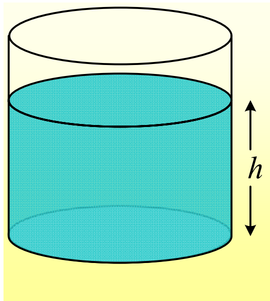
Ένα υγρό σε δοχείο και το υδροστατικό παράδοξο.

Ας μελετήσουμε τι συμβαίνει, όταν ένα υγρό περιέχεται σε ένα ακίνητο δοχείο. Τι δυνάμεις ασκεί στο δοχείο; Τι σχέση έχουν αυτές με το βάρος του υγρού;

Εφαρμογή 1η:



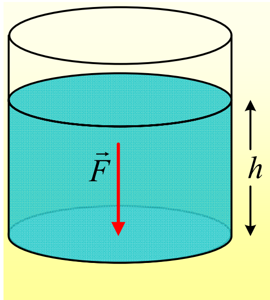
Ένα κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό μέχρι ύψος h.

i) Πόση δύναμη ασκεί το υγρό στην βάση του δοχείου, εμβαδού A;

ii) Πόση δύναμη ασκεί το υγρό στην παράπλευρη επιφάνεια του δοχείου;

Η ατμοσφαιρική πίεση να μην ληφθεί υπόψη.

Απάντηση:



i) Η πίεση στον πυθμένα του δοχείου είναι ίση:

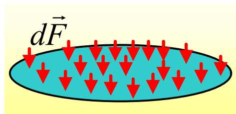
$$p = \rho g h$$

Οπότε το υγρό ασκεί στον πυθμένα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω, μέτρου:

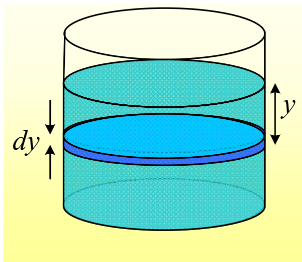
$$F = p \cdot A = \rho g h \cdot A = \rho g V = w_\upsilon$$

Ίση δηλαδή με το βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο.

Σχόλιο:

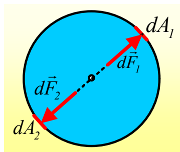


Στην πραγματικότητα η βάση δέχεται σε κάθε σημείο της πιεστικές δυνάμεις, μέτρου dF=p·dA η συνισταμένη των οποίων έχει το μέτρο που υπολογίσαμε παραπάνω και λόγω συμμετρίας, ο φορέας της περνά από το κέντρο της βάσης.



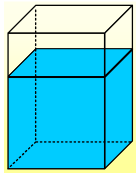
ii) Ας πάρουμε μια κυκλική περιοχή της παράπλευρης επιφάνειας, η οποία σχηματίζει μια στεφάνη σε βάθος y, ύψους dy όπως στο σχήμα.
Στο παρακάτω σχήμα η στεφάνη σε κάτοψη.
Αν πάρουμε ένα στοιχειώδες τόξο ds της στεφάνης, τότε στο στοιχειώδες εμβαδόν dA_1, θα ασκηθεί από το υγρό μια οριζόντια δύναμη dF_1, μέτρου:

$$dF_1 = p \cdot dA_1 = \rho g y \cdot dy \cdot ds.$$



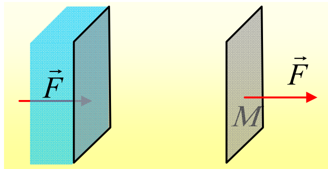
Αλλά όμως υπάρχει και το συμμετρικό τόξο όπου σε αντίστοιχη επιφάνεια εμβαδού $dA_2=dA_1$ θα ασκείται η δύναμη dF_2, του ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς, οπότε η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων, είναι μηδενική. Χωρίζοντας λοιπόν τη στεφάνη αυτή σε πολλά αντίστοιχα τόξα d_{s1}, ds_2… θα υπάρχουν πάντα αντίστοιχα συμμετρικά τόξα, για τα οποία ΣdF=0, οπότε και συνολικά η δύναμη στη στεφάνη από το υγρό, θα είναι μηδενική. Αλλά επειδή η συνολική παράπλευρη επιφάνεια, δεν είναι τίποτα άλλο από πολλά «τέτοια στεφάνια» (πείτε αν προτιμάτε ότι έχουμε κόψει τον κύλινδρο σε πολλές φέτες, παίρνοντας πολλούς κυλίνδρους μικρού ύψους…) και η συνολική δύναμη σε όλη την παράπλευρη επιφάνεια θα είναι μηδενική.

Εφαρμογή $2^{η}$:

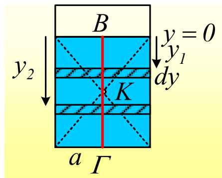


Ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο ακμής α, περιέχει υγρό μέχρι ύψος h. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το υγρό στη δεξιά κατακόρυφη πλευρά του δοχείου, λόγω υδροστατικής πίεσης.

