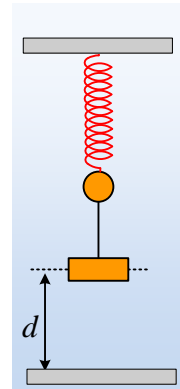


Αν κρεμάσουμε και μια πλάκα;

Μια μικρή σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, έχοντάς το επιμηκύνει κατά 10cm . Δένουμε τη σφαίρα με μια πλάκα, μάζας $M=1,5\text{kg}$, μέσω αβαρούς νήματος και την συγκρατούμε σε τέτοια θέση, ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο και τεντωμένο, χωρίς να προκαλείται μετακίνηση της σφαίρας. Στη θέση αυτή, η πλάκα απέχει κατά $d=0,45\text{m}$ από το έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα.

Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την πλάκα, η οποία μετά από λίγο φτάνει στο έδαφος όπου και προσκολλάται, ενώ αμέσως κόβουμε και το νήμα. Να υπολογιστούν:

- i) Η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας, καθώς και η επιτάχυνσή της:
 - α) ελάχιστα πριν και
 - β) ελάχιστα μετά
 την κρούση της πλάκας.
- ii) Η μέγιστη ταχύτητα της πλάκας.
- iii) Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, κατά την κρούση της πλάκας με το έδαφος.
- iv) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας, μετά και την αφαίρεση του νήματος;



Απάντηση:

- i) Στη θέση ισορροπίας της σφαίρας, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$, οπότε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow k \Delta\ell = mg \rightarrow$$

$$k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,1} \text{ N/m} = 50 \text{ N/m}$$

Μόλις αφήσουμε ελεύθερη την πλάκα, το σύστημα των δύο σωμάτων θα κινηθεί μαζί, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ουσιαστικά έχουμε ένα σώμα Σ , μάζας $m+M$, το οποίο είναι δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου.

Για την θέση ισορροπίας του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow k \Delta\ell_1 = (m+M)g \rightarrow$$

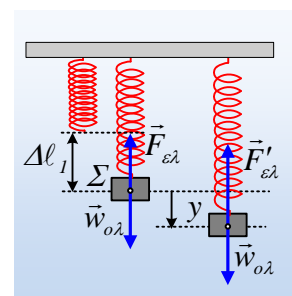
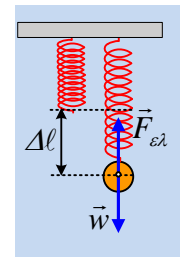
$$\Delta\ell_1 = \frac{(m+M)g}{k} = \frac{20}{50} m = 0,4m$$

Παίρνοντας εξάλλου το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας του, όπως στο διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$\Sigma F = w_{ολ} - F'_{ελ} = (m+M)g - k(\Delta\ell_1 + y) = -ky$$

Συνεπώς το σώμα Σ , εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά $D=k$ και πλάτος $A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell = 0,4m - 0,1m = 0,3m$, αφού το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς η αρχική θέση, είναι ακραία θέση της ταλάντωσης.

Αλλά τότε σε κάθε θέση το σώμα Σ , συνεπώς και η σφαίρα, θα έχει επιτάχυνση:



$$a = -\omega^2 \cdot y = -\frac{D}{m+M} y = -\frac{k}{m+M} y$$

Με βάση αυτά, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική έχουμε:

$$a_{ap} = -\frac{k}{m+M} y = -\frac{50}{2} 0,3 \text{ m/s}^2 = -7,5 \text{ m/s}^2$$

Αλλά τη στιγμή που η πλάκα φτάνει στο έδαφος, έχοντας διανύσει απόσταση 0,45m, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας θα είναι $x = -0,15 \text{ m}$, οπότε:

α) Ελάχιστα πριν την κρούση, η επιτάχυνση του συστήματος είναι:

$$a_1 = -\frac{k}{m+M} y = -\frac{50}{2} (-0,15) \text{ m/s}^2 = +3,75 \text{ m/s}^2.$$

β) Αμέσως μετά την κρούση, η σφαίρα ξεκινά μια νέα ταλάντωση, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας της, ενώ η απομάκρυνση, από τη θέση αυτή είναι $y = -0,45 \text{ m}$, οπότε η επιτάχυνση θα είναι:

$$a_2 = -\frac{k}{m} y = -\frac{50}{0,5} (-0,45) \text{ m/s}^2 = +45 \text{ m/s}^2$$

ii) Η μέγιστη ταχύτητα του Σ, συνεπώς και της πλάκας, θα είναι:

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \cdot A = \sqrt{\frac{50}{2}} 0,3 \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$$

iii) Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, είναι ίση με την κινητική ενέργεια της πλάκας.

Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για το σώμα Σ (το σύστημα των δύο σωμάτων) για τη θέση ελάχιστα πριν την κρούση, παίρνουμε:

$$E = K + U \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m+M) v^2 + \frac{1}{2} k y^2 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m+M} (A^2 - y^2)} = \sqrt{\frac{50}{2} (0,3^2 - 0,15^2)} \text{ m/s} = 0,75\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Όπου v το μέτρο της ταχύτητας. Αλλά τότε παίρνουμε:

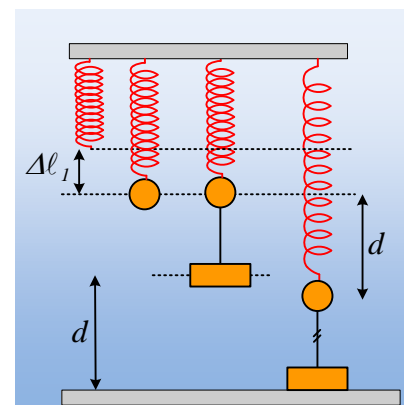
$$Q = K_{\pi\lambda} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} 1,5 \cdot (0,75\sqrt{3})^2 \text{ J} \approx 1,27 \text{ J}$$

iv) Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης της σφαίρας είναι:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} 0,5 \cdot (0,75\sqrt{3})^2 \text{ J} + \frac{1}{2} 50 \cdot (0,45)^2 \text{ J} = 5,48 \text{ J}$$

Αφού τη στιγμή που κτυπά η πλάκα στο έδαφος (και κόβουμε το νήμα), η σφαίρα απέχει κατά $d = 45 \text{ cm}$ από την αρχική θέση ισορροπίας της, η οποία θα είναι και η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει.



Σημείωση:

Το μήκος του νήματος δεν δίνεται, οπότε δεν μας ενδιαφέρει αν η σφαίρα θα κτυπήσει η όχι στο έδαφος. Έτσι και αλλιώς η κίνησή της μετά θα είναι ΑΑΤ, είτε τμήμα ΑΑΤ, της οποίας ζητάμε απλά την ενέργεια.

dmargaris@gmail.com