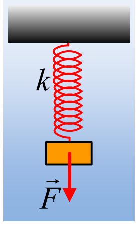
Ανεβάζοντας το επίπεδο αφαίρεσης.



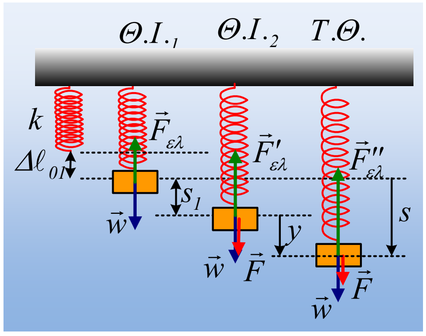
Ένα σώμα μάζας 1kg, ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=30N/m. Κάποια στιγμή (t=0) ασκείται στο σώμα μια κατακόρυφη μεταβλητή δύναμης, της μορφής F=-10s+8 (S.I.), όπου s η μετατόπιση από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος.

i) Να αποδείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ, υπολογίζοντας το πλάτος και την ενέργεια ταλάντωσης.

ii) Τη χρονική στιγμή t_1=16/3 s η δύναμη F παύει να ασκείται. Να βρείτε το πλάτος και την ενέργεια της νέας ταλάντωσης του σώματος.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Το σώμα αρχικά ηρεμεί, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά $Δ\ell_{01}$. Από συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k\cdot Δ\ell_{01}=mg \quad (1)$$

Το σώμα με την επίδραση της δύναμης F, με αρχική τιμή 8Ν, επιταχύνεται προς τα κάτω, αλλά τότε το μέτρο της δύναμης αυτής μειώνεται, ενώ το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου αυξάνεται. Αλλά τότε σε κάποια θέση, η συνισταμένη θα μηδενιστεί, δηλαδή το σώμα θα φτάσει σε μια νέα θέση ισορροπίας (2), όπου:

$$ΣF=0 \rightarrow F'_{ελ}=w+F \rightarrow$$

$$k\cdot\left(Δ\ell_{01}+s_1\right)=mg-10s_1+8 \quad (2) \xrightarrow{(1)}$$

$$mg+k\cdot s_1=mg-10s_1+8 \rightarrow$$

$$s_1=\frac{8}{k+10}=\frac{8}{30+10}m=0,2m$$

Αν πρόκειται να εκτελέσει ταλάντωση με την επίδραση της δύναμης F, γύρω από αυτήν την θέση θα την πραγματοποιήσει. Έστω x=0 για την θέση αυτή.

Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπως στο σχήμα, σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y από την Θ.Ι. (2), έχουμε (θεωρούμε την προς τα κάτω κατεύθυνση θετική):

$$ΣF=F+w-F''_{ελ}=-10s+8+mg-k\left(Δ\ell_{01}+s_1+y\right)\xrightarrow{(1\&2)}$$

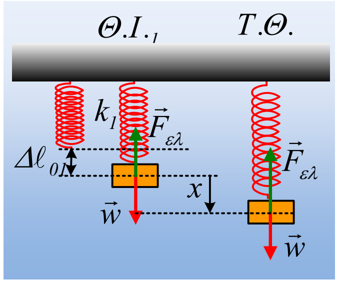
$$ΣF=-10(s_1+y)+8+mg-k\cdot Δ\ell_{01}-k\cdot s_1-ky \rightarrow$$

$$ΣF=-10y-ky=-(k+10)\cdot y=-D\cdot y \quad \text{(μονάδες S.I.)}$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από την θέση ισορροπίας (2), η οποία είναι χαμηλότερα κατά 0,2m από την αρχική θέση του, με σταθερά επαναφοράς D=k+10=40N/m. Αλλά η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική, συνεπώς αυτή είναι ακραία θέση οπότε το πλάτος ταλάντωσης, είναι ίσο με την απόσταση s_1. Δηλαδή A_1=0,2m, ενώ:

$$E_{\tau/1} = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}40 \cdot 0,2^2\,J = 0,8J$$

ii) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F, το σώμα συνεχίζει την κίνησή του. Για την κίνηση αυτή:



Παίρνουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία θα απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας (1), όπως στο σχήμα, με θετική την προς τα κάτω κατεύθυνση, θα έχουμε:

$$\Sigma F = w - F_{\varepsilon\lambda} = mg - k(\Delta\ell_{01} + x) \xrightarrow{(1)}$$

$$\Sigma F = -k \cdot x$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα ξεκινά μια νέα ΑΑΤ, γύρω από την θέση ισορροπίας (1).

Εξάλλου το σώμα ξεκίνησε την **πρώτη** ταλάντωσή του τη στιγμή t=0 από την άνω ακραία θέση ταλάντωσης. Έτσι θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, για την απομάκρυνσή του, θα έχουμε:

$x = A_1 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ και για t=0, $x = +A_1$, οπότε $A_1 = A_1 \cdot \eta\mu\varphi_o$ οπότε $\varphi_o = \pi/2$ και :

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu(\omega t = \pi/2)$$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k+10}{m}} = \sqrt{\frac{30+10}{1}}rad/s = 2\pi\ \ rad/s$

Και, με αντικατάσταση, θα έχουμε:

$$x_1 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot \frac{16}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = 0,2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)m = -0,1m$$

Δηλαδή το σώμα βρίσκεται 0,1m, κάτω από τη θέση ισορροπίας (2), τη στιγμή που σταματά η εξάσκηση της δύναμης F και το σώμα θα συνεχίσει πια να ταλαντώνεται, απέχοντας κατά $|x'| = |s_1| + |x_1| = 0,3$m από την νέα θέση ισορροπίας του. Εξάλλου, τη στιγμή αυτή το σώμα έχει και κάποια ταχύτητα την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με βάση την εξίσωση $\upsilon = \upsilon_{mx} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi/2)$. Αλλά ας το δούμε μέσω ενεργειών:

Από την ενέργεια ταλάντωσης της 1ης ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{\tau/1} = \frac{1}{2}Dx_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2$$

Όπου υ η ταχύτητα του σώματος, ίδια με την ταχύτητά του μόλις καταργηθεί η δύναμη F, οπότε από την ενέργεια της 2ης ταλάντωσης, θα έχουμε:

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \quad (3)$$

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 \rightarrow$$

$$E_{\tau/2} = \frac{1}{2}30 \cdot 0{,}3^2 J + \frac{1}{2}40 \cdot 0{,}2^2 J - \frac{1}{2}40 \cdot (-0{,}1)^2 J = 1{,}95 J$$

Τέλος από την (3) έχουμε:

$$A_2 = \sqrt{\frac{2E_{\tau/2}}{k_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}95}{30}} m = 0{,}36 m$$

Σχόλιο για Καθηγητές.

Η δύναμη F, είναι μια δύναμη η τιμή της οποίας εξαρτάται από τη θέση του σώματος. Είναι δηλαδή μια χωροεξαρτώμενη δύναμη, συνεπώς η κίνηση είναι μια ΑΑΤ, οπότε μπορούμε να μιλάμε για δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

Στην πραγματικότητα η ανάρτηση αυτή, είναι η ίδια με την προηγούμενη «Δυο ταλαντώσεις με δύο κατακόρυφα ελατήρια.», όπου έχει «κρυφτεί» το κάτω ελατήριο…

dmargaris@gmail.com