Απάντηση:



Προφανώς η ασκούμενη δύναμη, κάθετη στην επιφάνεια, θα είναι οριζόντια. Η δύναμη F διέρχεται από κάποιο σημείο Μ, όπως στο σχήμα. Για να την υπολογίσουμε, δεν έχουμε παρά να χωρίσουμε την παράπλευρη έδρα, σε λεπτές οριζόντιες λωρίδες πλάτους dy.



Έστω μια τέτοια λωρίδα σε βάθος y_1 (το y=0, είναι στην επιφάνεια του υγρού). Η ασκούμενη δύναμη στην λωρίδα αυτή, θα είναι κάθετη και θα περνάει από το μέσον της, έχοντας μέτρο $dF_1 = \rho g y_1 (a dy) = \rho g\left(\frac{h}{2} - z\right)(a dy)$ όπου z η απόστασή της από το γεωμετρικό κέντρο Κ του ορθογωνίου, με μπλε χρώμα, που είναι το μέρος της πλαϊνής έδρας που έρχεται σε επαφή με το υγρό. Αλλά αν πάρουμε μια συμμετρική λωρίδα, σε απόσταση z κάτω από το κέντρο Κ, τότε θα δέχεται από το υγρό δύναμη $dF_2 = \rho g y_2 (a dy) = \rho g\left(\frac{h}{2} + z\right)(a dy)$. Αλλά τότε η συνισταμένη τους θα έχει μέτρο:

$$dF_{1,2} = dF_1 + dF_2 = \rho g\left(\frac{h}{2} - z\right)(a dy) + \rho g\left(\frac{h}{2} + z\right)(a dy) \rightarrow$$

$$dF_{1,2} = dF_1 + dF_2 = \rho g\frac{h}{2}(a dy) + \rho g\frac{h}{2}(a dy)$$

Δηλαδή η συνολική δύναμη, είναι ίδια, ωσάν και οι δύο λωρίδες βρισκόταν σε βάθος ίσο με ½ h. Αλλά τότε χωρίζοντας όλη την επιφάνεια σε λεπτές τέτοιες λωρίδες και προσθέτοντας τις αντίστοιχες δυνάμεις, θα έχουμε ότι η συνολική δύναμη που ασκεί το υγρό στην παράπλευρη έδρα, θα διέρχεται από κάποιο σημείο της κατακόρυφης ΒΓ, η οποία συνδέει τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών του ορθογωνίου και θα έχει μέτρο:

$$F = \rho g\frac{h}{2} \cdot A = \rho g a\frac{h^2}{2}$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με λίγα περισσότερα Μαθηματικά:

Αν στην λωρίδα σε βάθος y ασκείται δύναμη $dF = \rho gy(ady)$ τότε η συνολική δύναμη στην επιφάνεια θα είναι:

$$F = \int_0^h \rho gaydy = \left[\rho ga\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \rho ga\frac{h^2}{2}$$

Παραπάνω είπαμε ότι η συνολική δύναμη περνά από κάποιο σημείο της ΒΓ. Αλλά ποιο είναι αυτό; Σε ποιο βάθος y;

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα των ροπών (Η ροπή της δύναμης F ως προς ένα σημείο Β ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της δύναμης ως προς το ίδιο σημείο), για τις συνιστώσες και τη συνισταμένη ως προς το σημείο Β, παίρνουμε:

$$\tau_{F/B}=\tau_{F1/B}+ \tau_{F2/B}+ \ldots.\ \tau_{F\nu/B}$$

Ή αν επιστρέψουμε στο παραπάνω σχήμα και χρησιμοποιήσουμε τις λωρίδες πλάτους dy σε βάθος y, θα έχουμε:

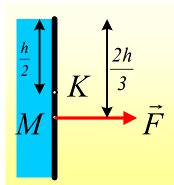
$$Fy_1 = \int_0^h dF\cdot y = \int_0^h \rho gaydy\cdot y = \int_0^h \rho gay^2dy = \rho ga\int_0^h y^2dy = \rho ga\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \rightarrow$$

$$Fy_1 = \rho ga\frac{h}{3}\rightarrow$$

$$y_1 = \rho ga\frac{h}{3F} = \rho gh\frac{h}{3\frac{\rho gh^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

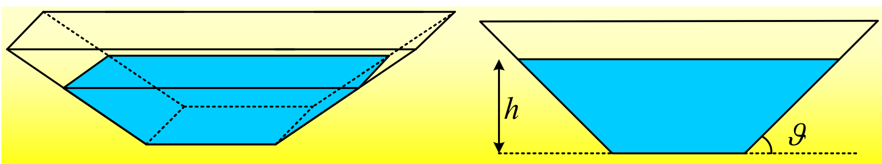
Συμπέρασμα:

Στην κατακόρυφη παράπλευρη έδρα ενός δοχείου, ασκείται δύναμη, λόγω υδροστατικής πίεσης (αφήνουμε στην άκρη της συνεισφορά της ατμοσφαιρικής πίεσης, αφού αυτή υπάρχει και στην εξωτερική περιοχή της πλευράς) με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της πλευράς επί την πίεση που υπάρχει σε βάθος ½ h, δηλαδή $F=p_K\cdot A$, ενώ ο φορέας της περνάει από ένα σημείο Μ σε βάθος $\frac{2}{3}h$.



