κατεύθυνση, με αποτέλεσμα να δημιουργούν κύματα με πλάτος  $0,4\text{m}$  και με συχνότητα  $1\text{Hz}$ . Τα κύματα που δημιουργούνται διαδίδονται και προς τις δύο κατευθύνσεις με ταχύτητα  $2\text{m/s}$ , χωρίς αποσβέσεις. Θεωρούμε τη θέση  $O_1$  ως αρχή του άξονα  $x$  και μας απασχολεί το τι συμβαίνει δεξιά της πηγής  $O_1$  ( $x>0$ ).

i) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του μέσου.

ii) Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1=0,75\text{s}$ .

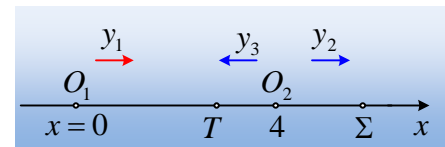
iii) Να σχεδιάσετε επίσης τη μορφή του μέσου τις χρονικές στιγμές:

A)  $t_2=3\text{s}$  και

B)  $t_3=3,25\text{s}$ .

#### Απάντηση:

i) Στην περιοχή που μας ενδιαφέρει ( $x>0$ ) διαδίδονται 3 κύματα, όπως σημειώνονται στο διπλανό σχήμα. Το κύμα από τη πηγή  $O_1$  που διαδίδεται προς τα δεξιά με εξίσωση:



$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{v} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \quad (1)$$

Το κύμα, από την πηγή  $O_2$  με κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπου αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο  $\Sigma$  στη θέση  $x$ , το οποίο απέχει κατά  $s$  από την πηγή του, θα έχουμε:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{s}{v} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x-4}{2} \right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 2 \right) (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } 4 \leq x \leq 4+2t \quad (2)$$

Τέλος το κύμα από την πηγή  $O_2$  το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, όπου για το τυχαίο σημείο  $T$ , στη θέση  $x$  θα ισχύει:

$$y_3 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{s'}{v} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{4-x}{2} \right) \rightarrow$$

$$y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 2 \right) (\text{S.I.}) \quad \text{με } t \geq 0 \text{ και } 4-2t \leq x \leq 4 \quad (3)$$

ii) Για τη στιγμή  $t_1=0,75\text{s}$  οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) = 0,4 \cdot \eta\mu(1,5\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (\text{S.I.}) \quad \mu\epsilon \quad x \leq 1,5\text{m} \quad (1\alpha)$$

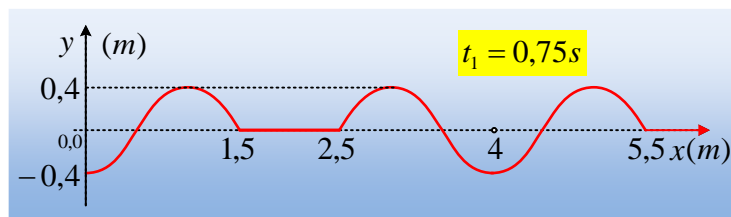
$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 2 \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 0,75 - \frac{x}{2} + 2 \right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu(5,5\pi - \pi x) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (\text{S.I.}) \quad \mu\epsilon \quad 4 \leq x \leq 5,5\text{m} \quad (2\alpha)$$

$$y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 2 \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 0,75 + \frac{x}{2} - 2 \right) \rightarrow$$

$$y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi x - 2,5\pi) = -0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \quad (\text{S.I.}) \quad \mu\epsilon \quad 2,5\text{m} \leq x \leq 4\text{m} \quad (3\alpha)$$

Με βάση τα παραπάνω και για τις θέσεις με  $x \geq 0$  έχουμε την παρακάτω μορφή του μέσου:



- iii) A) Τη χρονική στιγμή  $t_2$  το πρώτο κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση  $x = v \cdot t_2 = 6\text{m}$ . Συνεπώς στην περιοχή 0-4m έχουμε συμβολή του κύματος αυτού με το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά ( $y_3$ ). Αλλά και δεξιά της πηγής  $O_2$  έχουμε συμβολή στην περιοχή  $4\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$ , ενώ στην περιοχή  $6\text{m} \leq x \leq 10\text{m}$  διαδίδεται το κύμα  $y_2$  προς τα δεξιά.

