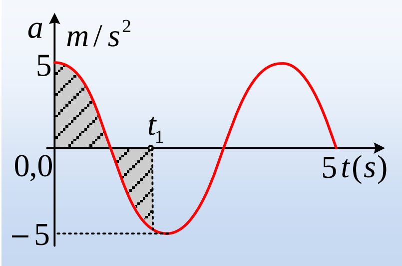
Αν δίνεται το διάγραμμα της επιτάχυνσης.

Ένα σώμα μάζας 0,2kg, εκτελεί ΑΑΤ και στο διπλανό σχήμα δίνεται η επιτάχυνσή του σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, στο διάγραμμα α-t, μέχρι τη στιγμή t_1=5/3s.

iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας την παραπάνω χρονική στιγμή t_1.

Απάντηση:

i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος είναι της μορφής:

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \quad (1)$$

οπότε η επιτάχυνση θα έχει τη μορφή:

$$\alpha=-\omega^2 A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \quad (2)$$

Αλλά με βάση το διάγραμμα, $\alpha_{max}=\omega^2A=5m/s^2$, ενώ $\frac{5T}{4}=5s$, ή T=4s, οπότε:

$$A=\frac{a_{\max}}{\omega^2}=\frac{a_{\max}}{\frac{4\pi^2}{T^2}}=\frac{a_{\max}}{4\pi^2}T^2=\frac{5}{4\pi^2}4^2m=2m$$

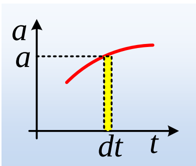
Εξάλλου με αντικατάσταση στην (2) t=0 και α=5m/s^2 παίρνουμε:

$$5=-5\eta\mu\varphi_0 \longrightarrow \eta\mu\varphi_0=-1 \longrightarrow \varphi_0=\frac{3\pi}{2}rad$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνση παίρνει τη μορφή:

$$x=2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{μονάδες στο S.I.}$$

ii) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης $a=\frac{d\upsilon}{dt}$ προκύπτει ότι $d\upsilon=adt$, οπότε σε ένα διάγραμμα α-t, όπως στο διπλανό σχήμα, το στοιχειώδες εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου με βάση dt και ύψος α, είναι αριθμητικά ίσο με τη στοιχειώδη μεταβολή της ταχύτητας du.



Οπότε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο αρχικό διάγραμμα α-t, είναι αριθμητικά ίσο με την συνολική μεταβολή της ταχύτητας του σώματος από 0-t_1 (όπου το εμβαδόν πάνω από τον άξονα t θεωρείται θετικό και το αντίστοιχο εμβαδόν κάτω από τον άξονα, αρνητικό). Αλλά τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι αριθμητικά ίσο με:

$$E=\Delta\upsilon=\upsilon_1-\upsilon_0=\upsilon_1$$

Αφού η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική, λαμβάνοντας υπόψη μας, ότι το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του, από την ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσής του. Εξάλλου:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{\max} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \frac{\pi}{2}2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\frac{5}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = \pi \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}m/s = 1{,}57m/s$$

Συνεπώς το γραμμοσκιασμένο χωρίο έχει εμβαδόν ίσο με $1{,}57m^2$.

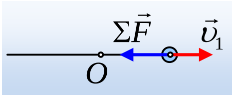
iii) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, συνδέεται με το έργο της δύναμης επαναφοράς με την εξίσωση:

$$W_{\Sigma F} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = -\Delta U$$

Οπότε για τον ζητούμενο ρυθμό θα έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = -\frac{|\Sigma F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{dt} = -|\Sigma F| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αλλά $|\Sigma F| = m\omega^2 |x| = 0{,}2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left|2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\frac{5}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)\right| = 1\left|-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}N$



ενώ θ=180°, οπότε:

$$\frac{dU}{dt} = -|\Sigma F| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2}(-1)J/s = 1{,}35J/s$$

dmargaris@gmail.com