

“Η χρυσή εποχή της Θεωρητικής Φυσικής”:
Το επιστημονικό έργο του P.A.M. Dirac από
το 1924 έως το 1933

ΤΟΥ

Jagdish Mehra



Μετάφραση: Αποστόλης Παπάζογλου

Περιεχόμενα

Εισαγωγικό σημείωμα	3
Πρόλογος.....	4
I. Μεγαλώνοντας και η εκπαίδευση στο Μπρίστολ.....	5
II. Φοιτητής στο Cambridge.....	11
III. Σύντομη μαθητεία στην έρευνα.....	16
IV. Κβαντομηχανική.....	24
V. Η ολοκλήρωση του σχήματος.....	31
VI. Επισκέψεις στην Κοπεγχάγη και το Göttingen.....	39
VII. Σχετικιστική κβαντομηχανική.....	45
VIII. Το έργο ενός Θεωρητικού Φυσικού.....	52
Ευχαριστίες.....	57
P.A.M. Dirac Βιβλιογραφία 1924 – 1933.....	58

Εισαγωγικό σημείωμα

Στις βιβλιογραφικές παραπομπές του πρόσφατου βιβλίου του Στέφανου Τραχανά “Ο Βομβιστής και ο Στρατηγός - Ιστορώντας την κβαντική επανάσταση 1900 - 2025” (ΠΕΚ, 2025) γίνεται αναφορά στο άρθρο του J. Mehra “The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac’s Scientific Work from 1924 to 1933”. Το άρθρο παρουσιάστηκε σε ειδικό τιμητικό συμπόσιο για την 70η επέτειο γενεθλίων του Dirac (1972) και περιλαμβάνεται στο δεύτερο τόμο του βιβλίου του Mehra “THE GOLDEN AGE OF THEORETICAL PHYSICS” (2001).

Ο Jagdish Mehra (1931 - 2008) σπούδασε φυσική στο πανεπιστήμιο Allahabad της Ινδίας, στο Ινστιτούτο Max Planck και στο UCLA και ολοκλήρωσε τη διδακτορική διατριβή του στη θεωρητική φυσική στο πανεπιστήμιο του Neuchatel της Ελβετίας. Ασχολήθηκε με την ιστορία της επιστήμης και έγινε ιδιαίτερα γνωστός για το έξι τόμων βιβλίο του “The Historical Development of Quantum Theory” (1982), το οποίο έγραψε σε συνεργασία με τον Helmut Reichenberg και θεωρείται σημείο αναφοράς για την ιστορία της κβαντικής θεωρίας. Έγραψε επίσης μία βιογραφία του Richard Feynman με τίτλο “The Beat of a Different Drum: The Life and Science of Richard Feynman” (1994) και το βιβλίο “Einstein, Hilbert and the Theory of Gravitation” (1974) σχετικά με το ρόλο του David Hilbert στην ανάπτυξη της βαρυτικής θεωρίας του Albert Einstein.

Ο Στέφανος Τραχανάς χαρακτηρίζει το άρθρο του Mehra ως “ένα θαυμάσιο άρθρο για την προσωπικότητα και το έργο του Dirac” και αυτό στάθηκε η αφορμή να επιχειρηθεί μια απόδοσή του στα Ελληνικά. Στο πρωτότυπο κείμενο, το οποίο μπορείτε να βρείτε [εδώ](#), οι υποσημειώσεις βρίσκονται στο τέλος του άρθρου. Στη μεταφρασμένη εκδοχή προτιμήθηκε να συμπεριληφθούν στο σώμα του κειμένου προς διευκόλυνση του αναγνώστη και προστέθηκαν κάποια λίγα διευκρινιστικά σχόλια με τη σήμανση “ΣτΜ”. Η ευθύνη για τα όποια μεταφραστικά λάθη βαρύνει φυσικά τον γράφοντα.

Αποστόλης Παπάζογλου

Απρίλιος 2025

“Η χρυσή εποχή της Θεωρητικής Φυσικής”: Το επιστημονικό έργο του P.A.M. Dirac από το 1924 έως το 1933

του

Jagdish Mehra

(αφιερωμένο στον Paul Dirac με αφορμή τα 70στα γενέθλιά του)

Τον Ιούνιο του 1968, στο συμπόσιο Σύγχρονης Φυσικής στην Τεργέστη, ο Paul Dirac προλόγισε τον Werner Heisenberg σε μια από τις απογευματινές διαλέξεις με θέμα “Από μια ζωή Φυσικής”. Ο Dirac είπε: “Έχω τους καλύτερους λόγους να θαυμάζω τον Heisenberg. Εκείνος κι εγώ ήμασταν νεαροί ερευνητές την ίδια εποχή, γύρω στην ίδια ηλικία, εργαζόμενοι στο ίδιο πρόβλημα. Ο Heisenberg τα κατάφερε εκεί που απέτυχα. Υπήρχε τότε ένας μεγάλος όγκος συσσωρευμένων φασματοσκοπικών δεδομένων και ο Heisenberg βρήκε το σωστό τρόπο να τα αντιμετωπίσει. Κάνοντάς το, ξεκίνησε τη χρυσή εποχή της θεωρητικής φυσικής και για κάποια χρόνια μετά από αυτό ήταν εύκολο για οποιοδήποτε φοιτητή δεύτερης κατηγορίας να παράγει έργο πρώτης κατηγορίας”¹.

Σε αυτό το άρθρο θα συζητήσω το διανοητικό υπόβαθρο του Dirac και τις συνεισφορές του στη θεωρητική φυσική κατά τη διάρκεια 1924-1933. Το επιστημονικό έργο του Dirac σε αυτή την αξιοσημείωτη περίοδο, παρά την ταπεινοφροσύνη του, δείχνει ότι ήταν ένας από τους κορυφαίους αρχιτέκτονες της χρυσής εποχής της θεωρητικής φυσικής.

¹ Το Διεθνές Συμπόσιο Σύγχρονης Φυσικής, με διοργανωτή τον Abdus Salam, έγινε στο Διεθνές Κέντρο Θεωρητικής Φυσικής, στην Τεργέστη της Ιταλίας από τις 7 μέχρι τις 28 Ιουνίου 1968. Τα πρακτικά του συμποσίου έχουν εκδοθεί σε δύο τόμους από τον Οργανισμό Διεθνούς Ατομικής Ενέργειας. Το συμπόσιο παρακολούθησαν μερικοί από τους πιο διακεκριμένους φυσικούς στον κόσμο. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του συμποσίου ήταν μια σειρά διαλέξεων από τα “μεγάλα μυαλά”: τους Hans Bethe, Paul Dirac, Werner Heisenberg, Eugene Wigner και Oscar Klein. Ο E.M. Lifschitz μίλησε για το έργο του Landau ως επιστήμονα και δασκάλου. Οι απογευματινές διαλέξεις συμπεριλήφθηκαν σε ένα μικρό βιβλίο με τίτλο “From a Life of Physics” και εκδόθηκαν ξεχωριστά σε περιληπτική μορφή. Στο άρθρο αυτό θα παραθέτω από το πλήρες κείμενο των διαλέξεων του Dirac και του Heisenberg. Ο Dirac προλόγισε την ομιλία του Heisenberg στις 18 Ιουνίου 1968.