Με βάση αυτά έχουμε:

α)  $0 \leq x \leq 4\text{m}$ :

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_3 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) + 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t + \frac{x}{2} - 2 \right) = \\ &= 2 \cdot 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t - \frac{x}{2} + 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t + \frac{x}{2} - 2}{2} = \\ &= 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi t - 2\pi) \quad (4) \end{aligned}$$

Οπότε τη στιγμή  $t_2$  παίρνουμε:

$$y = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi t_2 - 2\pi) = 0$$

β)  $4\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$ :

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} \right) + 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 2 \right) = \\ &= 2 \cdot 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} - t + \frac{x}{2} - 2}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t - \frac{x}{2} + 2}{2} = \end{aligned}$$

$$= 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(-2\pi) \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 1 \right) \rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 1 \right) \text{ (S.I.) (5)}$$

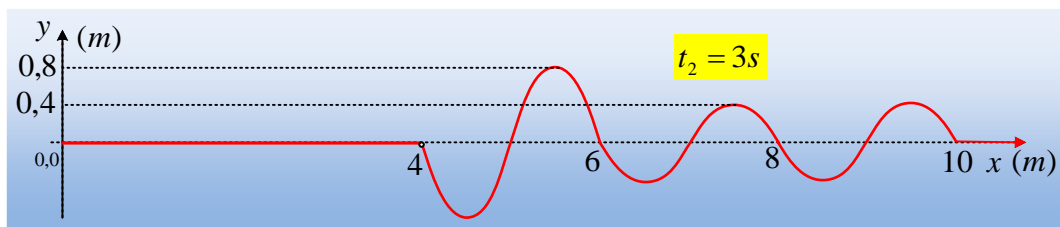
Οπότε τη στιγμή  $t_2$  παίρνουμε:

$$y = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 1 \right) = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 3 - \frac{x}{2} + 1 \right) = -0,8 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

γ)  $6\text{m} \leq x \leq 10\text{m}$ :

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 2 \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 3 - \frac{x}{2} + 2 \right) = -0,4 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

Έτσι η μορφή του μέσου είναι όπως παρακάτω:



Β) Τη στιγμή  $t_3 = 3,25\text{s}$  το πρώτο κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση  $x' = vt_3 = 6,5\text{m}$ , συνεπώς έχουμε:

α)  $0 \leq x \leq 4\text{m}$  ισχύει η σχέση (4) από όπου για  $t = 3,25\text{s}$  παίρνουμε:

$$y = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x + 2\pi) \cdot \eta\mu(2\pi \cdot 3,25 - 2\pi) \rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

β)  $4\text{m} \leq x \leq 6,5\text{m}$  από την (5) θα έχουμε:

$$y = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 1 \right) = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 3,25 - \frac{x}{2} + 1 \right) \rightarrow$$

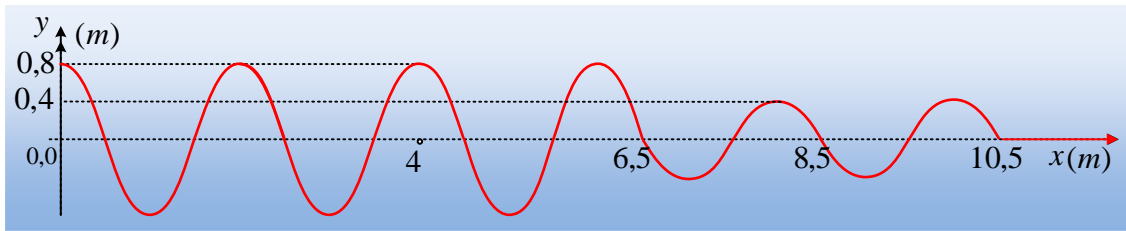
$$y = 0,8 \cdot \eta\mu(8,5\pi - \pi x) = 0,8 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

