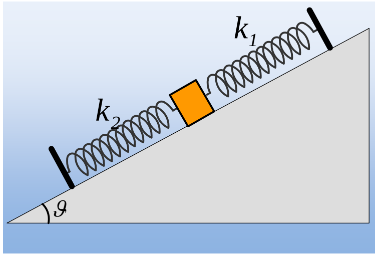
Δυο ΑΑΤ και μία Ταλάντωση.



Ένα σώμα μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ=30°, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k_1=40N/m, ενώ εφάπτεται στο ελεύθερο άκρο ενός δεύτερου ελατηρίου σταθεράς k_2=120N/m (χωρίς να έχει δεθεί), το οποίο έχει το φυσικό μήκος του, όπως στο διπλανό σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα, παράλληλα στο επίπεδο, προς τα πάνω κατά 0,4m και τη στιγμή t=0 αφήνεται να κινηθεί.

i) Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα εκτελέσει μια ταλάντωση, αποτελούμενη από τμήματα δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της οποίας να υπολογιστεί η περίοδος.

ii) Να βρεθεί η εξίσωσης της απομάκρυνσης x=f(t) από την αρχική θέση ισορροπίας του και να γίνει η γραφική της παράσταση, σε βαθμολογημένους άξονες, μέχρι να ολοκληρωθεί μια ταλάντωση, παίρνοντας την αρχική απομάκρυνση ως θετική.

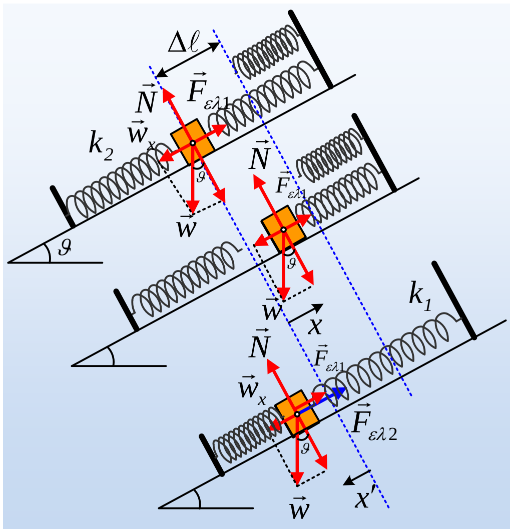
iii) Για τη στιγμή που το σώμα έχει διανύσει διάστημα s=0,5m, να υπολογιστούν:

α) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και

β) Ο ρυθμός μεταβολής της.

Δίνονται $g=10m/s^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα, έχει σχεδιαστεί η θέση ισορροπίας του σώματος, μια θέση δεξιά σε απομάκρυνση x και μια δεύτερη τυχαία θέση, όπου το ελατήριο k_2 έχει συμπιεστεί κατά x΄.

Στη θέση ισορροπίας ΣF=0 ή

$$F_{\varepsilon\lambda 1}=w_x \rightarrow k_1 \cdot \Delta\ell = mg\cdot \eta\mu\theta$$

Στην πάνω θέση, σε απομάκρυνση x:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda 1} - w_x = k_1(\Delta\ell - x) - mg\cdot\eta\mu\theta = -k_1 x$$

Συνεπώς στη διάρκεια που το σώμα βρίσκεται σε επαφή μόνο με το πάνω ελατήριο εκτελεί ΑΑΤ σταθεράς $D_1=k_1$.

Όταν το σώμα, κατεβαίνοντας, αρχίσει να συσπειρώνει το ελατήριο σταθεράς k_2 (κάτω σχήμα) και στη θέση με απομάκρυνση μέτρου x΄, έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda 1} + F_{\varepsilon\lambda 2} - w_x = k_1(\Delta\ell + x') + k_2 x' - mg\cdot\eta\mu\theta = (k_1+k_2)x'$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας (θετική κατεύθυνση) και το μέτρο της είναι ανάλογο με το μέτρο της απομάκρυνσης, από τη θέση ισορροπίας, συνεπώς και πάλι το σώμα εκτελεί ΑΑΤ σταθεράς $D_2 = k_1 + k_2$.*

Το σώμα λοιπόν θα κινηθεί προς τα κάτω, θα συσπειρώσει το κάτω ελατήριο και θα ξαναγυρίσει στην αρχική του θέση, ολοκληρώνοντας έτσι μια ταλάντωση, η οποία θα αποτελείται από δυο τμήματα, που το καθένα θα είναι μια ΑΑΤ, αλλά η συνολική κίνηση δεν θα είναι απλή αρμονική ταλάντωση, απλά θα είναι ταλάντωση, με περίοδο:

$$T = \frac{T_1}{4} + \frac{T_2}{2} + \frac{T_1}{4} = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Όπου $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}s = 1s$ και $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{40+120}}s = 2\pi\sqrt{\frac{1}{160}} = 0{,}5s$

Οπότε T=0,75s.

ii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την πρώτη ΑΑΤ, θα είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega_1 t + \varphi)$$

όπου A=0,4m, αφού τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί (t=0) το σώμα ξεκινά να ταλαντώνεται με μηδενική ταχύτητα, ενώ με αντικατάσταση στην εξίσωση αυτή παίρνουμε:

$$A = A \cdot \eta\mu(0+\varphi) \rightarrow \eta\mu\varphi = 1 \text{ ή } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Με βάση αυτά η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$x = 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.), με } 0 \le t \le 0{,}25$$