I. Μεγαλώνοντας και η εκπαίδευση στο Μπρίστολ

Ο Paul Adrien Maurice Dirac γεννήθηκε στις 8 Αυγούστου του 1902 στο Μπρίστολ της Αγγλίας από τον Charles Adrien Ladislas Dirac και τη σύζυγό του Florence Hannah Holten. Ήταν ο δεύτερος από τρία παιδιά - είχε ένα μεγαλύτερο αδερφό και μια μικρότερη αδερφή. Ο πατέρας του, γεννημένος στην Ελβετία, είχε φύγει για την Αγγλία και παντρεύτηκε εκεί. Δίδασκε Γαλλικά στο γυμνάσιο Merchant Venturers στο Μπρίστολ, όπου μάλιστα ο Dirac έκανε τα πρώτα του βήματα στην εκπαίδευση. Στο σπίτι, ο νεαρός Dirac ακολουθούσε τον κανόνα που είχε θέσει ο πατέρας του, να του μιλά στα Γαλλικά ώστε να μάθει τη γλώσσα. Όποτε ο Dirac καταλάβαινε ότι δεν μπορούσε να εκφραστεί στα Γαλλικά, παρέμενε σιωπηλός. Αυτή η κατάσταση τον οδήγησε μάλλον από νωρίς στο να είναι λιγομίλητος. Η ανάγκη για κοινωνικές επαφές δεν τονίζονταν ιδιαίτερα στο σπίτι του. Ο Paul ήταν εσωστρεφής και καθώς συνήθως παρέμενε σιωπηλός και μόνος, αφιερώθηκε στον ήσυχο στοχασμό γύρω από τη Φύση.

Ο πατέρας του Dirac εκτιμούσε τη σημασία μιας καλής εκπαίδευσης και τον ενθάρρυνε να σπουδάσει μαθηματικά. Το Merchant Venturers στο Μπρίστολ ήταν ένα πολύ καλό σχολείο, επικεντρωμένο στην επιστήμη (μαθηματικά, φυσική και χημεία, αλλά όχι βιολογία), τις μοντέρνες γλώσσες και λίγο στην ιστορία και τη γεωγραφία. Αντίθετα με πολλά γυμνάσια, τα λατινικά και οι κλασικές σπουδές δεν συμπεριλαμβάνονταν στο πρόγραμμα σπουδών - οι μαθητές που σκόπευαν να πάνε στην Οξφόρδη ή το Cambridge, όπου τα λατινικά ήταν προαπαιτούμενα για την εισαγωγή, τα επέλεγαν ως ξεχωριστά αντικείμενα. Οι περισσότεροι από το σχολείο του Dirac που θα συνέχιζαν τις σπουδές τους, θα πήγαιναν στο πανεπιστήμιο του Μπρίστολ για σπουδές στην επιστήμη ή τη μηχανολογία. Στον Dirac δεν άρεσε το τμήμα του προγράμματος σπουδών που αφορούσε την κλασική παιδεία και θεωρούσε τον εαυτό του τυχερό που πήγε στο σχολείο αυτό².

Το σχολείο μοιραζόταν τις εγκαταστάσεις του με το κολλέγιο μηχανολογίας του πανεπιστημίου του Μπρίστολ, οπότε το πρωί λειτουργούσε ως γυμνάσιο και το απόγευμα ως τεχνικό κολλέγιο.

² Ο Dirac διάβασε λίγα μυθιστορήματα, κυρίως σε σχέση με τη μελέτη των Αγγλικών. Μου είπε (Μαϊάμι, Μάρτιος 1969): «διάβαζα πάντα με αργό ρυθμό και δεν μου άρεσε η ποίηση».

Έμαθα από τον Αμερικανό ποιητή Archibald MacLeish (Amherst, 6 Απριλίου 1966) τι του είχε πει ο J.R.

Oppenheimer σχετικά με μια συζήτησή του με τον Dirac τις πρώτες μέρες στο Göttingen: Ο Dirac φέρεται να είπε στον Oppenheimer: "Πώς μπορείς να κάνεις φυσική και ποίηση ταυτόχρονα; Ο σκοπός της επιστήμης είναι να κάνει τα δύσκολα πράγματα κατανοητά με απλό τρόπο. Ο στόχος της ποίησης είναι να διατυπώνει απλά πράγματα με ακατανόητο τρόπο. Τα δύο πράγματα είναι ασυμβίβαστα". Μια παρόμοια εκδοχή εμφανίζεται στο βιβλίο του Robert Jungk "Brighter Than A Thousand Suns" (Grover Press, σελίδες 21-22).

Ο George Gamow διηγείται την ακόλουθη ιστορία. Ο Peter Kapitza είχε δώσει στον Dirac μια αγγλική μετάφραση του "Εγκλημα και Τιμωρία" του Ντοστογιέφσκι. "Πώς σου φάνηκε;" ρώτησε ο Kapitza, όταν ο Dirac του επέστρεψε το βιβλίο. "Είναι όμορφο" είπε ο Dirac, "αλλά σε ένα από τα κεφάλαια ο συγγραφέας έκανε ένα λάθος. Περιγράφει τον Ήλιο να ανατέλλει δύο φορές την ίδια μέρα". Αυτό ήταν το μοναδικό σχόλιο του Dirac για το μυθιστόρημα του Ντοστογιέφσκι. (G. Gamow, *Thirty Years That Shook Physics*, Doubleday, N.Y., 1966, σελ. 121-122). Η ιστορία αυτή είναι σωστή ως προς την απάντηση του Dirac, αλλά στη θέση του Kapitza ήταν ο Wigner.

Ως εκ τούτου, τα εργαστήρια του κολλεγίου ήταν προσβάσιμα από τους μαθητές του γυμνασίου και ο Dirac απέκτησε κάποια πρακτική εμπειρία στη μεταλλουργία. Στη φυσική υπήρχαν τρεις ώρες διαλέξεων τη βδομάδα και ένα απόγευμα πρακτικής εξάσκησης και το μάθημα κάλυπτε τη θερμότητα, το φως και τον ήχο. Ο καθηγητής χημείας του Dirac πίστευε στη μοντέρνα διδασκαλία της χημείας και εισήγαγε τα άτομα και τις χημικές αντιδράσεις από πολύ νωρίς, χρησιμοποιώντας ατομικά αντί για ισοδύναμα βάρη ευθύς εξαρχής. Στα περισσότερα αντικείμενα, τα οποία περιλάμβαναν επίσης μαθήματα στα Αγγλικά, Γαλλικά και Γερμανικά ο Dirac συμβάδιζε με την τάξη, με εξαίρεση τα μαθηματικά. Τα μαθηματικά, που τον ενδιέφεραν περισσότερο, ήταν χωρισμένα σε άλγεβρα, γεωμετρία και τριγωνομετρία. Βελτίωνε και επέκτεινε τη γνώση του μελετώντας επισταμένα τα λίγα βιβλία που του ήταν διαθέσιμα. Μελετούσε μόνος του αρκετά, σε ένα πιο προχωρημένο επίπεδο σε σχέση με την υπόλοιπη τάξη. Ασχολήθηκε από νωρίς με βιβλία στο λογισμό (Edwards) και τη γεωμετρία (Hall και Knight). Στο σχολείο διδάσκονταν επίσης μοντέρνες μέθοδοι μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Οι μεγαλύτεροι μαθητές έφυγαν για τον πόλεμο (Α΄ Παγκόσμιος Πόλεμος) αφήνοντας κενές τις μεγαλύτερες τάξεις και ο Dirac είχε το πλεονέκτημα να ανέβει μια τάξη σε σχέση με την ηλικία του, οπότε είχε την ευκαιρία να έρθει σε επαφή με αντικείμενα, ιδιαίτερα στις επιστήμες, αρκετά νωρίς.

