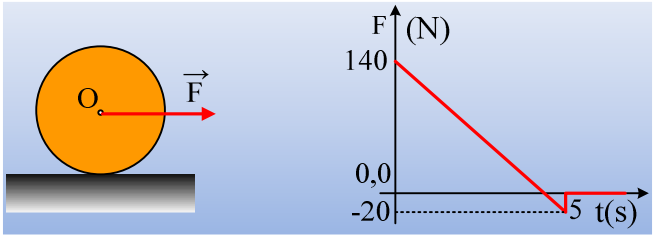
Γενικευμένοι νόμοι και ολίσθηση τροχού.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας τροχός μάζας Μ=10kg και ακτίνας =0,5m, ο οποίος παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}4$. Σε μια στιγμή t=0 ασκείται στο κέντρο Ο του τροχού οριζόντια δύναμη F, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.



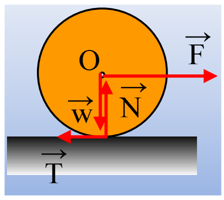
i) Να αποδειχθεί ότι ο τροχός θα αρχίσει να περιστρέφεται, αλλά και να ολισθαίνει.

ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που ο τροχός θα πάψει να ολισθαίνει και πλέον θα κυλίεται.

iii) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, μέχρι την παραπάνω στιγμή, εξαιτίας της τριβής που ασκείται στον τροχό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= ½ MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό. Το ερώτημα είναι τι κίνηση κάνει ο τροχός, ξεκινώντας την κίνησή του; Ας υποθέσουμε ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Τότε με εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=M\alpha_{cm} \rightarrow F-T= M\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R= ½ MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½ MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$T= ½ M\cdot\alpha_{cm} \quad (3)$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F=\frac{3}{2}Ma_{cm} \quad (4)$$

$$a_{cm}=\frac{2F}{3M}$$

Συνεπώς η αρχική τιμή του μέτρου της ασκούμενης τριβής είναι:

$$T_0=\frac{F_0}{3}\approx 46{,}7N$$

Αλλά η μέγιστη τριβή που μπορεί να ασκηθεί στον τροχό, η οριακή στατική τριβή έχει μέτρο:

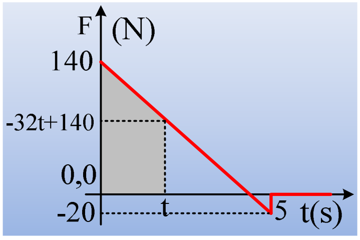
$$T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu\cdot N=\mu\cdot Mg=0{,}4\cdot 10\cdot 10N=40N.$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ήταν λάθος και ο τροχός, στρέφεται μεν, αλλά και ολισθαίνει.

ii) Έστω ότι η ολίσθηση σταματά τη στιγμή t. Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του τροχού, έχουμε:

$$\sum \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \to \Delta p = F \cdot \Delta t - T \cdot \Delta t \to$$

$$p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t$$



Αλλά το άθροισμα ΣF·Δt είναι ίσο με το εμβαδόν του «γκριζαρισμένου» χωρίου στο διάγραμμα.

Μαθηματική παρένθεση:

(Η συνάρτηση της δύναμης, είναι της μορφής F=αt+β, όπου:

Για t=0, F=140N → β=140N και για t=5s, F=-20N → α=-32N/s

Οπότε F= -32t+140 (μονάδες στο S.I.)).

Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται: $p - 0 = \sum F \cdot \Delta t - T \cdot t \to$

$$M\upsilon_{cm} = \frac{140 - 32t + 140}{2} t - 40t \to$$

$$10\upsilon_{cm} = 140t - 16t^2 - 40t \to$$

$$\upsilon_{cm} = 10t - 1{,}6t^2 \quad (5)$$

Εξάλλου από τον αντίστοιχο γενικευμένο νόμο, για την στροφική κίνηση παίρνουμε, για το ίδιο χρονικό διάστημα:

$$\sum \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \to \Delta L = \sum \tau \cdot \Delta t \to$$

$$L\text{-}0 = T \cdot R \cdot t \to ½\, MR^2 \cdot \omega = T \cdot R \cdot t \text{ ή}$$

$$½\, M(R\omega) = T \cdot t$$

Όμως αφού τη στιγμή t ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει υ_{cm}=ωR και η παραπάνω σχέση δίνει:

$$M\, \upsilon_{cm} = 80t \text{ ή}$$

$$\upsilon_{cm} = 8 \cdot t \quad (6)$$

Από (5) και (6) παίρνουμε:

$$80t = 100t - 16t^2 \to 16t^2 = 20t \to \ t=0 \text{ ή } t=1{,}25s$$

Προφανώς η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η δεύτερη λύση, αφού η τιμή t=0, αντιστοιχεί στην αρχική θέση, ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει μέτρο υ_{cm}=8·t=10m/s.