Αλλά κατά την επιστροφή, το σώμα φτάνει στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, οπότε:

$$x = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi(t - 0{,}5)) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi) \text{ (S.I.), με } 0{,}5 \le t \le 0{,}75$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για την απομάκρυνση της δεύτερης ταλάντωσης θα είναι:

$$x = A' \cdot \eta\mu(\omega_2 t' + \pi)$$

αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση και $t'=t-0{,}25s$, $\omega_2=2\pi/T_2=4\pi$ (rad/s), ενώ η μέγιστη ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει το σώμα, στη θέση ισορροπίας $\upsilon_{max}=\omega_1 A=0{,}8\pi$ m/s, θα είναι και μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Οπότε:

$$\upsilon_{max} = \omega_2 A' \rightarrow A' = \frac{\upsilon_{max}}{4\pi} = \frac{0{,}8\pi}{4\pi} m = 0{,}2m$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης γίνεται:

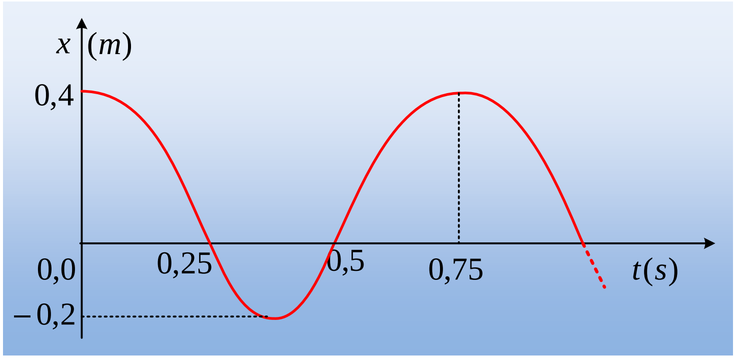
$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu(4\pi t - 4\pi \cdot 0{,}25 + \pi) \rightarrow$$

$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu(4\pi t) \text{ (S.I.), με } 0{,}25 \le t \le 0{,}5$$

Ας τα «συμμαζέψουμε»:

$$x = \begin{cases} 0{,}4 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) & \text{(S.I.), με } 0 \le t \le 0{,}25 \\ 0{,}2 \cdot \eta\mu(4\pi t) & \text{(S.I.), με } 0{,}25 \le t \le 0{,}5 \\ 0{,}4 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi) & \text{(S.I.), με } 0{,}5 \le t \le 0{,}75 \end{cases}$$

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες, το διάγραμμα της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:



iii) Όταν το σώμα διανύσει διάστημα s=0,5m, βρίσκεται στη θέση x=-0,1m. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας για την δεύτερη ταλάντωση παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}D_2x^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}D_2A'^2$$

$$\upsilon=\pm\sqrt{\frac{D_2}{m}\left(A'^2-x^2\right)}=\pm\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}\left(A'^2-x^2\right)}$$

Και με αντικατάσταση, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σώμα κατεβαίνει παίρνουμε:

$$\upsilon=-\sqrt{\frac{40+120}{1}\left(0{,}2^2-0{,}1^2\right)}\,m/s=-\sqrt{160(0{,}04-0{,}01)}\,m/s=-4\sqrt{0{,}3}\,m/s$$

α) Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης στη θέση αυτή θα είναι:

$$U=\frac{1}{2}D_2x^2=\frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2=\frac{1}{2}160\cdot 0{,}1^2\,J=0{,}8J$$

β) Το έργο της δύναμης επαναφοράς συνδέεται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας, με την σχέση: $W_{F\varepsilon\pi 1\to 2}=U_1-U_2$, ή $W_{F\varepsilon\pi 1\to 2}=-\Delta U$ οπότε:

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}=-\frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt}=-|\Sigma F|\cdot|\upsilon|\sigma\upsilon\nu\alpha=-|D_2x||\upsilon|\sigma\upsilon\nu 180^o=+|D_2x||\upsilon|\rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt}=(40+120)\cdot 0{,}1\cdot 4\sqrt{0{,}3}\,J/s=64\sqrt{0{,}3}\,J/s$$

*Σημείωση:

Θα μπορούσαμε όταν μιλάμε για τη δεύτερη ταλάντωση να θεωρούσαμε την προς τα αριστερά (και κάτω!) κατεύθυνση ως θετική και να γράφαμε:

$$\Sigma F_x=w_x-F_{\varepsilon\lambda 1}-F_{\varepsilon\lambda 2}=mg\eta\mu\theta-k_1(\Delta\ell+x')-k_2x'-mg\cdot\eta\mu\theta=-(k_1+k_2)x'$$

Οπότε να εμφανιζόταν και το πολυπόθητο (-) της συνθήκης για ΑΑΤ!!! Προτιμήθηκε να μην αλλάξουμε θετική φορά και την απόδειξη να την στηρίξουμε στην ουσία της συνθήκης.

Θα μπορούσαμε βέβαια και να δουλέψουμε με αλγεβρικές τιμές μεγεθών, αλλά έχω την άποψη, ότι μόνο προβλήματα θα δημιουργούσε…

dmargaris@gmail.com