γ)  $6,5\text{m} \leq x \leq 10,5\text{m}$ :

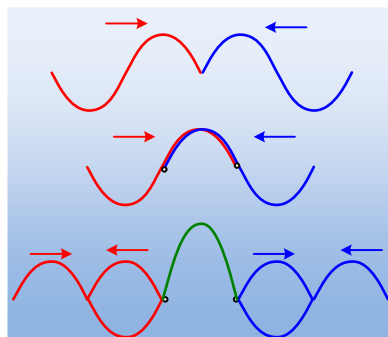
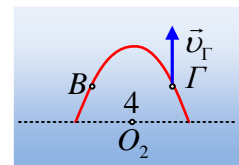
$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( t - \frac{x}{2} + 2 \right) = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left( 3,25 - \frac{x}{2} + 2 \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu(10,5\pi - \pi x) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)$$

Με βάση τα παραπάνω η μορφή του μέσου είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:

**Σχόλια:**

- 1) Αν προσέξουμε τις εξισώσεις (4) και (5), μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η πρώτη είναι εξίσωση στάσιμου κύματος, ενώ η δεύτερη εξίσωση τρέχοντος κύματος. Αυτό σημαίνει ότι κατά την συμβολή των κυμάτων  $y_1$  και  $y_3$  προκύπτει στάσιμο κύμα (δύο κύματα που διαδίδονται αντίθετα), ενώ κατά την συμβολή των κυμάτων (1) και (2) έχουμε ένα νέο τρέχον κύμα (τα δυο κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση).
- 2) Για την περιοχή  $0 \leq x \leq 4\text{m}$  τις δύο παραπάνω στιγμές  $t_2$  και  $t_3$ , έχει σχηματιστεί στάσιμο κύμα. Έτσι στην πρώτη περίπτωση, όλα τα σημεία περνούν από τη θέση ισορροπίας τους (ευθεία γραμμή), ενώ στην δεύτερη τα σημεία βρίσκονται σε μέγιστες απομακρύνσεις.
- 3) Ας πάρουμε δύο σημεία Β και Γ που ισαπέχουν από την πηγή  $O_2$ . Τη στιγμή  $t_3$  και τα δυο σημεία έχουν ίσες απομακρύνσεις, αλλά όχι ίδιες ταχύτητες ταλάντωσης. Το σημείο Β έχει μηδενική ταχύτητα και τη στιγμή αυτή βρίσκεται σε θέση πλάτους. Αντίθετα το σημείο Γ είναι ένα σημείο κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά, έχοντας ταχύτητα, όπως στο σχήμα.
- 4) Ένα ερώτημα που συχνά επιστρέφει είναι το εξής. Πώς γίνεται να έχει σχηματισθεί στάσιμο στην περιοχή  $0 \leq x \leq 4\text{m}$ , πράγμα που σημαίνει ότι σταματά η ροή ενέργειας διαμέσου των δεσμών και στη συνέχεια να μιλάς για συμβολή δεξιά της δεύτερης πηγής;  
Η αλήθεια είναι ότι από τη στιγμή που θα δημιουργηθεί ένας δεσμός, σταματούν να διαδίδονται τα κύματα και στο σημείο αυτό έχουμε ανάκλασή τους. Οπότε τα κύματα που διαδίδονται δεξιά της  $O_2$  είναι το  $y_2$  και το  $y_3$  που προκύπτει μετά από ανάκλαση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για περισσότερα, μπορείτε να διαβάσετε την ανάρτηση [εδώ](#).

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)