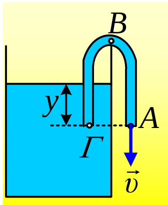
Βγάζοντας νερό με αναρρόφηση από μια δεξαμενή.

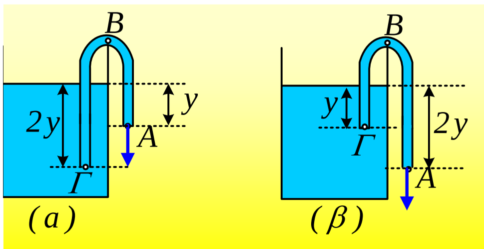


Διαθέτουμε μια δεξαμενή με νερό. Για να αφαιρέσουμε μια ποσότητα νερού από την δεξαμενή, χρησιμοποιούμε έναν ελαστικό σωλήνα σταθερής διατομής $A=2cm^2$, τον οποίο αφού λυγίσουμε, βυθίζουμε το ένα άκρο του Γ κατά y=45cm στο νερό. Με αναρρόφηση στο άλλο άκρο Α, το οποίο βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το Γ, πετυχαίνουμε την εκροή του νερού.

i) Να βρεθεί σε πόσο χρονικό διάστημα μπορούμε να γεμίσουμε ένα δοχείο όγκου 12L, θεωρώντας ότι το εμβαδόν της επιφάνειας της δεξαμενής, είναι πολύ μεγαλύτερο από το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα.

ii) Να υπολογιστεί η πίεση στο άκρο Γ και στο ανώτερο σημείο Β του σωλήνα, το οποίο απέχει απόσταση h=1m από το επίπεδο ΑΓ.

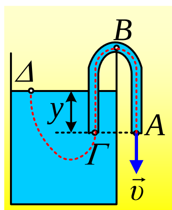
iii) Προκειμένου να συντομευτεί το απαιτούμενο χρονικό διάστημα άντλησης του νερού, προτείνεται να χρησιμοποιήσουμε μακρύτερο σωλήνα, σε δυο διαφορετικά ενδεχόμενα. Στο πρώτο, το βυθιζόμενο τμήμα του σωλήνα είναι 2y, στον δεύτερο το άκρο Α βρίσκεται κατά y χαμηλότερα του Γ, όπως στα σχήματα.



Ποιον τρόπο θα επιλέγατε και γιατί; Να βρεθεί η πίεση στο άκρο Γ του σωλήνα και για τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000kg/m^3$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ κκαι η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}=10^5N/m^2$, ενώ το νερό, να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό και όλες οι ροές μόνιμες και στρωτές.

Απάντηση:



i) Έστω μια ρευματική γραμμή, στο σχήμα με διακεκομμένη κόκκινη γραμμή. Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli, μεταξύ των σημείων Α και Δ, και παίρνουμε:

$$p_\Delta + \rho g y + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow$$

Αλλά $p_A=p_\Delta=p_{ατ}$, ενώ δεχόμενοι μηδενική την ταχύτητα ροής στο Δ, (με βάση την εξίσωση της συνέχειας $A_\Delta \cdot \upsilon_\Delta = A_A \cdot \upsilon_A$ και αφού $A_\Delta >> A_A$, θα έχουμε $\upsilon_\Delta << \upsilon_A$), θα έχουμε:

$$\rho g y = \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow \upsilon_A = \sqrt{2gy} \rightarrow$$

$$\upsilon_A = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}45} m/s = 3m/s$$

Αλλά για την παροχή στο άκρο του σωλήνα Α έχουμε:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \upsilon_A \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{A\upsilon_A} = \frac{12 \cdot 10^{-3} m^3}{2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 3m/s} = 20s$$

ii) Από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές του σωλήνα Α και Γ έχουμε:

$$A_A \cdot \upsilon_A = A_\Gamma \cdot \upsilon_\Gamma \rightarrow \upsilon_A = \upsilon_\Gamma.$$

Πράγμα που πρακτικά σημαίνει, ότι σε όλα τα σημεία του σωλήνα η ταχύτητα ροής παραμένει σταθερή.

Εφαρμόζουμε ξανά το νόμο του Bernoulli, μεταξύ των σημείων Α και Γ, και παίρνουμε:

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_\Gamma = p_A = p_{\alpha\tau} = 10^5 N/m^2$$

Με την ίδια λογική, μεταξύ Β και Α έχουμε:

$$p_B + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_B + \rho gh = p_A \rightarrow p_B = p_A - \rho gh \rightarrow$$

$$p_B = 10^5 N/m^2 - 1.000 \cdot 10 \cdot 1 N/m^2 = 0{,}9 \cdot 10^5 N/m^2$$

iii) Εφαρμόζουμε ξανά το νόμο Bernoulli μεταξύ του Α και του Δ, όπου παίρνουμε ξανά $\upsilon_\Delta=0$ και έστω z η κατακόρυφη απόστασή τους:

$$p_\Delta + \rho gz + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Delta^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_A = \sqrt{2gz}$$

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η ταχύτητα εκροής, εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη απόσταση του άκρου του σωλήνα Α, από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού της δεξαμενής. Συνεπώς στο σχήμα β) όπου η απόσταση είναι 2y, θα έχουμε και μεγαλύτερη ταχύτητα εκροής, άρα και μεγαλύτερη παροχή, με αποτέλεσμα να χρειαστούμε λιγότερο χρόνο για την άντληση των 12L νερού.

