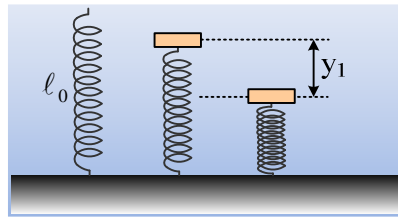


## Απλή Αρμονική Ταλάντωση και Κατακόρυφη Βολή.

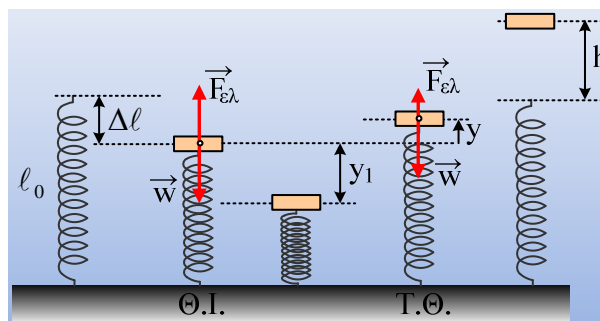


Ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, σταθεράς  $k=200\text{N/m}$ , στηρίζεται στο έδαφος με το κάτω άκρο του, ενώ στο πάνω άκρο του ηρεμεί ένα σώμα μάζας  $m=8\text{kg}$ , χωρίς να είναι δεμένο με το ελατήριο. Ασκώντας κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη, εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά  $y_1=0,8\text{m}$  και για  $t=0$  το αφήνουμε να κινηθεί.

- i) Ν' αποδειχθεί ότι, για όσο χρόνο το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
- ii) Ποια χρονική στιγμή το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο; Τι κίνηση θα πραγματοποιήσει από κει και πέρα;
- iii) Πόσο θα απέχει το σώμα από το πάνω άκρο του ελατηρίου, τη στιγμή που θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του;
- iv) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα επιστρέψει ξανά στην αρχική του θέση, για πρώτη φορά;

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

### Απάντηση:



- i) Στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k \Delta l = mg \rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{8 \cdot 10}{200} m = 0,4m$$

Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση που απέχει κατά  $y$  από την θέση ισορροπίας, όπως στο σχήμα:

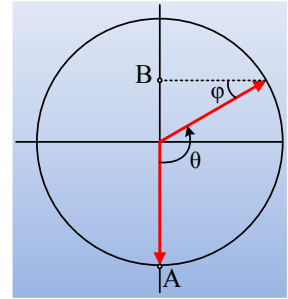
$$\Sigma F = F_{ελ} - w = k(\Delta l - y) - mg = k \Delta l - ky - mg = -ky$$

άρα το σώμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς  $D=k$ , αφού η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης  $y$  από τη θέση ισορροπίας και έχει και αντίθετη κατεύθυνση από την απομάκρυνση (κατευθύνεται προς την θέση ισορροπίας, είναι δηλαδή μια δύναμη επαναφοράς).

- ii) Το σώμα θα εγκαταλείψει το ελατήριο, μόλις αυτό αποκτήσει το φυσικό του μήκος, δηλαδή σε απομάκρυνση  $0,4\text{m}$  πάνω από την θέση ισορροπίας. Από και πέρα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβρα-

δυνάμενη κίνηση με επιβράδυνση  $g$ . (κατακόρυφη βολή)

Παίρνουμε τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στην θέση A και θα εγκαταλείψει το ελατήριο στο σημείο B. Αλλά η γωνία  $\varphi$  είναι ίση με  $30^\circ$ , αφού η απέναντι κάθετος είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει γωνία  $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ . Εξάλλου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του διανύσματος



είναι ίση με την γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης, όπου:

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{8}} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$$

Έτσι το χρονικό διάστημα που απαιτείται είναι:

$$\Delta t_1 = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi/3}{5} \text{ s} = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$$

iii) Τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος, η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2. \quad (1)$$

όπου  $y = \Delta \ell = 0,4 \text{ m}$ .

Εφαρμόζουμε για το σώμα την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και στο μέγιστο ύψος (λαμβάνοντας στην αρχική θέση  $U=0$ ) και παίρνουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$mgh = \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} ky^2 \rightarrow$$

$$h = \frac{k(A^2 - y^2)}{2mg} = \frac{200(0,8^2 - 0,4^2)}{2 \cdot 8 \cdot 10} \text{ m} = 0,6 \text{ m}$$

Όμως αφού το ελατήριο θεωρείται ιδανικό, δεν έχει μάζα, οπότε δεν εμφανίζει αδράνεια, με αποτέλεσμα μόλις αποκτήσει το φυσικό μήκος του, να παραμένει ως έχει, χωρίς να επιμηκυνθεί. Άρα η απόσταση του πάνω άκρου του από το σώμα, θα είναι επίσης  $h=0,6 \text{ m}$ .

iv) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - y^2)} = \sqrt{\frac{200}{8}(0,8^2 - 0,4^2)} \text{ m/s} = \sqrt{12} \text{ m/s} = v_0$$

Όπου  $v=v_0$  η ταχύτητα με την οποία το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο.

Αλλά για την κατακόρυφη βολή που πραγματοποιεί το σώμα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v = v_0 - gt \quad \text{και} \quad \Delta y = v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2$$

τη στιγμή που το σώμα πέφτοντας έρχεται ξανά σε επαφή με το ελατήριο,  $\Delta y=0$  και από την 2<sup>η</sup> από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$0 = v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2 \rightarrow \Delta t \left( \sqrt{12} - \frac{1}{2} 10 \cdot \Delta t \right) = 0 \rightarrow$$

$\Delta t = 0$  (λύση που αντιστοιχεί στην στιγμή που το σώμα κινείται προς τα πάνω) ή

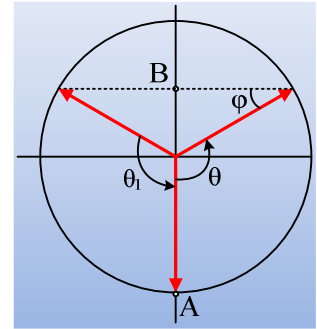
$$\Delta t_2 = \frac{\sqrt{12}}{5} s$$

Μόλις το σώμα πέφτοντας, έρθει σε επαφή με το ελατήριο, θα κάνει ξανά α.α.τ. ξεκινώντας τώρα από την ίδια θέση B και το περιστρέφομενο διάνυσμα θα διαγράψει γωνία  $\theta_1 = \theta$  (βλέπε σχήμα) μέχρι το σώμα να φτάσει στην αρχική του θέση A. Αλλά τότε θα χρειαστεί επίσης χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_3 = \Delta t_1 = \frac{2\pi}{15} s$$

Με βάση αυτά το σώμα θα επιστρέψει στην αρχική του θέση τη χρονική στιγμή:

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 2 \frac{2\pi}{15} s + \frac{\sqrt{12}}{5} s \approx 1,5 s$$



[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)