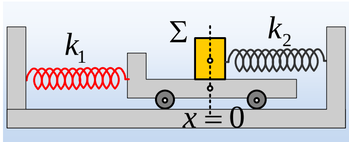
Αμαξίδιο και σώμα σε ταλαντώσεις.



Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα αμαξίδιο μάζας M=3kg, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1=120N/m. Πάνω στο αμαξίδιο ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας m=1kg, δεμένο και αυτό στο άκρο δεύτερου οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_2=130N/m, όπως στο σχήμα, χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων . Θεωρούμε ότι τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων βρίσκονται στη θέση x=0. Τραβάμε αργά-αργά το αμαξίδιο προς τα αριστερά μετακινώντας το κατά d=0,2m και τη στιγμή t=0, το αφήνουμε να κινηθεί.

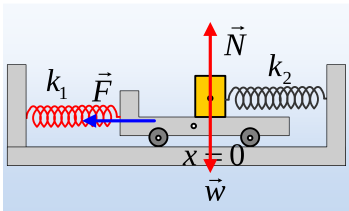
i) Αν δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ αμαξιδίου και σώματος Σ, θεωρώντας την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις x=x(t) της θέσης κάθε σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες.

ii) Αν υπάρχουν τριβές μεταξύ σώματος και αμαξιδίου, με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ τους, να γίνει το διάγραμμα x=x(t) της θέσης του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής, μεταξύ των δύο σωμάτων για την παραπάνω κίνηση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$ και ότι κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων, το αμαξίδιο δεν κτυπά στα τοιχώματα, αλλά και το σώμα Σ δεν θα φύγει από το αμαξίδιο, ούτε θα κτυπήσει κάπου.

Απάντηση:

Το σύστημα αρχικά ηρεμεί και η θέση ισορροπίας του x=0, ταυτίζεται με τη θέση που τα δυο ελατήρια έχουν τα φυσικά μήκη τους.



i) Στη διάρκεια της μετακίνησης του αμαξιδίου προς τα αριστερά, με την άσκηση πάνω του κατάλληλης δύναμης $\vec{F}$, το σώμα Σ θα παραμείνει ακίνητο στη θέση του, αφού δεν δέχεται καμιά οριζόντια δύναμη, η οποία να το επιταχύνει. Συνεπώς μόλις το αμαξίδιο αφεθεί ελεύθερο, αυτό θα εκτελέσει ΑΑΤ (χωρίς να κινηθεί το σώμα Σ), γύρω από την θέση ισορροπίας του, η οποία ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_1, με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x_1 = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

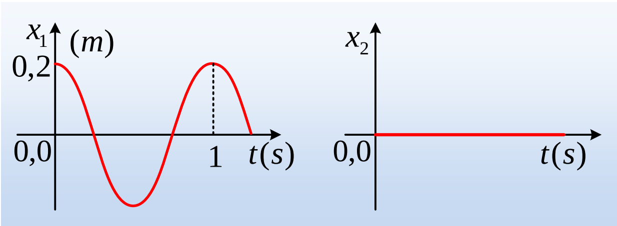
Η αρχική φάση τέθηκε π/2, αφού το αμαξίδιο ξεκινά από την ακραία θετική απομάκρυνσή του χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε και A=d=0,2m, ενώ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{120}{3}} rad/s = 2\sqrt{10} rad/s = 2\pi\ rad/s$$

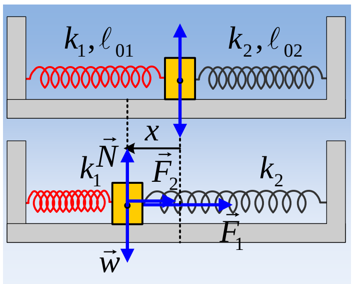
Και τελικά:

$$x_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με βάση αυτά η ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι αυτές του παρακάτω σχήματος.



ii) Από τη στιγμή που δεν έχουμε ολίσθηση του σώματος Σ πάνω στο αμαξίδιο, η κατάσταση είναι αυτή που παριστάνεται στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε αντικαταστήσει το σύστημα των δύο σωμάτων με ένα άλλο σώμα Σ΄ μάζας 4kg. Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας. Τότε θεωρώντας ξανά την προς τ' αριστερά κατεύθυνση ως θετική, έχουμε:



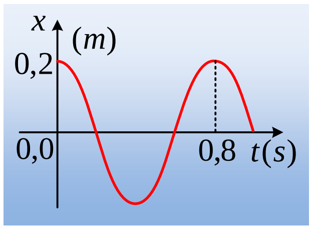
$$\Sigma F_x = -F_1 - F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

Συνεπώς το σύστημα των σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ με $D=k_1+k_2=120N/m+130N/m=250N/m$ έχοντας

γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{D}{M+m}} = \sqrt{\dfrac{250}{3+1}} rad/s = \dfrac{5\pi}{2}\ rad/s$

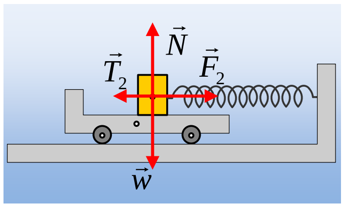
Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής:

$$x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$



Και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος, αφού τώρα η περίοδος είναι $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = 0{,}8s$

Ας εστιάσουμε τώρα στο σώμα Σ και στις δυνάμεις που δέχεται, όπου T_2 η δύναμη στατικής τριβής, στην τυχαία απομάκρυνση x.



$$\Sigma F_x = ma \rightarrow$$

$$T_2 - F_2 = ma \rightarrow$$

$$T_2 = k_2 x + m(-\omega^2 x) \text{ ή}$$

$$T_2 = 130x - 1 \cdot \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 x = 130x - 125x = 5x$$

Βλέπουμε ότι η ασκούμενη τριβή είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και κατά συνέπεια παίρνει τη μέγιστη τιμή της (κατά μέτρο), σε μέγιστη τιμή απομάκρυνσης, $T_{max}=5 \cdot A=1N$. Αλλά τότε για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει αυτή η τιμή να είναι μικρότερη ή ίση της οριακής στατικής τριβής, με τον ελάχιστο συντελεστή:

$$T_{\max} \le T_{o\rho} \text{ ή } T_{\max} \le \mu_s N \to$$

$$\mu_s \ge \frac{T_{\max}}{N} \to \mu_s \ge \frac{T_{\max}}{w} \to$$

$$\mu_s \ge \frac{1N}{1 \cdot 10N} \text{ ή } \mu_s \ge 0{,}1$$

Οπότε η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής είναι $\mu_{s/\min} = 0{,}1$

dmargaris@gmail.com