Με βάση τα προηγούμενα, σε όλες τις περιπτώσεις $\upsilon_\Gamma=\upsilon_A$, οπότε με εφαρμογή του νόμου Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ, παίρνουμε:

Σχήμα α): $$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 + \rho g(2y - y) \rightarrow$$

$$p_{\Gamma} = p_A + \rho g y = 10^5\, N/m^2 + 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}45 N/m^2 = 1{,}045 \cdot 10^5\, N/m^2$$

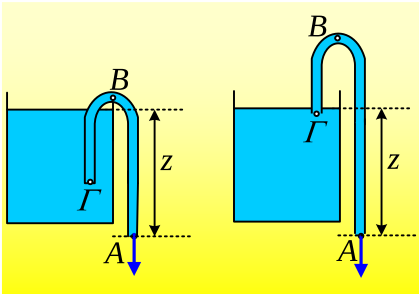
Σχήμα β):
$$p_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_{\Gamma}^2 + \rho g y = p_A + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_{\Gamma} = p_A - \rho g y = 10^5\, N/m^2 - 1.000 \cdot 10 \cdot 0{,}45 N/m^2 = 0{,}955 \cdot 10^5\, N/m^2$$

Σχόλια:

Με βάση τα παραπάνω, η ταχύτητα εκροής στο άκρο Α του σωλήνα, **δεν εξαρτάται**:

1) Από το βυθισμένο μήκος του σωλήνα. Είτε σε μεγάλο βάθος, είτε κοντά στην επιφάνεια, η ταχύτητα εκροής εξαρτάται μόνο, από την κατακόρυφη απόσταση z ($\upsilon_A = \sqrt{2gz}$).



2) Δεν παίζει καμιά σημασία, το ύψος του ανώτερου σημείου Β του σωλήνα. Σε όλη την παραπάνω μελέτη, δεν είχαμε κανένα περιορισμό για την κατακόρυφη απόσταση ΑΒ. Και όμως υπάρχει ένας περιορισμός! Στην ii) ερώτηση υπολογίσαμε την πίεση στο σημείο Β, $p_B = p_A - \rho g h$. Με την αύξηση του ύψους h, μικραίνει η πίεση στο Β. Η μικρότερη όμως τιμή της πίεσης στο Β, είναι η μηδενική! Αλλά τότε:

$$0 = p_A - \rho g h_{max} \rightarrow$$

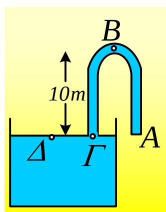
$$h_{max} = \frac{p_A}{\rho g} = \frac{10^5}{1.000 \cdot 10} m = 10m$$

Δηλαδή στο δεξιό σκέλος του σωλήνα, δεν μπορεί να υπάρχει μεγαλύτερη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του ανώτερου σημείου και του άκρου εκροής Α. Αλλά τότε αν έρθουμε στο αριστερό σκέλος, στην περίπτωση αυτή, που δεν υπάρχει πια ροή και πάρουμε ένα σημείο στην επιφάνεια Δ, θα έχουμε:

$$p_{\Delta} - p_B = \rho g h_{B\Delta} \rightarrow$$

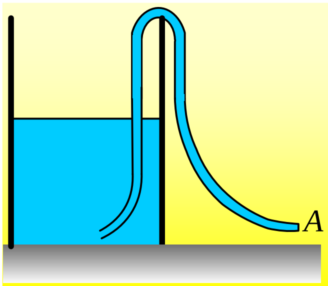
$$h_{B\Delta} = \frac{p_{\Delta}}{\rho g} = \frac{10^5}{1.000 \cdot 10} m = 10m$$

Τι σημαίνουν αυτά; Ότι το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να ανέβει το νερό, πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, είναι οριακά τα 10m και αυτό θα επιτευχθεί στην περίπτωση, που και το άκρο Α, είναι στο ύψος της επιφάνειας της δεξαμενής, όπως στο σχήμα.

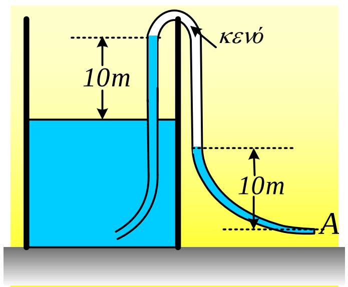


Ας φανταστούμε δηλαδή, έχουμε μια βαθιά δεξαμενή στην οποία η επιφάνεια του νερού, βρίσκεται σε βάθος Η=12m. Βυθίζουμε στη δεξαμενή, ένα μακρύ λάστιχο, οπότε γεμίζει με νερό. Κλείνοντας το ένα του άκρο Α, το τραβάμε και το βγάζουμε έξω, ώστε να τραβήξουμε νερό.

Τι θα συμβεί;



Στο ανώτερο σημείο η πίεση θα μηδενιστεί και θα χυθεί κάποια ποσότητα νερού από το άκρο Α, ενώ θα παραμείνει στο εσωτερικό του, νερό σε ύψος 10m. Το ίδιο θα συμβεί και στο αριστερό σκέλος του σωλήνα και η κατάσταση θα είναι αυτή του παρακάτω σχήματος, χωρίς βέβαια να είναι δυνατή η παραπέρα εκροή νερού από την δεξαμενή….



Συμπέρασμα; Από βάθος μεγαλύτερο από 10m, δεν μπορεί να γίνει άντληση νερού με αναρρόφηση…

dmargaris@gmail.com