Ο μεγαλύτερος αδερφός του είχε σπουδάσει μηχανολογία και ο Dirac σκόπευε να ακολουθήσει τα βήματά του. Ολοκληρώνοντας το σχολείο στα δεκάξι του, μπήκε στο πανεπιστήμιο του Μπρίστολ ως φοιτητής μηχανολογίας. Οι σπουδές του γίνονταν στον ίδιο χώρο με πριν και ακόμη και κάποιοι από τους δασκάλους ήταν οι ίδιοι. Ένας από αυτούς, ο David Robertson, που του είχε διδάξει φυσική στο σχολείο, ήταν τώρα ο καθηγητής του στην ηλεκτρολογία. Ο Robertson δίδασκε τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά αντικείμενα και ο Dirac αποφάσισε να ειδικευτεί ως ηλεκτρολόγος μηχανικός.

Ο Robertson ήταν παράλυτος εξαιτίας πολιομυελίτιδας και έπρεπε να κυκλοφορεί με αναπηρικό καροτσάκι. Είχε οργανώσει τη ζωή του πολύ μεθοδικά και επέβαλλε στους μαθητές του την ίδια τάση για οργάνωση. Ο Dirac έμαθε τα πάντα για τα ηλεκτρικά κυκλώματα και ο Robertson έκανε τους υπολογισμούς με τέτοιο τρόπο, ώστε να αναδεικνύεται πάντα η μαθηματική ομορφιά και κομψότητα. Παραδόξως δεν δίδασκε ηλεκτρομαγνητική θεωρία ή ηλεκτρομαγνητικά κύματα, αλλά κυρίως ζητήματα ισχύος στη μηχανολογία. Ο Dirac διδάχτηκε από αυτόν λίγο λογισμό του Heaviside³, όσο μελετούσε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η έμφαση δεν δινόταν τόσο σε αυστηρές αποδείξεις, όσο σε μαθηματικούς κανόνες μέσω των οποίων θα κατέληγε κανείς σε σωστά αποτελέσματα με κάποιο μαγικό τρόπο.

³ Ο Oliver Heaviside, (18 Μαΐου 1850 - 3 Φεβρουαρίου 1925) ήταν Άγγλος αυτοδίδακτος ηλεκτρολόγος μηχανικός, μαθηματικός και φυσικός. Εισήγαγε τους μιγαδικούς αριθμούς στη μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων, επινόησε μαθηματικές τεχνικές για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, επαναδιατύπωσε τις Εξισώσεις Maxwell με όρους ηλεκτρικών/μαγνητικών δυνάμεων και ροών, και θεμελίωσε ανεξάρτητα τη διανυσματική ανάλυση. (ΣΤΜ)

Ο Dirac διδάχτηκε επίσης κάποια γενικά στοιχεία μηχανολογίας, όπως αντοχή υλικών, υπολογισμό φορτίων σε κατασκευές κλπ.

Πιθανότατα αυτή η εκπαίδευση του έδωσε για πρώτη φορά την ιδέα μιας συνάρτησης δέλτα. “Διότι όταν σκέφτεσαι τα φορτία σε μηχανολογικές κατασκευές, κάποιες φορές συναντάς ένα κατανεμημένο φορτίο και κάποιες άλλες ένα συγκεντρωμένο φορτίο. Στις δύο αυτές περιπτώσεις έχεις κάπως διαφορετικές εξισώσεις. Ουσιαστικά, η προσπάθεια να ενοποιηθούν αυτά τα δύο οδηγεί στη συνάρτηση δέλτα”⁴.

Την εποχή εκείνη ο Dirac δεν προέβη στην ενοποίηση, αλλά ένιωθε υποσυνείδητα την ανάγκη να το πράξει. Ένα σημαντικό πράγμα που έμαθε από τα μαθήματα μηχανολογίας ήταν ότι οι προσεγγίσεις, μέσω των οποίων έπρεπε να περιγράφεται μια πραγματική κατάσταση, μπορούσαν να οδηγήσουν επίσης σε όμορφα και ικανοποιητικά μαθηματικά. “Πριν από αυτό πίστευα ότι κάθε είδος προσέγγισης ήταν πραγματικά αφόρητο και ότι κάποιος θα έπρεπε απλά να επικεντρώνεται σε ακριβείς εξισώσεις κάθε φορά. Μετά σκέφτηκα ότι στον πραγματικό κόσμο όλες οι εξισώσεις μας είναι μόνο προσεγγιστικές. Πρέπει μόνο να προσπαθούμε για όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια. Παρόλο που οι εξισώσεις είναι προσεγγιστικές, μπορούν να είναι όμορφες”.

Οι μαθηματικοί στο Μπρίστολ είχαν μάθει για τις μαθηματικές ικανότητες του Dirac από τα αρχεία των εξετάσεων του στο σχολείο. Ήλπιζαν ότι θα εξειδικευόταν στα μαθηματικά και απογοητεύτηκαν αρκετά όταν αποφάσισε να ακολουθήσει τη μηχανολογία⁵. Παρόλο που του άρεσαν τα μαθηματικά πάρα πολύ και θα ήθελε να τα ακολουθήσει, δεν γνώριζε ότι κάποιος θα μπορούσε να κερδίζει τα προς το ζην μέσω της καθαρής επιστήμης⁶. Η σκέψη να ακολουθήσει μια εκπαίδευση στα μαθηματικά και να γίνει δάσκαλος στο σχολείο δεν του φαινόταν ελκυστική. Αποφάσισε ότι η μηχανολογία θα οδηγούσε σε μια ικανοποιητική

⁴ Αρχείο για την Ιστορία της Κβαντικής Φυσικής (με συντομογραφία AHQP εφεξής). Είχα την ευχαρίστηση εκτεταμένων συζητήσεων με τον Dirac - κάποιες ηχογραφημένες - σε διάφορες περιστάσεις και τοποθεσίες και έχω επιβεβαιώσει πολλές “ιστορίες του Dirac” απευθείας από αυτόν. Αναφορικά με το επιστημονικό του έργο, την προέλευση των ιδεών του και τις απόψεις του σε πληθώρα θεμάτων, ανακάλυψα ότι οι παρατηρήσεις του προς εμένα σε άλλες συνεντεύξεις ή σε δημόσιες διαλέξεις διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ακόμη και σε λεπτομέρειες όπως οι χρησιμοποιούμενες εκφράσεις ή η σύνταξη. Θα ήθελα να αναφέρω ειδικότερα συζητήσεις μαζί του στην Τερνέστη (Ιούνιος του 1968), στο Μαϊάμι (Μάρτιος του 1969) και Austin (Απρίλιος του 1970) σε μια μεγάλη γκάμα θεμάτων σχετικά με το επιστημονικό του έργο και την ανάπτυξη της πρόσφατης φυσικής.

⁵ Καθώς ο Dirac δεν είχε μεγάλη προσωπική επαφή με τους δασκάλους του, έπρεπε να μάθουν γι αυτόν από τις εξετάσεις του.

⁶ Ο Dirac δεν είχε σκεφτεί επίσης μια σταδιοδρομία στη φυσική. Αυτό πιθανά οφειλόταν στο γεγονός ότι κατά τη διάρκεια των σπουδών του στο Μπρίστολ δεν ερχόταν σε επαφή με τους μαθηματικούς και τους φυσικούς, καθώς αυτοί βρίσκονταν σε άλλο κτήριο μισό μίλι μακριά και ο Dirac δεν πήγαινε ποτέ εκεί. Στο σχολείο και στο κολέγιο στο Μπρίστολ έλαβε τις γνώσεις του στη φυσική αποκλειστικά από τον David Robertson.

