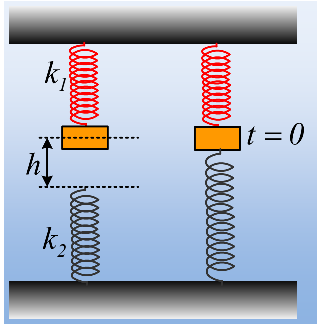
Δυο ταλαντώσεις με δύο κατακόρυφα ελατήρια.



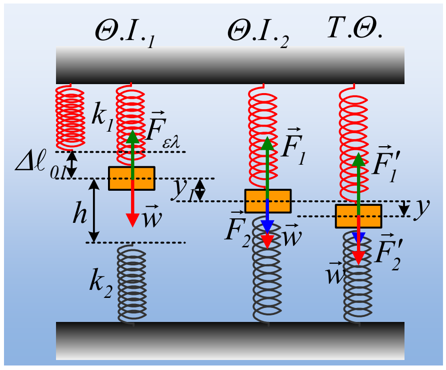
Ένα σώμα μάζας 1kg, ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k_1=30N/m, απέχοντας απόσταση h=0,8m από το άνω άκρο ενός δεύτερου κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k_2=10N/m. Οι άξονες των δύο ελατηρίων ταυτίζονται. Τραβάμε το κάτω ελατήριο και δένουμε το άκρο του με το σώμα και σε μια στιγμή (t=0) αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί.

i) Να αποδείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ, υπολογίζοντας το πλάτος και την ενέργεια ταλάντωσης.

ii) Τη χρονική στιγμή t_1=16/3 s το κάτω ελατήριο λύνεται. Να βρείτε το πλάτος και την ενέργεια της νέας ταλάντωσης του σώματος.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Το σώμα αρχικά ηρεμεί, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $\Delta\ell_{01}$. Από συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k_1\cdot \Delta\ell_{01}=mg \quad (1)$$

Το σώμα, δεμένο και στα δύο ελατήρια, θα ισορροπεί γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας (2) χαμηλότερα κατά y_1, από την προηγούμενη θέση ισορροπίας του (1). Στη θέση αυτή:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_1=w+F_2 \rightarrow$$

$$k_1\cdot\left(\Delta\ell_{01}+y_1\right)=mg+k_2\left(h-y_1\right) \quad (2) \xrightarrow{(1)}$$

$$mg+k_1\cdot y_1=mg+k_2\cdot h-k_2\cdot y_1 \rightarrow$$

$$y_1=\frac{k_2 h}{k_1+k_2}=\frac{10\cdot 0{,}8}{30+10}m=0{,}2m$$

Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπως στο σχήμα, σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y από την Θ.Ι. (2), έχουμε (θεωρούμε την προς τα κάτω κατεύθυνση θετική):

$$\Sigma F=F'_2+w-F'_1=k_2\cdot\left(h-y_1-y\right)+mg-k_1\left(\Delta\ell_{01}+y_1+y\right)\xrightarrow{(1\&2)}$$

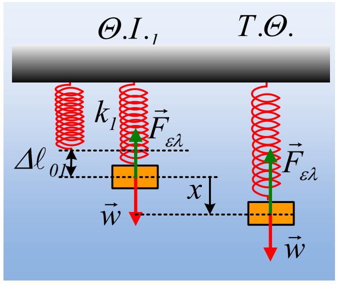
$$\Sigma F=k_2\cdot h-k_2 y_1-k_2 y+mg-k_1\Delta\ell_{01}-k_1 y_1-ky=-(k_1+k_2)\cdot y$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από την θέση ισορροπίας (2), η οποία είναι χαμηλότερα κατά 0,2m από την αρχική θέση του, με σταθερά επαναφοράς D=k_1+k_2. Αλλά η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική, συνεπώς αυτή είναι ακραία θέση οπότε το πλάτος ταλάντωσης, είναι ίσο με την απόσταση y_1. Δηλαδή A_1=0,2m, ενώ:

$$E_{\tau/1}=\frac{1}{2}DA_1^2=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A_1^2=\frac{1}{2}(30+10)\cdot 0{,}2^2 J=0{,}8J$$

ii) Από τη στιγμή που θα λυθεί το 2^{ο} ελατήριο, το σώμα θα παραμείνει πια συνδεδεμένο με το πάνω ελατήριο.

Αλλά τότε σε μια τυχαία θέση, η οποία θα απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας (1), όπως στο σχήμα, με θετική την προς τα κάτω κατεύθυνση, θα έχουμε:



$$\Sigma F = w - F_{\varepsilon\lambda} = mg - k_1(\Delta\ell_{01} + x) \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F = -k_1 \cdot x$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα ξεκινά μια νέα ΑΑΤ, γύρω από την θέση ισορροπίας (1).

Εξάλλου το σώμα ξεκίνησε την **πρώτη** ταλάντωσή του τη στιγμή t=0 από την άνω ακραία θέση ταλάντωσης. Έτσι θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, για την απομάκρυνσή του, θα έχουμε:

$x = A \cdot ημ(ωt+φ_o)$ και για t=0, $x=+A_1$, οπότε $A_1 = A_1 \cdot ημφ_o$ οπότε $φ_o = π/2$ και :

$$x = 0{,}2 \cdot ημ(ωt = π/2)$$

όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m}} = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\dfrac{30 + 10}{1}} rad/s = 2\pi \ \ rad/s$

Και, με αντικατάσταση, θα έχουμε:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot ημ\left(2\pi \cdot \frac{16}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2 \cdot ημ\left(10\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = 0{,}2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)m = -0{,}1m$$

Δηλαδή το σώμα βρίσκεται 0,1m, κάτω από τη θέση ισορροπίας (2), τη στιγμή που λύνεται το κάτω ελατήριο και το σώμα θα συνεχίσει πια να ταλαντώνεται στο άκρο τογ πάνω ελατηρίου, απέχοντας κατά $|x'| = |y_1| + |x_1| = 0{,}3m$ από την νέα θέση ισορροπίας του. Εξάλλου, τη στιγμή αυτή το σώμα έχει και κάποια ταχύτητα την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με βάση την εξίσωση $υ = υ_{mx} \cdot συν(ωt+π/2)$. Αλλά ας το δούμε μέσω ενεργειών:

Από την ενέργεια ταλάντωσης της 1^{ης} ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{\tau/1} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)A_1^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)A_1^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2$$

Όπου υ η ταχύτητα του σώματος, ίδια με την ταχύτητά του μόλις λυθεί το κάτω ελατήριο, οπότε από την ενέργεια της 2^{ης} ταλάντωσης, θα έχουμε:

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}k_1 x'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}k_1 A_2^2 \quad (3)$$

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}k_1 x'^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)A_1^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 \rightarrow$$

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}30 \cdot 0{,}3^2 J + \frac{1}{2}(30 + 10) \cdot 0{,}2^2 J - \frac{1}{2}(30 + 10) \cdot (-0{,}1)^2 J = 1{,}95J$$

Τέλος από την (3) έχουμε:

$$A_2 = \sqrt{\frac{2E_{\tau/2}}{k_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,95}{30}}m = 0,36m$$

dmargaris@gmail.com