

Αν δίνεται η εξίσωση ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από αριστερά προς τα δεξιά, το οποίο περιγράφεται από τη μαθηματική εξίσωση:

$$y = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) \text{ με } t \in R \text{ και } t \geq 2,5x - 4,5 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
- ii) Να βρεθεί η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο, στη θέση $x=0$, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η θέση μέχρι την οποία έχει διαδοθεί το κύμα στη στιγμή $t_1=1s$.
- iv) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων, τα οποία τη στιγμή $t_2=0$ έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης, στην περιοχή $-0,5m \leq x \leq 0,5m$.
- v) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1=1s$.

Η κατεύθυνση προς τα δεξιά, αλλά και η απομάκρυνση προς τα πάνω, θεωρούνται θετικές.

Απάντηση:

- i) Η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$y = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi(t - 2,5x + 4,5) = 0,2 \cdot \eta \mu(2\pi t - 5\pi x + 9\pi) \text{ με } t \in R \text{ και } t \geq 2,5x - 4,5 \text{ μονάδες στο S.I.}$$

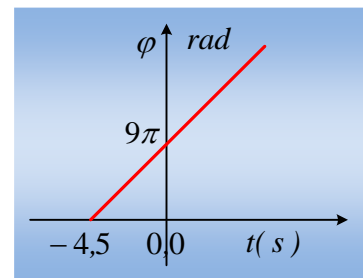
$$\text{Αλλά τότε } \omega t = 2\pi t \rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s} \text{ ή } f = 1\text{Hz} \text{ και } 2\pi \frac{x}{\lambda} = 5\pi x \rightarrow \lambda = 0,4m,$$

$$\text{οπότε } v = \lambda \cdot f = 0,4m/s.$$

- ii) Η φάση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Ο στη θέση $x=0$ είναι:

$$\varphi = 2\pi t - 5\pi x + 9\pi = 2\pi t + 9\pi \text{ (rad) με } t \in R \text{ και } t \geq -4,5s.$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι με βάση τα παραπάνω, αυτή του διπλανού σχήματος.



- iii) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει σε κάποιο σημείο, έστω Σ, το οποίο ξεκινά την ταλάντωσή του. Αλλά αν πάρουμε την εξίσωση της φάσης:

$$\varphi = 2\pi(t - 2,5x + 4,5) \text{ με } t \in R \text{ και } t \geq 2,5x - 4,5$$

$$\text{και θέσουμε } t = 2,5x - 4,5 \text{ παίρνουμε, } \varphi = 2\pi(2,5x - 4,5 - 2,5x + 4,5) = 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε σημείο που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τη θετική κατεύθυνση.

Αλλά τότε και το σημείο Σ έχει τη στιγμή $t_1=1s$ φάση απομάκρυνσης $\varphi_2=0$, οπότε:

$$\varphi = 2\pi(t - 2,5x + 4,5) = 0 \rightarrow 1 - 2,5x + 4,5 = 0 \rightarrow x = 2,2m.$$

- iv) Τα υλικά σημεία του μέσου τα οποία έχουν μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, είναι αυτά που διέρχονται

από τη θέση ισορροπίας τους. Θέτοντας στην εξίσωση του κύματος λοιπόν $t=0$ και $y=0$, έχουμε:

$$0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t-2,5x+4,5)=0 \rightarrow \eta\mu 2\pi(4,5-2,5x)=0 \rightarrow$$

$$9\pi-5\pi x=k\pi \rightarrow$$

$$x=1,8-0,2k$$

οπότε αφού θέλουμε $-0,5\text{m} \leq x \leq 0,5\text{m}$, πρέπει:

$$-0,5 \leq 1,8-0,2k \leq 0,5 \rightarrow$$

$$-2,3 \leq -0,2k \leq -1,3 \rightarrow$$

$$6,5 \leq k \leq 11,5 \rightarrow$$

Άρα οι δυνατές ακέραιες τιμές του k είναι: $k=7, 8, 9, 10$ και 11 .

Οπότε οι θέσεις των υλικών σημείων θα είναι:

$$x_1=0,4\text{m}, x_2=0,2\text{m}, x_3=0,0\text{m}, x_4=-0,2\text{m} \text{ και } x_5=-0,4\text{m}.$$

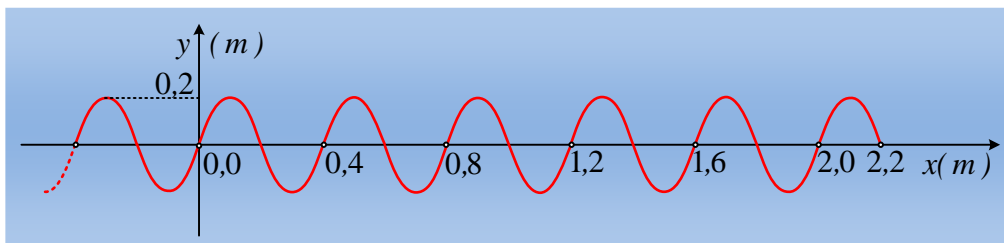
ν) Αντικαθιστώντας την τιμή $t_1=1\text{s}$ στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y=0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(1-2,5x+4,5)=0,2 \cdot \eta\mu(2\pi-5\pi x+9\pi)=0,2 \cdot \eta\mu(11\pi-5\pi x) \rightarrow$$

$$y=0,2 \cdot \eta\mu(\pi-5\pi x)=0,2 \cdot \eta\mu(5\pi x)$$

ενώ με βάση την απάντηση στο iii) ερώτημα $x \leq 2,2\text{m}$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



dmargaris@sch.gr