Άλλο ένα στάσιμο κύμα σε χορδή.

Πάνω σε μια χορδή μήκους 10m έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο κύμα. Για να το μελετήσουμε μαθηματικά, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων x-y, όπου σε ένα σημείο Ο, που απέχει 3m από το αριστερό άκρο του θέτουμε x=0, ενώ θεωρούμε t=0 τη στιγμή που το σημείο Ο βρίσκεται στην μέγιστη θετική απομάκρυνσή του. Το σημείο Ο φτάνει για πρώτη φορά στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του τη στιγμή t=0,5s, αφού διανύσει απόσταση 0,8m, ενώ απέχει οριζόντια απόσταση 1m από τον κοντινότερο δεσμό του στάσιμου. Δίνεται ακόμη ότι το σημείο Ο είναι κοιλία του στάσιμου κύματος.

i) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής:

α) $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

β) $y = 2A \cdot \eta\mu\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) $y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda} + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Επιλέξτε τη σωστή μορφή δικαιολογώντας την επιλογή σας.

ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

iii) Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών του στάσιμου κύματος.

iv) Να σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων στιγμιότυπα του στάσιμου τις χρονικές στιγμές:

α) t_1=0 και β) t_2=0,75s

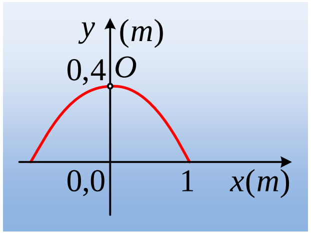
Σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα του σημείου Ο, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

v) α) Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Β στη θέση x_1=4/3m.

β) Σε μια στιγμή η ταχύτητα του Β έχει τιμή υ_B=0,2π m/s. Να βρεθεί η αντίστοιχη ταχύτητα, την παραπάνω χρονική στιγμή, ενός σημείου Γ στη θέση $x_Γ$=2m.

Απάντηση:

i) Ας εστιάσουμε στο σημείο Ο, όπου έχουμε μια κοιλία. Στο διπλανό σχήμα εμφανίζεται η εικόνα στη θέση x=0, όπου το σημείο Ο βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνσή του. Αλλά αφού θα διανύσει απόσταση 0,8m για να φτάσει σε ακραία αρνητική απομάκρυνση το πλάτος ταλάντωσής του είναι Α΄=0,4m. Αλλά για x=0 το πλάτος είναι μέγιστο συνεπώς η εξίσωση που μπορεί να ισχύει είναι η πρώτη:



$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Αφού οι άλλες δύο δίνουν για x=0, πλάτος μηδενικό.

ii) Η απόσταση μιας κοιλίας με τον διπλανό της δεσμό είναι ίση με λ/4, οπότε λ=4m. Εξάλλου το χρονικό διάστημα για να μεταβεί το Ο από την ακραία θετική θέση του στην ακραία αρνητική t=0,5s, είναι ίσο με μισή περίοδο, οπότε T=1s. Με βάση αυτά η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{4}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{με } t \geq 0,\ -3\text{m} \leq x \leq 7\text{m και μονάδες στο S.I.}$$

iii) Δεσμοί του στάσιμου, έχουμε στις θέσεις που το πλάτος μηδενίζεται, συνεπώς:

$$0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow x = (2k+1)$$

Ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει και $-3\text{m} \leq x \leq 7\text{m}$ οπότε:

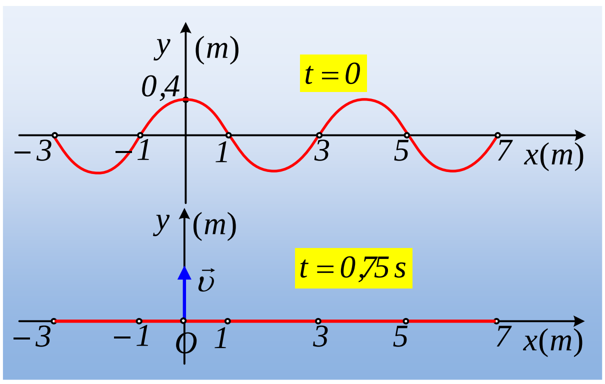
$$-3 \leq 2k+1 \leq 7 \rightarrow -2 \leq k \leq 3$$

Έτσι οι ακέραιες τιμές του k είναι: -2, -1, 0, 1, 2, και 3 και οι αντίστοιχες θέσεις των δεσμών είναι: -3m, -1m, 1m, 3m, 5m, και 7m.

iv) α) Θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση του στάσιμου t=0 παίρνουμε:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Με γραφική παράσταση την πρώτη μορφή του παρακάτω σχήματος.



β) Με αντικατάσταση t_2=0,75s παίρνουμε:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 0{,}75 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Με γραφική παράσταση τη δεύτερη μορφή του σχήματος, όπου το σημείο Ο έχει ταχύτητα προς τα πάνω (0,75s= ¾ T).

v) α) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β είναι:

$$y_B = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\frac{4}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_B = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Β είναι:

$$\upsilon_B = 0,2 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,4\pi \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ με } t \geq 0. \ (1)$$

β) Για το σημείο Γ έχουμε αντίστοιχα:

$$y_\Gamma = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}2\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -0,4 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Γ είναι:

$$\upsilon_\Gamma = 0,4 \cdot 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = -0,8\pi \cdot \eta\mu(2\pi t) \text{ με } t \geq 0. \ (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_\Gamma = 2 \cdot \upsilon_B = 0,4\pi \text{ m/s}$$

dmargaris@gmail.com