σταδιοδρομία, αλλά ανακάλυψε επίσης ότι δεν ήταν ιδιαίτερα καλός στην πρακτική εργασία και έκανε ελάχιστη πειραματική δουλειά κατά τη διάρκεια των σπουδών του⁷.

Ο Dirac αποφοίτησε από το πανεπιστήμιο του Μπρίστολ το 1921 ως ηλεκτρολόγος μηχανικός στα δεκαεννιά του. Ο πατέρας του τον έστειλε στο Cambridge, ώστε να προσπαθήσει να πάρει υποτροφία. Ήταν πολύ αργά για μια πλήρη υποτροφία, αλλά μέσω μιας εξέτασης του προσφέρθηκε μια ετήσια υποτροφία εβδομήντα λιρών στο κολλέγιο St. John's. Το ποσό δεν ήταν αρκετό για να τον υποστηρίξει στο Cambridge και ο Dirac έμεινε στο Μπρίστολ με τους γονείς του. Αναζήτησε δουλειά ως μηχανικός, αλλά λόγω της οικονομικής ύφεσης δεν μπόρεσε να βρει κάτι. Ο David Robertson του πρότεινε αντί να περιμένει, να κάνει κάποια έρευνα στη μηχανολογία και του έδωσε ένα πρόβλημα στα στροβοσκόπια. Λίγες εβδομάδες αργότερα, όμως, το τμήμα μαθηματικών του Μπρίστολ πρόσφερε στον Dirac υποτροφία για σπουδές στα μαθηματικά, πράγμα το οποίο έκανε για τα επόμενα δύο χρόνια. Το πρόγραμμα σπουδών στο Μπρίστολ διαρκούσε κανονικά τρία χρόνια, αλλά λόγω της πρότερης εκπαίδευσής του γλίτωσε ένα χρόνο. Κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους ο Dirac σπούδασε καθαρά αλλά και εφαρμοσμένα μαθηματικά και το δεύτερο έτος έπρεπε να εξειδικευτεί σε ένα από τα δύο.

Ο Dirac και μια δεσποινίς Dent ήταν οι μοναδικοί στα προχωρημένα μαθήματα στα μαθηματικά. Η δεσποινίς Dent ήταν αποφασισμένη να ακολουθήσει εφαρμοσμένα μαθηματικά και προκειμένου το τμήμα μαθηματικών να μην αναγκαστεί να προσφέρει δύο ομάδες μαθημάτων, ο Dirac αποφάσισε επίσης να ακολουθήσει τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Αυτή ήταν η επιστροφή του στην επιστήμη και δεν αναζήτησε ποτέ ξανά δουλειά ως μηχανολόγος. Η επιλογή είχε ήδη γίνει γι αυτόν!

Στα μαθηματικά στο Μπρίστολ ο Dirac επηρεάστηκε από τους δασκάλους του Peter Fraser και H.R. Hasse⁸. Ο Hasse δίδασκε εφαρμοσμένα μαθηματικά και ο Fraser έδινε διαλέξεις στα

⁷ Κατά τη διάρκεια των σπουδών του ως μηχανικός ο Dirac πήγε κάποτε σε ένα εργοστάσιο για πρακτική εξάσκηση, αλλά απέτυχε να ικανοποιήσει τους εργοδότες του. Αυτοί έστειλαν μια δυσμενή αναφορά για το έργο του εκεί στον καθηγητή του. (Συζήτηση με τον Dirac στο Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

⁸ Ο Dirac πιστεύει ότι ο Peter Fraser ήταν ο καλύτερος δάσκαλος που είχε ποτέ. Αποφοίτησε από το πανεπιστήμιο του Aberdeen το 1902 με εύφημη μνεία. Στη συνέχεια πήγε στο Queen's College στο Cambridge, όπου το ενδιαφέρον του στη γεωμετρία άνοιξε με την επίδραση των H.F. Baker, H.W. Richmond και J.H. Grace. Τα ενδιαφέροντα του Fraser κάλυπταν ολόκληρο το πεδίο των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών του καιρού του. Η προσέγγισή του ήταν πάντοτε περισσότερο γεωμετρική παρά αναλυτική και πιθανά υπό την επίδρασή του ο Dirac συνήθισε τη "γεωμετρική" σκέψη. Ο Fraser εντάχθηκε στο προσωπικό του κολλεγίου του Μπρίστολ, το οποίο σύντομα έγινε πανεπιστήμιο του Μπρίστολ, το 1906. Μετά το θάνατο του επικεφαλής του τμήματος το 1915, ο Fraser διηύθυνε το τμήμα μαθηματικών, μέχρι τη στιγμή που ο H.R. Hasse διορίστηκε καθηγητής το 1919. Η ζωή του Fraser ήταν ήρεμη, αλλά γεμάτη ζέση. Παρόλο που δεν δημοσίευσε ποτέ κάποιο άρθρο, ενημερωνόταν συνεχώς μελετώντας. Διέθετε μια πραγματική και πολύ ισχυρή αντίληψη για τις θεμελιώδεις αρχές των μαθηματικών. Οι μαθητές του, συμπεριλαμβανομένου του Dirac, όφειλαν πολλά από τη μαθηματική εκπαίδευσή τους σε αυτόν, διότι "τους βρήκε στα στάδια της διαμόρφωσής τους και τους μιλούσε στα καφέ, στις βόλτες στην εξοχή ή στο γήπεδο του γκολφ και μοιραζόταν τη σοφία του μαζί τους". Ο Fraser πήρε σύνταξη το 1946 και πέθανε στις 18 Ιουνίου του 1958.

καθαρά μαθηματικά. Ο Fraser τον εισήγαγε στις ιδέες της μαθηματικής αυστηρότητας και έκανε το αντικείμενο πραγματικά ελκυστικό. Εκτός από τη διδασκαλία προβολικής γεωμετρίας, την οποία ο Dirac βρήκε πολύ ενδιαφέρουσα, ο Fraser έκανε αυστηρές αποδείξεις στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Αυτό ήταν μια νέα εμπειρία για τον Dirac, διότι ένιωθε - και ακόμη και σήμερα το νιώθει - πως όταν κάποιος είναι σίγουρος ότι μια συγκεκριμένη μέθοδος δίνει τη σωστή απάντηση, δεν χρειάζεται να τον απασχολεί η μαθηματική αυστηρότητα.

Ο Fraser έδινε έμφαση στη γεωμετρική προσέγγιση της μαθηματικής σκέψης. Ο Dirac έμαθε αρκετή άλγεβρα μόνος του - είχε μελετήσει ακόμη και τετραδόνια (quaternions)⁹. Οι περισσότεροι θα έλεγαν ότι ο Dirac επέδειξε μεγάλη αλγεβρική ικανότητα στο έργο του, αλλά ο ίδιος έχει πάντοτε υποστηρίξει ότι η σκέψη του γύρω από τα προβλήματα φυσικής είναι εν πολλοίς “γεωμετρική”.