Εφαρμογή 3η:

Σε δοχείο όπως στο παρακάτω σχήμα, εμβαδού βάσης Α, όπου οι πλαϊνές πλευρές σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, περιέχεται νερό, μέχρι ύψος h. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκεί το νερό:

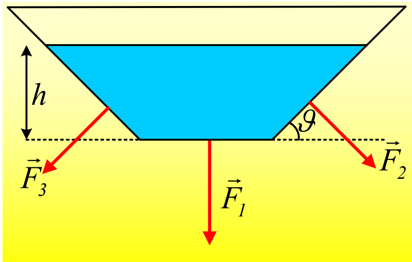


i) Στη βάση του δοχείου.

ii) στο δοχείο, αν οι δυο κεκλιμένες έδρες έχουν εμβαδά A_1.

Στις απαντήσεις να μην ληφθεί υπόψη η ατμοσφαιρική πίεση.

Απάντηση.



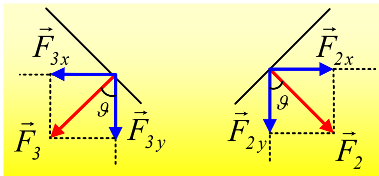
i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκεί το νερό, στη βάση, καθώς και στις δυο κεκλιμένες πλευρές.

Για τη βάση έχουμε:

$$F_1 = pA = \rho ghA$$

ii) Στις δύο κατακόρυφες παράπλευρες έδρες, αυτή προς τον αναγνώστη και η πίσω από τη σελίδα, οι ασκούμενες δυνάμεις είναι οριζόντιες και αντίθετες, οπότε η συνισταμένης τους είναι μηδενική. Απομένουν οι δύο κεκλιμένες έδρες. Λόγω συμμετρίας, οι δύο έδρες δέχονται δυνάμεις ίσου μέτρου $F_2=F_3$, όπου με βάση την προηγούμενη εφαρμογή έχουμε ότι:

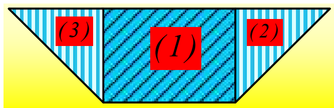
$$F_2 = F_3 = p_K \cdot A_1 = \rho g \frac{h}{2} A_1$$



Αν αναλύσουμε τις δυνάμεις F_2 και F_3 σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = F_{2x} - F_{3x} = F_2 \cdot \eta\mu\vartheta - F_3 \cdot \eta\mu\vartheta = 0$$

$$\Sigma F_y = F_1 + F_{2y} + F_{3y} = F_1 + F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta + F_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$



$$\Sigma F_y = F_1 + 2F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$

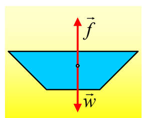
$$\Sigma F_y = \rho ghA + 2 \cdot \frac{1}{2} \rho ghA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$$

Τι ακριβώς μας δίνει το παραπάνω άθροισμα; Ah είναι ο όγκος (1) στο παραπάνω σχήμα, οπότε ρghA είναι το βάρος του νερού στον (1) όγκο. $\frac{1}{2} hA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι ο όγκος (2), ίσος με τον όγκο (3), οπότε $2 \cdot \frac{1}{2} \rho ghA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι το βάρος του νερού, που περιέχεται στους όγκους (2) και (3).

Συνεπώς η συνισταμένη όλων των δυνάμεων, που ασκεί το νερό σε όλα τα τοιχώματα του δοχείου, είναι κατακόρυφη και με μέτρο ίσο με το βάρος του νερού.

Προφανώς όμως η δύναμη που ασκεί το νερό στον πυθμένα, είναι μικρότερη από το βάρος του νερού!

Σχόλιο:

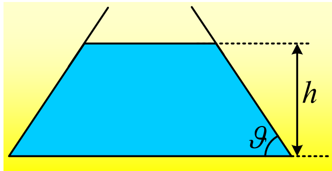


Αν πάρουμε το νερό, αυτό δέχεται δύο δυνάμεις. Το βάρος και η δύναμη $\vec{f}$ από το δοχείο.

Από την ισορροπία του έχουμε ότι $\Sigma F=0$ ή $f=w$.

