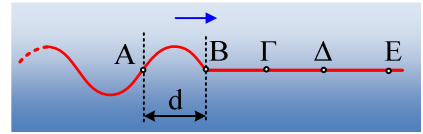


Από ένα στιγμιότυπο φάσεις και εξισώσεις κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα, από τα αριστερά προς τα δεξιά, με συχνότητα 0,5 Hz και στο σχήμα βλέπετε ένα στιγμιότυπο του κύματος, κάποια στιγμή t_0 . Δίνονται οι αποστάσεις $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)=(\Delta E)=d=1\text{ m}$, ενώ η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου A είναι 0,4 m.



- i) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρονικό διάστημα 2,5 s.
- ii) Να βρεθεί η φάση των σημείων A, B, Γ, Δ και E τη στιγμή t_0 , καθώς και τη χρονική στιγμή $t_0+2,5\text{ s}$.
- iii) Αν το παραπάνω στιγμιότυπο δείχνει την εικόνα του μέσου τη χρονική στιγμή $t_0=0$, ενώ για να γράψουμε την εξίσωση του κύματος, ορίζουμε ως αρχή του άξονα ($x=0$) το σημείο A, να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- iv) Ποια θα ήταν αντίστοιχα η εξίσωση του κύματος, αν αλλάζαμε την αρχή του άξονα και παίρναμε $x=0$, το σημείο Γ;

Απάντηση:

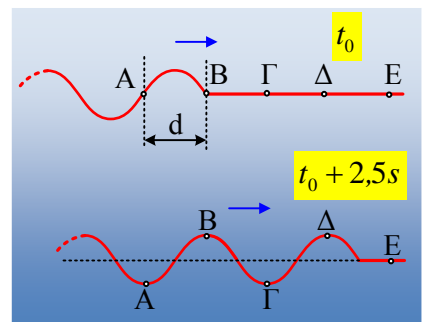
- i) Με βάση το σχήμα, η απόσταση d , είναι ίση με μισό μήκος κύματος, άρα $\lambda=2d=2\text{ m}$. Αλλά τότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση:

$$v=\lambda\cdot f=2\cdot 0,5\text{ m/s}=1\text{ m/s}.$$

Αλλά τότε σε χρονικό διάστημα 2,5s το κύμα θα έχει διαδοθεί προς τα δεξιά κατά:

$$\Delta x=v\cdot\Delta t=1\cdot 2,5\text{ m}=2,5\text{ m}$$

Φτάνοντας στο μέσον του τμήματος ΔΕ, χωρίς να αλλάζει μορφή, οπότε το αντίστοιχο στιγμιότυπο θα είναι αυτό του διπλανού σχήματος.



- ii) Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε για τις φάσεις των σημείων:
Το σημείο B, μόλις ξεκινά την ταλάντωσή του, κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, συνεπώς η φάση του είναι μηδενική ($\varphi_B=0$). Αλλά τότε το σημείο A, έχει ήδη εκτελέσει μισή ταλάντωση, έχοντας φάση $\varphi_A=\pi$.
Τα σημεία Γ, Δ και E δεν συμμετέχουν σε καμιά ταλάντωση και δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για την φάση (σε μια ανύπαρκτη ταλάντωση...).

Τη χρονική στιγμή $t_0+2,5\text{ s}$, με την ίδια λογική βρίσκουμε:

$$\varphi_\Delta = \frac{\pi}{2}\text{ rad}, \quad \varphi_\Gamma = \frac{3\pi}{2}\text{ rad}, \quad \varphi_B = \frac{5\pi}{2}\text{ rad}, \quad \varphi_A = \frac{7\pi}{2}\text{ rad},$$

Ενώ δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για τη φάση του σημείου E.

- iii) Το σημείο B, που βρίσκεται στη θέση $x=1$ m, εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_B = A \cdot \eta\mu\omega t = A \cdot \eta\mu(2\pi f t) \rightarrow$$

$$y_B = 0,2 \cdot \eta\mu(\pi) \text{ (S.I.)}$$

Αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο P, δεξιά του B, στη θέση x .

Για να φτάσει το κύμα στο σημείο P, θα περάσει χρονικό διάστημα $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{x-1}{1} s = (x-1)s$, οπότε η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου P, θα είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\pi(t - t_1) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi[t - (x-1)] = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ με } t \geq \frac{x-1}{v} \text{ ή } t \geq (x-1)s \quad (1)$$

- iv) Ας πάρουμε ξανά ένα τυχαίο σημείο P, δεξιά του B, στη θέση x .

Για να φτάσει το κύμα στο σημείο P, θα περάσει χρονικό

διάστημα $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{x+1}{1} s = (x+1)s$, οπότε η εξίσωση τα-

λάντωσης του τυχαίου σημείου P, θα είναι:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\pi(t - t_1) = 0,2 \cdot \eta\mu\pi[t - (x+1)] = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \text{ με } t \geq \frac{x+1}{v} \text{ ή } t \geq (x+1)s \quad (2)$$

Σχόλια:

- 1) Ας έρθουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα ii) με βάση τις εξισώσεις κύματος που βρήκαμε παραπάνω.