Εκτός από τα μαθηματικά, ο Dirac είχε ενδιαφερθεί για τη θεωρία της σχετικότητας από τότε που ήταν φοιτητής μηχανολογίας. Στο τέλος του Α' Παγκοσμίου Πολέμου το 1918 η θεωρία της σχετικότητας προκαλούσε τεράστιο ενθουσιασμό και οι εφημερίδες και τα περιοδικά ήταν γεμάτα άρθρα σχετικά με αυτή. Εκείνη την εποχή ο Dirac σκεφτόταν για το χώρο και το χρόνο και πώς θα μπορούσαν να συνδέονται. Πίστευε ότι οι άξονες του χώρου και του χρόνου θα έπρεπε να στραφούν μαζί, αλλά επειδή τότε γνώριζε μόνο τον Ευκλείδειο χώρο, εγκατέλειψε το πρόβλημα. Ενώ ήταν ακόμη στο σχολείο στο Μπρίστολ παρακολούθησε τις διαλέξεις του φιλόσοφου C.D. Broad στη σχετικότητα. Οι διαλέξεις του Broad ήταν περισσότερο φιλοσοφικές παρά μαθηματικές και ο Dirac έμαθε τις λεπτομέρειες από το “Space, Time and Gravitation” του A.S. Eddington¹⁰. Διάβασε μόνος του ταυτόχρονα ειδική και γενική θεωρία σχετικότητας και η γεωμετρική του σκέψη τον βοήθησε να εκτιμήσει τις σχετικές ιδέες.

⁹ Είναι αρκετά πιθανό ότι ο Dirac έμαθε για πρώτη φορά σχετικά με τα τετραδόνια από το Treatise on Natural Philosophy των Thomson και Tait. Ο Dirac πίστευε πάντα ότι τα τετραδόνια έπρεπε να χαίρουν μεγαλύτερης εκτίμησης, παρόλο που ο ίδιος τα χρησιμοποίησε μόνο μια φορά στο άρθρο του “Applications of Quaternions to Lorentz Transformations” (Proceedings of the Royal Irish Academy, 261-270, 1945). Είχε προσπαθήσει να τα χρησιμοποιήσει κάποτε στην κβαντική θεωρία, αλλά δεν κατέληξε σε κάποια καινούρια λύση με τη βοήθειά τους. [Τα τετραδόνια (quaternions) αποτελούν μία μη-αντιμεταθετική επέκταση της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών. Παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton το 1843 και εφαρμόστηκαν στη μηχανική του τρισδιάστατου χώρου. Η αρχική διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό ήταν σε μορφή τετραδονίων. Σήμερα, στις περισσότερες εφαρμογές έχουν αντικατασταθεί από την απλούστερη διανυσματική ανάλυση. (ΣΤΜ)]

¹⁰ A.S. Eddington, Space, Time and Gravitation, Cambridge, 1920. Ο Dirac χρειάστηκε αρκετό χρόνο να συνηθίσει το λογισμό τανυστών. Συζητούσε συνήθως τις μαθηματικές λεπτομέρειες της σχετικότητας με ένα συμφοιτητή του, τον H.C. Wilshire, ο οποίος αργότερα δίδαξε σε ένα κολλέγιο αεροναυπηγικής κοντά στο Bedford. Παρόλο που ο C.D. Broad συζητούσε το αντικείμενο της σχετικότητας από τη φιλοσοφική πλευρά, ο Dirac “κατάλαβε ότι επρόκειτο για κάτι καινούριο, το οποίο δεν είχε ποτέ σκεφτεί στις υποθέσεις του σχετικά με τη σύνδεση χώρου και χρόνου (ΑΗQP).

Ως φοιτητής, ο Dirac έδειξε επίσης κάποιο ενδιαφέρον για τη φιλοσοφία και τη λογική. Απέκτησε ένα αντίγραφο της “Λογικής” του John Stewart Mill από τη βιβλιοθήκη και το μελέτησε. Εκείνη την εποχή πίστευε ότι η φιλοσοφία ήταν ίσως σημαντική, αλλά αργότερα αποφάνθηκε ότι “δεν θα οδηγήσει ποτέ σε σπουδαίες ανακαλύψεις. Είναι απλά ένας τρόπος να σκέφτεται κανείς για τις ανακαλύψεις που έχουν ήδη γίνει”¹¹.

Κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσής του στο Μπρίστολ, ο Dirac έμενε με τους γονείς του και εκτός από τα δύο χρόνια σπουδών στο τμήμα μαθηματικών, παρακολούθησε το σχολείο και το κολλέγιο στο ίδιο κτήριο. Ο David Robertson και ο Peter Fraser, που εκτιμούσαν τις ικανότητές του, τον προσκαλούσαν στο σπίτι τους περιστασιακά. Κατά τη διάρκεια των σπουδών του ως μηχανικός το 1920, ο Dirac εργάστηκε για περίπου δύο μήνες στην εταιρία Thompson-Houston Works στο Rugby. Απέκτησε κάποια εμπειρία, αλλά δεν ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητική. Αυτή ήταν η πρώτη φορά που βρέθηκε μακριά από το σπίτι του. Στη συνέχεια πήγε στο Cambridge και μέσα σε λίγα χρόνια έγινε ένας από τους μεγαλύτερους φυσικούς του κόσμου.

¹¹ Σε αντίθεση με τον Niels Bohr, ο οποίος σκεφτόταν και συζητούσε συνεχώς φιλοσοφικά προβλήματα, ο Dirac δεν το έκανε. (Συζήτηση με τον Dirac, Τεργέστη, Ιούνιος 1968).

II. Φοιτητής στο Cambridge

Ο Dirac έφτασε στο Cambridge ως ερευνητής το φθινόπωρο του 1923. Μια χορηγία από το Τμήμα Επιστημονικής και Βιομηχανικής Έρευνας για εργασία στα ανώτερα μαθηματικά σε συνδυασμό με μια υποτροφία που είχε κερδίσει δύο χρόνια νωρίτερα (1851 Exhibition Studentship¹²), του εξασφάλισαν την παραμονή του στο Cambridge. Τα είχε πάει καλά στις σπουδές του στα μαθηματικά στο Μπρίστολ, αλλά δεν γνώριζε τις απαιτήσεις του Cambridge και δεν ήταν ακόμη σίγουρος, αν θα μπορούσε να γίνει αρκετά καλός για να διδάξει σε ένα πανεπιστήμιο.

Παρόλο που είχε γίνει δεκτός στο St. John's College, δεν εξασφάλισε άμεση διαμονή εκεί, καθώς δεν υπήρχαν αρκετά δωμάτια στο κολλέγιο¹³. Τα διαμερίσματά του ήταν συνήθως κρύα και μελετούσε συνήθως στις βιβλιοθήκες. Υπήρχαν αρκετές βιβλιοθήκες προς χρήση στο Cambridge: η βιβλιοθήκη της Cambridge Philosophical Society, η University Library, η βιβλιοθήκη του St. John's College και η μικρή βιβλιοθήκη στο εργαστήριο Cavendish. Σε αυτές τις βιβλιοθήκες, ιδιαίτερα στην τελευταία, μπορούσε κανείς να εργάζεται ανενόχλητος όλο το πρωί. Ο Dirac έβρισκε τις βιβλιοθήκες χρήσιμες και για το γεγονός ότι βασιζόταν πάντοτε περισσότερο στην προσωπική του μελέτη για ακριβείς και λεπτομερείς πληροφορίες, παρά στις διαλέξεις όπου αποκτούσε απλώς γενικές γνώσεις¹⁴.

