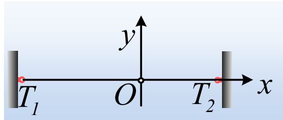
Ένα στάσιμο κύμα ανάμεσα σε δυο σταθερά σημεία.



Μεταξύ δύο σταθερών σημείων T_1 και T_2 βρίσκεται ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, μήκους l=3m, στο οποίο έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο O του ελαστικού μέσου απέχει κατά 1,3m από το δεξιό άκρο T_2 και το λαμβάνουμε ως αρχή ενός συστήματος αξόνων (x,y). Με βάση αυτό το σύστημα αξόνων, το στάσιμο κύμα μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \vartheta_0\right) \quad (1)$$

όπου τη στιγμή t=0, το σημείο O βρίσκεται σε απομάκρυνση y=-0,1m με μηδενική ταχύτητα. Εξάλλου σε χρονικό διάστημα Δt=0,4s το O εκτελεί δυο πλήρης ταλαντώσεις, ενώ η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά μια κοιλία του μέσου έχει μέτρο $\upsilon_{max}=2\pi$ m/s.

i) Να βρεθεί η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας του μέσου.

ii) Ποιες οι δυνατές τιμές της γωνίας φ_0 που περιλαμβάνεται στην παραπάνω εξίσωση;.

iii) Αν $\varphi_0=\pi/3$ rad να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος κατά μήκος του μέσου αυτού, αν μεταξύ του σημείου O και του σημείου πρόσδεσης T_2 υπάρχουν δύο σημεία του μέσου που παραμένουν ακίνητα.

iv) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

v) Να παρασταθούν στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=0$ και $t_2=0,125$ s, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Απάντηση:

i) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι ίση:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{2}{0,4} Hz = 5Hz$$

Ενώ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι $\upsilon_{max}=\omega \cdot A'$, όπου $A'=2A$, οπότε:

$$A' = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{\upsilon_{max}}{2\pi f} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 5} m = 0,2m$$

ii) Τη στιγμή t=0, το σημείο O, βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, αφού έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσής του είναι $A_o=0,1$m. Όμως το πλάτος αυτό είναι ίσο με:

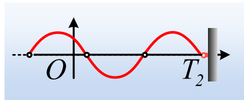
$$A_o = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right)\right| \rightarrow 0,1 = \left|0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi \cdot 0}{\lambda} + \varphi_0\right)\right| \rightarrow$$

$$\left|\sigma\upsilon\nu(\varphi_0)\right| = \frac{1}{2} \rightarrow \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) = \pm\frac{1}{2}$$

Αλλά τότε οι δυνατές τιμές της γωνίας φ_0 είναι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3},\ \varphi_0 = \frac{2\pi}{3},\ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3} \text{ και } \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$$

iii) Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varphi_0=\pi/3$ έχουμε για τους δεσμούς:



$$A = \left|2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_0\right)\right| \to 0{,}2\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot x}{\lambda}+\frac{\pi}{3}\right)\right| = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \to x = \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{6}\right)\lambda$$

Για k=0, έχουμε τον πρώτο δεσμό δεξιά του Ο, για k=1, τον δεύτερο και για k=2, τον τρίτο. Με βάση το διπλανό σχήμα το άκρο T_2 αντιστοιχεί στον τρίτο δεσμό δεξιά του Ο, οπότε:

$$x = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{6}\right)\lambda = \frac{13}{12}\lambda \to \lambda = \frac{12}{13}x = \frac{12}{13}1{,}3m = 1{,}2m$$

Αλλά τότε $\upsilon=\lambda\cdot f=1{,}2\cdot 5m/s=6m/s$.

iv) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος τα δεδομένα για το σημείο Ο, x=0 και t=0, παίρνουμε:

$$-0{,}1 = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi 0}{\lambda}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu(2\pi f 0+\vartheta_0) \to \eta\mu\vartheta_0 = -1 \to \vartheta_0 = \frac{3\pi}{2} \to$$

$$y = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{1{,}2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{3\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi t+\frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

v) Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση του κύματος $t_1=0$, παίρνουμε τις απομακρύνσεις όλων των σημείων του μέσου την παραπάνω χρονική στιγμή:

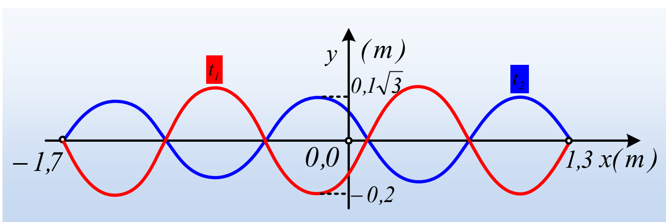
$$y = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot 0+\frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1{,}7m \le x \le 1{,}3m$$

Με γραφική παράσταση, το **κόκκινο** διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα.

Αντίστοιχα τη στιγμή $t_2=0{,}125$ s παίρνουμε:

$$y = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot 0{,}125+\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right) \to$$

$$y = 0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}1\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ με } -1{,}7m \le x \le 1{,}3m$$



Με γραφική παράσταση το **μπλε** διάγραμμα στο παραπάνω σχήμα.

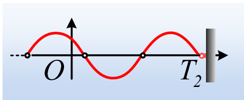
Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να ακολουθήσουμε την εξής πορεία για τον υπολογισμό του μήκους κύματος. Παίρνοντας την εξίσωση του πλάτους και αντικαθιστώντας x=1,3m, παίρνουμε το πλάτος του σημείου πρόσδεσης T_2, το οποίο παραμένει ακίνητο (δεσμός του στάσιμου κύματος).

$$A_{T_2}=\left|2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_0\right)\right|\rightarrow 0=\left|0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi\cdot 1{,}3}{\lambda}+\frac{\pi}{3}\right)\right|\rightarrow$$

$$\frac{2{,}6\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\rightarrow\frac{2{,}6}{\lambda}=k+\frac{1}{6}\rightarrow\lambda=\frac{15{,}6}{6k+1}\quad \text{με } k\in Z \quad (2)$$

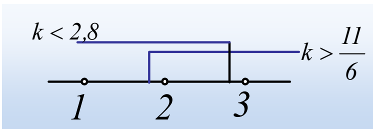
Όμως μεταξύ του Ο και του άκρου T_2 υπάρχουν δύο δεσμοί, όπως στο διπλανό σχήμα. Η απόσταση όμως δύο διαδοχικών δεσμών είναι λ/2, οπότε για την απόσταση OT_2=x, θα ισχύει:



$$2\frac{\lambda}{2}<x<3\frac{\lambda}{2}\quad\rightarrow\ \lambda<1{,}3\text{m}\ \text{ και }\ \lambda>0{,}87$$

οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{cases}\dfrac{15{,}6}{6k+1}<1{,}3\rightarrow 6k+1>12\rightarrow k>\dfrac{11}{6}\ \text{ και}\\[2ex]\dfrac{15{,}6}{6k+1}>0{,}87\rightarrow 6k+1<17{,}9\rightarrow k<2{,}8\end{cases}$$



Οι παραπάνω ανισότητες δίνουν κοινή ακέραια λύση k=2, οπότε από την (2):

$$\lambda=\frac{15{,}6}{6k+1}=\frac{15{,}6}{6\cdot 2+1}=1{,}2m$$

Θα μπορούσαμε βέβαια, να αποφύγουμε την εύρεση της τιμής του ακεραίου k, ερευνώντας απευθείας την κατάλληλη τιμή. Έτσι από τη σχέση $\lambda=\frac{15{,}6}{6k+1}$ δίνοντας ακέραιες τιμές στο k, θα έχουμε:

Για k=0, λ=15,6m, για k=1 λ=2,2, για k=2 λ=1,2m και για k=3 λ=0,82m…

Οπότε με βάση τον περιορισμό ότι λ<1,3m και $\lambda>0{,}87$, επιλέγουμε την τιμή λ=1,2m.

dmargaris@gmail.com