- i) α) Τη στιγμή $t=0$ η φάση κάθε σημείου του μέσου, με βάση την εξίσωση (1), έχει συνάρτηση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ στα σημεία όπου } (x-1) \leq 0 \text{ ή } x \leq 1 \text{ m}$$

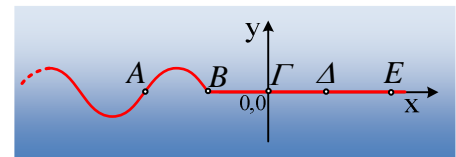
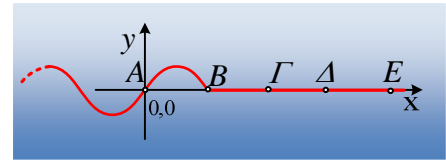
Με αντικατάσταση:

$$\varphi_A = 2\pi\left(-\frac{0}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pi, \varphi_B = 0 \text{ ενώ για τα υπόλοιπα σημεία δεν έχει νόημα να το συζητάμε.}$$

- β) Τη στιγμή $t=0$ η φάση κάθε σημείου του μέσου, με βάση την εξίσωση (2), έχει συνάρτηση:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \text{ στα σημεία όπου } (x+1) \leq 0 \text{ ή } x \leq -1 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση:



$$\varphi_A = 2\pi \left(-\frac{-2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi, \varphi_B = 0 \text{ ενώ για τα υπόλοιπα σημεία δεν έχει νόημα να το συζητάμε.}$$

ii) Αν πάρουμε τώρα τη στιγμή $t = t_0 + 2,5s = 2,5s$ αντίστοιχα θα βρούμε:

α) Η φάση κάθε σημείου του μέσου, με βάση την εξίσωση (1), έχει συνάρτηση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) = \pi - \pi x + \pi = 3,5\pi - \pi x \text{ στα σημεία όπου } x \leq 3,5 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση:

$$\varphi_A = 3,5\pi - \pi x = 3,5\pi \text{ rad, } \varphi_B = 3,5\pi - \pi = 2,5\pi \text{ rad, } \varphi_\Gamma = 3,5\pi - 2\pi = 1,5\pi \text{ rad,}$$

$$\varphi_\Delta = 3,5\pi - 3\pi = 0,5\pi \text{ rad, ενώ για το σημείο E δεν έχει νόημα.}$$

β) Τη στιγμή $t = 2,5s$ η φάση κάθε σημείου του μέσου, με βάση την εξίσωση (2), έχει συνάρτηση:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi \left(\frac{2,5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) = 1,5\pi - \pi x \text{ στα σημεία όπου } x \leq 3,5 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση:

$$\varphi_A = 1,5\pi - \pi x = 1,5\pi - \pi(-2) = 3,5\pi \text{ rad, } \varphi_B = 1,5\pi - \pi(-1) = 2,5\pi \text{ rad,}$$

$$\varphi_\Gamma = 1,5\pi - \pi \cdot 0 = 1,5\pi \text{ rad, } \varphi_\Delta = 1,5\pi - \pi \cdot 1 = 0,5\pi \text{ rad, ενώ για το σημείο E δεν έχει νόημα.}$$

2) Αν κάποιος δει τις εξισώσεις κύματος (1) και (2) θα διαπιστώσει ότι για τη φάση έχουμε:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ και } \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

Έχει κανένα νόημα να μιλάμε για αρχική φάση του κύματος στην πρώτη περίπτωση ίση με π και στη δεύτερη $-\pi$; Θεωρώ ότι οι τιμές αυτές δεν εκφράζουν τίποτα άλλο, παρά τη θέση του άξονα.

Οι φάσεις ταλάντωσης των σημείων, έχουν φυσικό νόημα. Προσέξτε ότι στο ii) ερώτημα τις υπολογίσαμε, χωρίς καν να πάρουμε εξίσωση κύματος. Αλλά μπορεί επίσης να διαπιστώσει κανείς ότι και με τις δύο αυτές διαφορετικές εξισώσεις κύματος, οι φάσεις των σημείων, σωστά υπολογίστηκαν.

Αλλά τι σημαίνει αρχική φάση κύματος; Υπάρχει ορισμός στο σχολικό βιβλίο, που να μας δεσμεύει;

Νομίζω όχι. Υπάρχει ορισμός στην αρχική φάση μιας ταλάντωσης και εδώ, κάθε σημείο που ταλαντώνεται έχει αρχική φάση μηδενική.

Γιατί να μην πούμε, ανεξάρτητα, πού βάλουμε αυθαίρετα την αρχή του άξονα, ανεξάρτητα πότε πήραμε ότι $t=0$, ότι η αρχική φάση κάθε σημείου που φτάνει το κύμα, και κατά συνέπεια του κύματος είναι μηδέν;