Ένα από τα θέματα που μελέτησε εντατικά τον πρώτο καιρό στο Cambridge, ήταν οι μέθοδοι Hamilton. Χρησιμοποιούσε το "Analytical Dynamics" του Whittaker¹⁵. Οι μεταβλητές δράσης-γωνίας θεωρούνταν πολύ σημαντικές νωρίς τη δεκαετία του 1920 για το πρόβλημα της περιγραφής μη περιοδικών κινήσεων, καθώς η προηγούμενη χρήση τους στη συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld είχε σημειώσει μεγάλη πρόοδο. Ο Dirac δεν γνώριζε καθόλου τη θεωρία του Bohr για το άτομο όσο ήταν στο Μπρίστολ, διότι όσο σπούδαζε μαθηματικά δεν είχε καμία επαφή με τους φυσικούς. Επιπλέον, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά που σπούδαζε δεν πήγαιναν πέρα από τη θεωρία δυναμικού και δεν συμπεριλάμβαναν την ατομική θεωρία του Bohr. Στην πραγματικότητα, ο Dirac είχε την εντύπωση ότι τα μαθήματα μαθηματικών στο

¹² Το "1851 Research Fellowship" είναι μια υποτροφία, που απονέμεται ετησίως για ερευνητική εργασία τριών ετών σε "νέους επιστήμονες ή μηχανικούς, πολλά υποσχόμενους". Απευθύνεται σε όλες τις εθνικότητες και σε όλα τα επιστημονικά πεδία, συμπεριλαμβανομένης της φυσικής, των μαθηματικών, της βιολογίας, των εφαρμοσμένων επιστημών και όλων των κλάδων μηχανικών. Μεταξύ αυτών που έχουν λάβει την υποτροφία βρίσκονται οι: James Chadwick, John Cockroft, Paul Dirac, Peter Higgs, Fred Hoyle, Ernest Rutherford, William Penney, Alexander Todd και Ernest Walton. (ΣΤΜ).

¹³ Το κολλέγιο προσπαθούσε να εξασφαλίσει διαμονή σε όσο περισσότερους φοιτητές. Οι υπότροφοι έμεναν στο κολλέγιο, αλλά η υποτροφία του Dirac (Exhibition Studentship) δεν ήταν πλήρης υποτροφία. Διέμενε εκτός κολλεγίου το πρώτο έτος, στο κολλέγιο το δεύτερο και πάλι εκτός το τρίτο. Δειπνούσε στο κολλέγιο κάθε βράδυ.

¹⁴ Προκειμένου να κατανοήσει κάτι πλήρως, ο Dirac συνήθιζε να κρατά αρχικά τις δικές του σημειώσεις. Δεν θεωρούσε κατάλληλες τις σημειώσεις των άλλων.

¹⁵ E.T. Whittaker, "A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", Cambridge (Editions: 1904, 1917, 1927, 1937).

Cambridge ήταν πολύ πιο προχωρημένα από αυτά του Μπρίστολ. Δεν ήταν μόνο το επίπεδο υψηλότερο, αλλά μελετιούνταν και νέα αντικείμενα όπως η θερμοδυναμική και η στατιστική μηχανική του Gibbs.

Ο Dirac ήλπιζε ότι ο E. Cunnigham, που εργαζόταν στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, θα ήταν επιβλέπων στην έρευνά του. Τον γνώριζε από την εξέτασή του για την υποτροφία (Exhibition Studentship) το 1921 και πίστευε ότι θα μπορούσε να εργαστεί στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Για κάποιο λόγο ο Cunnigham δεν μπορούσε να τον δεχτεί και ανατέθηκε στον R.H. Fowler¹⁶. Ο Dirac συναντούσε τον Fowler μια φορά την εβδομάδα και συζητούσαν επιστημονικά προβλήματα. Ο Fowler εκείνη την περίοδο ενδιαφερόταν για την ατομική φυσική και τη στατιστική μηχανική και ανέθεσε αμέσως στον Dirac το πρόβλημα της διάσπασης σε μια βαθμίδα θερμοκρασίας, παρέχοντάς του την απαραίτητη βιβλιογραφία και προτείνοντας του τις διαλέξεις που θα έπρεπε να παρακολουθήσει.

Ο Dirac άκουσε για πρώτη φορά για το άτομο του Bohr στις διαλέξεις του Fowler για την κβαντική θεωρία. Μέσω του Fowler έμαθε επίσης στατιστική μηχανική, συμπεριλαμβανομένης της εξίσωσης Boltzmann. Η τελευταία δεν του άρεσε ιδιαίτερα, διότι η σπουδαιότερη έννοια στην οποία βασιζόταν, η συνθήκη κρούσεων, δεν “εξηγούταν επαρκώς”. Ο Dirac προτιμούσε την προσέγγιση του Gibbs. Σε κάθε περίπτωση, δημοσίευσε ένα άρθρο¹⁷ για τη στατιστική μηχανική στο “Proceedings of the Royal Society”¹⁸, σχετικά με τις συνθήκες στατιστικής ισορροπίας μεταξύ ατόμων, ηλεκτρονίων και ακτινοβολίας. Αφορμή για το άρθρο ήταν τα προβλήματα που συζητούνταν στις διαλέξεις του Fowler και του J.E. Jones (που αργότερα άλλαξε το όνομά του σε Lennard-Jones, μετά το γάμο του με την Kathleen Mary Lennard).

¹⁶ Ο Ralph Howard Fowler έγινε Fellow στο Trinity College το 1914. Μετά τον Α΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, κατά τη διάρκεια του οποίου εργάστηκε στη βαλλιστική, ανανέωσε τη συνεργασία του στο Trinity το 1919. Είχε διακριθεί για την ευελιξία και την ταχύτητα του πνεύματός του και εργάστηκε στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά, τη βαλλιστική, τη στατιστική μηχανική, τη φυσικοχημεία, την κβαντική θεωρία και την αστροφυσική. Το 1922 συνεργάστηκε με τον Charles Darwin σε προβλήματα κατανομής ενέργειας και ανέπτυξε μέθοδο, αποδεικνύοντας την ισχύ της εξίσωσης του M.N. Saha για τον ιονισμό σε υψηλές θερμοκρασίες. Για το δοκίμιό του στη στατιστική μηχανική ο Fowler βραβεύτηκε από το πανεπιστήμιο του Cambridge με το βραβείο Adams το 1923-24. Το υλικό του δοκιμίου αυτού εκδόθηκε αργότερα από τον Fowler με τον τίτλο “Statistical Mechanics” (Cambridge, 1929). Ο Fowler εξελέγη Fellow της Royal Society το 1925. Το 1926 δημοσίευσε την πιο πρωτότυπη συνεισφορά του, ένα άρθρο με τίτλο “On Dence Matter”. Στο άρθρο αυτό απέδειξε ότι η αέρια ύλη των νάνων αστέρων υπακούει τη στατιστική Fermi-Dirac. Ο Fowler υπηρέτησε ως λέκτορας μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Cambridge και τον Ιανουάριο του 1932 εξελέγη στη ιδρυθείσα τότε έδρα της θεωρητικής φυσικής. Το 1938 διαδέχθηκε τον Sir Lawrence Bragg ως διευθυντής του Εθνικού Εργαστηρίου Εφαρμοσμένης Φυσικής (National Physical Laboratory). Ο Fowler είχε γίνει στενός φίλος του Rutherford, την κόρη του οποίου παντρεύτηκε το 1921. Πέθανε στις 28 Ιουλίου 1944.

¹⁷ “The Conditions for Statistical Equilibrium between Atoms, Electrons and Radiation”, Proc. Roy. Soc. (London) A106, 581-596 (1924) (παρελήφθη 8 Ιουλίου 1924).