Αλλά τότε το νερό ασκεί στο δοχείο την αντίδραση της f, ας την ονομάσουμε f' με μέτρο επίσης $f'=w$.

Εφαρμογή 4η:



Σε δοχείο όπως στο διπλανό σχήμα, εμβαδού βάσης Α, όπου οι πλαϊνές πλευρές σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, περιέχεται νερό, μέχρι ύψος h. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκεί το νερό:

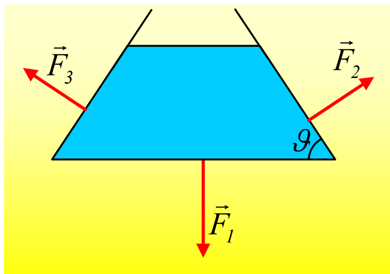
i) Στη βάση του δοχείου.

ii) στο δοχείο, αν οι δυο κεκλιμένες έδρες έχουν εμβαδά A_1.

Στις απαντήσεις να μην ληφθεί υπόψη η ατμοσφαιρική πίεση.

Απάντηση.

Στην εφαρμογή αυτή δεν σχεδιάστηκε τρισδιάστατο το δοχείο, αλλά αφού η κατάσταση είναι παρόμοια με την προηγούμενη, περιοριστήκαμε σε τομή του δοχείου.



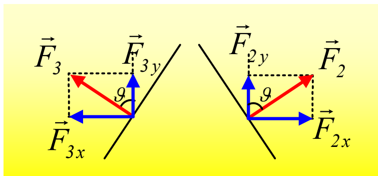
i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκεί το νερό, στη βάση, καθώς και στις δυο κεκλιμένες πλευρές.

Για τη βάση έχουμε:

$$F_1 = pA = \rho ghA$$

ii) Και εδώ, στις δύο κατακόρυφες παράπλευρες έδρες, αυτή προς τον αναγνώστη και η πίσω από τη σελίδα, οι ασκούμενες δυνάμεις είναι οριζόντιες και αντίθετες, οπότε η συνισταμένης τους είναι μηδενική. Απομένουν οι δύο κεκλιμένες έδρες. Λόγω συμμετρίας, οι δύο έδρες δέχονται δυνάμεις ίσου μέτρου $F_2=F_3$, όπου με βάση την προηγούμενη εφαρμογή έχουμε ότι:

$$F_2 = F_3 = p_K \cdot A_1 = \rho g \frac{h}{2} A_1$$



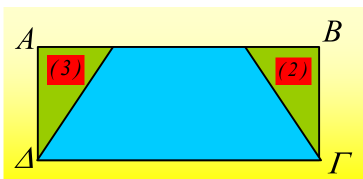
Αναλύοντας ξανά τις δυνάμεις F_2 και F_3 σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = F_{2x} - F_{3x} = F_2 \cdot \eta\mu\vartheta - F_3 \cdot \eta\mu\vartheta = 0$$

$$\Sigma F_y = F_1 - F_{2y} - F_{3y} = F_1 - F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta - F_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = F_1 - 2F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = \rho ghA - 2 \cdot \frac{1}{2} \rho ghA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$$



Τι ακριβώς μας δίνει το παραπάνω άθροισμα; Αh είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου, η τομή του οποίου είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο παραπάνω σχήμα, οπότε

ρghA είναι το βάρος του νερού (**αν υπήρχε**) στον αντίστοιχο όγκο. $\frac{1}{2}hA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι ο όγκος (2), ίσος με τον όγκο (3), οπότε $2 \cdot \frac{1}{2}\rho ghA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι το βάρος του νερού, που περιέχεται στους όγκους (2) και (3). Αλλά τότε η παράσταση $\rho ghA - 2 \cdot \frac{1}{2}\rho ghA_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta$ είναι ίση με το βάρος του νερού που περιέχεται πραγματικά στο δοχείο.

Συνεπώς η συνισταμένη όλων των δυνάμεων, που ασκεί το νερό σε όλα τα τοιχώματα του δοχείου, είναι κατακόρυφη και με μέτρο ίσο με το βάρος του νερού.

Προφανώς όμως η δύναμη που ασκεί το νερό στον πυθμένα, είναι τώρα μεγαλύτερη από το βάρος του νερού!

Σχόλιο:

Οι περιπτώσεις των εφαρμογών 3 και 4 αναφέρονται συνήθως ως το υδροστατικό παράδοξο. Η παραπάνω ανάλυση, νομίζω ανέδειξε ότι δεν υπάρχει κάποιο «σοβαρό παράδοξο», αφού το νερό ασκεί στα τοιχώματα συνολικά δύναμη ίση με το βάρος. Το «παράδοξο εμφανίζεται» όταν ξεχάσουμε, κακώς, το δοχείο και ασχολούμαστε με τη βάση του δοχείου!

dmargaris@gmail.com