iii) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη F μεταφέρει ενέργεια στον τροχό (η ισχύς της δύναμης) είναι:

$$\frac{dW}{dt} = F \cdot \upsilon_{cm} \to dW = F \cdot \upsilon_{cm} \cdot dt \to$$

$$W_F = \int_0^{1,25} F \cdot \upsilon_{cm} \cdot dt = \int_0^{1,25} (-32t + 140) \cdot (10t - 1{,}6t^2) \cdot dt \to$$

$$W_F = -\int_0^{1,25} 320t^2 \cdot dt + \int_0^{1,25} 51{,}2t^3 \cdot dt + \int_0^{1,25} 1400t \cdot dt - \int_0^{1,25} 224t^2 \cdot dt$$

$$W_F = 51{,}2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{1,25} - 544\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{1,25} + 1400\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1,25} \approx 771J$$

Από την διατήρηση της ενέργειας, παίρνουμε ότι, η παραπάνω ενέργεια θα ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του τροχού και της ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική. Δηλαδή:

$$W_F = K + Q \rightarrow$$

$$Q = W_F - \left(\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) = W_F - \left(\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2\right) \rightarrow$$

$$Q = W_F - \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^2 = 771J - \frac{3}{4}10\cdot 10^2\,J = 21J$$

Σχόλια.

1) Στην πραγματικότητα, παραπάνω εφαρμόσαμε το θεώρημα ώθησης ορμής (χωρίς και να το ονομάσουμε…). Πράγματι αν εφαρμόσουμε τυπικά το Θ.Ω.Ο. για την κίνηση του κέντρου μάζας Ο του τροχού, από τη στιγμή μηδέν, μέχρι τη στιγμή που παύει η ολίσθηση, θα έχουμε:

$$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{\Omega}_F + \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_w + \vec{\Omega}_N$$

Όπου $\vec{\Omega}_w + \vec{\Omega}_N = 0$ και παίρνοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική θα έχουμε:

$$p_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 = \Omega_F - \Omega_T \rightarrow$$

$$M\upsilon_{cm} = \int_0^t F dt - T\cdot t \rightarrow$$

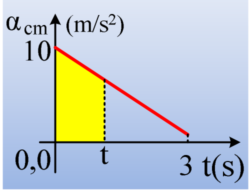
$$M\upsilon_{cm} = \int_0^t (-32t + 140)dt - T\cdot t = -16t^2 + 140t - 40t = -16t^2 + 100t \quad \text{(σχέση 5).}$$

2) Βέβαια θα μπορούσαμε να είμαστε περισσότερο «συντηρητικοί» δουλεύοντας με τα βασικά! Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας, για το χρονικό διάστημα της ολίσθησης, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F - T = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{-32t + 140 - 40}{M} = -3{,}2t + 10 \ \text{(S.I.)}$$

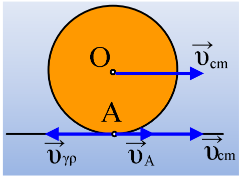
Κάνουμε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, παίρνοντας την διπλανή εικόνα. Το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, είναι ίσο με την μεταβολή της ταχύτητας μέχρι τη στιγμή t. Έτσι:



$$\upsilon_{cm} - 0 = \frac{10 - 3{,}2t + 10}{2}t = -1{,}6t^2 + 10t \rightarrow$$

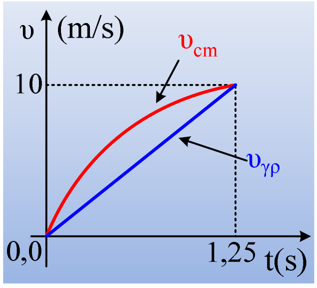
$$\upsilon_{cm} = -1{,}6t^2 + 10t \ \text{(S.I.)} \ \text{ξανά η σχέση (5).}$$

3) Ας εστιάσουμε στην ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος, σημείο Α. Το σημείο Α έχει μια συνιστώσα ταχύτητας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, την υ_{cm} και μια συνιστώσα $\upsilon_{\gamma\rho}$, λόγω της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Για τα μέτρα των ταχυτήτων αυτών, έχουμε βρει τις εξισώσεις:



$$\upsilon_{cm} = -1{,}6t^2 + 10t \quad \text{και } \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R = 8 \cdot t$$

Κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων, στους ίδιους άξονες, παίρνουμε την εικόνα του σχήματος.



Τη στιγμή που τέμνονται η παραβολή με την ευθεία (τη στιγμή t=1,25s), τα μέτρα των δύο ταχυτήτων εξισώνονται και από εκεί και πέρα μηδενίζεται η ταχύτητα του σημείου Α και ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Τη στιγμή αυτή (t=1,25s) η δύναμη έχει μέτρο F=100N και με το που σταματά η ολίσθηση, η τριβή, από τριβή ολίσθησης μέτρου 40N, γίνεται στατική με μέτρο $T = \frac{F}{3}$=33,3N.

Να σημειωθεί ότι το μέτρο της δύναμης F, μειώνεται από εκεί και πέρα και θα μειώνεται συνεχώς και το μέτρο της στατικής τριβής, το οποίο κάθε στιγμή θα ικανοποιεί τη σχέση $T = \frac{F}{3}$, συνεπώς θα μειώνεται και η αυτή, χωρίς να «κινδυνεύει» να μεταπέσει σε τριβή ολίσθησης….

dmargaris@sch.gr