¹⁸ Το κύριο ερευνητικό περιοδικό της Royal Society, το οποίο εκδίδεται από το 1831. Στο περιοδικό έχουν δημοσιεύσει μεταξύ άλλων οι Paul Dirac, Werner Heisenberg, Ernest Rutherford, Erwin Schrödinger, William Lawrence Bragg, Lord Kelvin, J.J. Thomson, James Clerk Maxwell, Dorothy Hodgkin και Stephen Hawking (ΣτΜ).

Όπως όλοι οι θεωρητικοί φυσικοί στο Cambridge, για παράδειγμα ο Cunningham και ο Lennard-Jones, ο Fowler ανήκε στο τμήμα μαθηματικών, ενώ η πειραματική φυσική ανήκε στο τμήμα φυσικής ή πειραματικής φιλοσοφίας. Διοικητικά, υπήρχε μια στενή σχέση μεταξύ καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών και η θεωρητική φυσική εντασσόταν στα δεύτερα. Οι φοιτητές των μαθηματικών ή της θεωρητικής φυσικής παρέμεναν μαζί για μεγάλο διάστημα και εξειδικεύονταν πολύ αργότερα. Η θεωρία και το πείραμα στη φυσική ήταν μάλλον ξεχωριστά πεδία στο Cambridge. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι ο Fowler είχε στενές σχέσεις με τον Rutherford επηρέαζε τους φοιτητές τους και ο Dirac, για παράδειγμα, συμμετείχε σε σεμινάρια για πειραματικούς στο Cavendish. Υπήρχε επίσης μια λέσχη, το “ ∇^2V Club”, τα μέλη της οποίας ήταν πειραματικοί αλλά και θεωρητικοί.

Στο Cavendish οι θεωρητικοί και οι πειραματικοί συναντιούνταν τακτικά, προκειμένου να ακούσουν διακεκριμένους ομιλητές, όπως ο Niels Bohr¹⁹. Ο διαχωρισμός ειδικοτήτων εφαρμοζόταν ουσιαστικά στους προπτυχιακούς και ο Fowler ήταν αυτός που γεφύρωνε το κενό.

Η επίδραση του Fowler ήταν πολύ ισχυρή και αποτελούσε πραγματικά το κέντρο της κβαντικής θεωρίας στο Cambridge. Ήταν πολύ ενθουσιασμένος με αυτό και ο ενθουσιασμός του ήταν μεταδοτικός. Επισκεπτόταν συχνά το Ινστιτούτο του Bohr στην Κοπεγχάγη και έφερνε τα νέα από εκεί. Στην πειραματική πλευρά, κυρίαρχος στο Cavendish ήταν ο Rutherford, όπου διαδέχθηκε τον J.J. Thomson το 1919. Με τη βοήθεια λαμπρών φοιτητών και συνεργατών - όπως ο J. Chadwick, ο J. Cockroft, ο M. Oliphant - ο Rutherford έδωσε στο Cavendish μια νέα διάσταση και δημιούργησε μια σχολή πειραματικής φυσικής, η οποία για μεγάλο διάστημα προηγείτο της θεωρητικής φυσικής. Είναι αξιοσημείωτο, ότι ο Paul Dirac, που γνώριζε τόσο καλά τον Rutherford, δεν έκανε ποτέ έρευνα στη θεωρία των πυρηνικών φαινομένων.

Όταν ο Dirac έφτασε για πρώτη φορά στο Cambridge, ο J.J. Thomson ήταν ακόμη εκεί και τον συναντούσε περιστασιακά στο Cavendish²⁰. Πιο συχνά συναντούσε τον Sir Joseph Larmor, Λουκασιανό Καθηγητή Μαθηματικών στο Cambridge. Η έδρα²¹ αυτή ανήκε αρχικά στον Newton και ο Dirac θα την κληρονομούσε από τον Larmor εννέα χρόνια μετά την άφιξή του στο Cambridge. Ο Cunningham εισήγαγε τον Dirac στην κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία και ο

¹⁹ Ο Niels Bohr συνεργάστηκε με τον Rutherford στο Μάντσεστερ το 1912. Λόγω της φιλίας του με τον Rutherford, τον επισκεπτόταν συχνά στο Cambridge και επιπλέον έκανε διαλέξεις εκεί.

²⁰ Το 1919 ο Rutherford διαδέχτηκε τον J.J. Thomson (ο οποίος είχε αναλάβει το Trinity College το 1918) ως Καθηγητής Πειραματικής Φυσικής και διευθυντής του εργαστηρίου του Cavendish. Ο Thomson εργαζόταν ακόμη στο Cavendish όταν ο Dirac ήταν εκεί ως διδακτορικός φοιτητής, αλλά ο Dirac δεν θυμάται αν ο Thomson έκανε κάποιο σεμινάριο εκείνη την εποχή.

²¹ Η Λουκασιανή έδρα Μαθηματικών (Lucasian Chair of Mathematics) ιδρύθηκε το 1663 από το Henry Lucas, μέλος του πανεπιστημίου του Cambridge και καθιερώθηκε επίσημα το 1664 από το βασιλιά Κάρολο Β΄. Θεωρείται η πιο δοξασμένη έδρα στον κόσμο, τόσο λόγω του κύρους της όσο και λόγω αυτών που κατά καιρούς την κατείχαν, όπως οι Isaac Newton, George Stokes, Joseph Larmor, Paul Dirac και Stephen Hawking (ΣτΜ).

Lennard-Jones τον εξοικείωσε με τη στατιστική μηχανική ως προς τις λεπτομέρειές της. Ο E.A. Milne²², που εργαζόταν στη σχετικότητα και την αστροφυσική, έγινε ο επιβλέπων του Dirac για ένα εξάμηνο, όσο ο Fowler βρισκόταν στην Κοπεγχάγη.

Μέσω των νέων γνωριμιών και εμπειριών, ο επιστημονικός ορίζοντας του Dirac ενισχύθηκε ήδη από το πρώτο έτος του στο Cambridge.

Μεταξύ των επιφανών στο Cambridge εκείνη την εποχή ήταν ο Arthur Eddington, ο οποίος εισήγαγε τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein στην Αγγλία. Ο Eddington είχε διαδεχτεί τον Sir George Darwin²³ ως Καθηγητής Αστρονομίας και Πειραματικής Φιλοσοφίας το 1913. Το 1918 συνέταξε για την Physical Society μια αναφορά για τη σχετικιστική θεωρία βαρύτητας και προκειμένου να ελέγξει τις προβλέψεις της γενικής σχετικότητας του Einstein, ηγήθηκε το 1919 της επιτυχούς και διάσημης αποστολής για την έκλειψη Ηλίου, η οποία είχε τεράστιο αντίκτυπο στο κοινό. Ο Eddington ήταν διάσημος για τις έρευνές του σχετικά με την εσωτερική δομή, κίνηση και εξέλιξη των άστρων. Ο Dirac είχε διαβάσει το βιβλίο του “Space, Time and Gravitation” στο Μπρίστολ και το νέο του βιβλίο “Mathematical Theory of Relativity” έκανε την εμφάνισή του, όταν ο Dirac ήρθε στο Cambridge το 1923. Ο Eddington επηρέασε τον Dirac και αργότερα επηρεάστηκε από αυτόν, όταν η κυματική εξίσωση του ηλεκτρονίου έδειξε ότι η σχετικότητα μπορούσε να συμπεριληφθεί στη νέα κβαντομηχανική. Όπως ο Einstein, ο Eddington αναζητούσε μια ενοποιημένη θεωρία που θα μπορούσε να εξηγήσει τη σταθερά λεπτής υφής και την αναλογία μάζας ηλεκτρονίου-πρωτονίου. Προσπάθησε να συσχετίσει κοσμολογικές ποσότητες, όπως η ακτίνα του σύμπαντος, με κβαντικές έννοιες.

Ο Dirac διατήρησε το ενδιαφέρον του για τη γεωμετρία στο Cambridge και τον πρώτο καιρό παρακολούθησε το μάθημα του Max Newman για τις γεωμετρικές πτυχές της γενικής σχετικότητας. Παρακολουθούσε συχνά τις Σαββατιάτικες συναντήσεις (tea parties) του Henry Baker, Καθηγητή Αστρονομίας και Γεωμετρίας στο Cambridge, για τους λάτρεις της γεωμετρίας και συνεισέφερε στις συζητήσεις²⁴. Είχε γίνει πολύ δημοφιλές εκείνη την εποχή, να δουλεύει κανείς στις τέσσερις διαστάσεις και η προβολική γεωμετρία ήταν προτιμητέα έναντι της μετρικής γεωμετρίας²⁵. Ο Dirac κράτησε επαφή με τα μαθηματικά, μόνο στο βαθμό που τα χρειαζόταν για την έρευνά του.

²² Edward Arthur Milne (1896 – 1950): Βρετανός αστροφυσικός και μαθηματικός (ΣτΜ).

²³ Sir George Darwin (1845 – 1912): Βρετανός γεωλόγος και αστρονόμος, γιος του Κάρολου Δαρβίνου (ΣτΜ).

²⁴ Ο Dirac μου είπε (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969) ότι γοητεύτηκε από την προβολική γεωμετρία με το που την γνώρισε. Είχε επεξεργαστεί μια νέα μέθοδο προβολικής γεωμετρίας και την παρουσίασε σε μια από αυτές τις συναντήσεις, παρόλο που δεν τη δημοσίευσε ποτέ.

²⁵ Ο Dirac έβρισκε τις μεθόδους της τετραδιάστατης και της προβολικής γεωμετρίας πολύ χρήσιμες για την κατανόηση σχέσεων όπως αυτές στο χώρο του Minkowski και ανέπτυξε κάποιες δικές του μεθόδους, αλλά δεν τις δημοσίευσε ποτέ.

Η φύση και οι συνήθειες του Dirac δεν άλλαξαν ιδιαίτερα στο Cambridge και το πρόγραμμά του παρέμεινε απλό. Κατά τη διάρκεια της εβδομάδας παρακολουθούσε τέσσερις ή πέντε διαλέξεις²⁶. Συζητούσε τα επιστημονικά προβλήματά του, τουλάχιστον στην πρώιμη περίοδο, μόνο με τον επιβλέποντά του. Μόνο σπανίως θα συναντούσε άλλους φοιτητές, με εξαίρεση το βραδινό δείπνο. Το πρωί και το βράδυ ήταν αφιερωμένα στη μελέτη, με σύντομους περιπάτους το απόγευμα. Περιστασιακά τον καλούσαν για τσάι. Διάβαζε ελάχιστη λογοτεχνία και δεν πήγαινε ποτέ στο θέατρο²⁷. Προτιμούσε την μοναξιά για εργασία και αναστοχασμό, κάνοντας συχνά μακρείς περιπάτους. Κάθε Κυριακή έκανε ένα ολόήμερο περίπατο, παίρνοντας μαζί του το γεύμα²⁸. Ηθελημένα, δεν σκεφτόταν την έρευνά του κατά τη διάρκεια των περιπάτων, παρόλο που κάποιες φορές ίσως να έκανε κάποια αναθεώρησή της. Συχνά συλλάμβανε νέες ιδέες, και ήταν κατά τη διάρκεια ενός τέτοιου Κυριακάτικου περιπάτου, που σκέφτηκε ότι οι μεταθέτες ίσως αντιστοιχούσαν στις αγκύλες Poisson της κλασικής φυσικής²⁹.

²⁶ Ο Dirac μου είπε (Τεργέστη, Ιούνιος 1968) ότι δεν απέκτησε ποτέ τη συνήθεια να ακολουθεί κατά γράμμα, αυτά που άκουγε στις διαλέξεις. Προσπαθούσε να αντιληφθεί την κύρια ιδέα και στη συνέχεια να συμπληρώνει τα κενά με προσωπική μελέτη (ΑΗQP).

²⁷ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

²⁸ Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968).

²⁹ Διάλεξη του Dirac στο “Από μια ζωή Φυσικής”.

III. Σύντομη μαθητεία στην έρευνα

Οι πρώτες δημοσιεύσεις του Dirac, ως διδακτορικός φοιτητής, ήταν στη θερμοδυναμική και τη στατιστική μηχανική, τη σχετικότητα και την παλιά κβαντική θεωρία. Τα θέματα που επέλεγε αντικατόπτριζαν σε κάποιο βαθμό τις επιρροές των Fowler και Milne. Ο Fowler είχε αποκτήσει ενδιαφέρον για τη στατιστική μηχανική και το 1922, με τον Charles Darwin³⁰, είχε ξεκινήσει έρευνα για την κατανομή ενέργειας. Ο Dirac υπήρξε φοιτητής του μόνο για έξι περίπου μήνες, όταν, στις 3 Μαρτίου 1924, το άρθρο του “Dissociation under a Temperature Gradient” εστάλη από τον Fowler στο “Proceedings of the Cambridge Philosophical Society”³¹. Το πρόβλημα που μελέτησε ο Dirac ήταν η χωρική μεταβολή της ισορροπίας διάστασης παρουσία βαθμίδας θερμοκρασίας, ενός αερίου αποτελούμενου από μόρια (π.χ. υδρογόνο) τα οποία μπορούν να διαχωριστούν σε δύο παρόμοια μόρια (ατομικό υδρογόνο). Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις ισορροπίας, ο Dirac υπολόγισε μια μετρήσιμη μεταβολή στις συγκεντρώσεις, όταν η βαθμίδα θερμοκρασίας εφαρμόζεται στα άκρα ενός σωλήνα που περιέχει τα αντιδρώντα σώματα. Ένα άλλο άρθρο του Dirac στη στατιστική ισορροπία, το αντικείμενο του οποίου προέκυψε από τις διαλέξεις του Fowler και του Lennard-Jones, κοινοποιήθηκε από τον Rutherford στο “Proceedings of the Royal Society”³². Μελετούσε τη λεπτομερή ισορροπία μεταξύ ατόμων, ηλεκτρονίων και ακτινοβολίας και παρουσίαζε μια εφαρμογή στην αστροφυσική³³. Κάνοντας την κύρια φυσική παραδοχή ότι όλες οι ατομικές διαδικασίες είναι αντιστρεπτές, ο Dirac χρησιμοποίησε τις μεθόδους της στατιστικής μηχανικής και της σχετικιστικής κινηματικής, προκειμένου να δώσει τη γενική περιγραφή ενός προβλήματος, το οποίο είχαν μελετήσει οι Einstein και Ehrenfest ένα χρόνο νωρίτερα³⁴. Κατέληξε στο ότι η εξάρτηση της σταθεράς αντίδρασης από τη θερμοκρασία ακολουθεί επίσης το νόμο ισόχωρης του Van't Hoff σε σχετικιστικά συστήματα. Τέλος, μέσω των εξισώσεών του, ο Dirac υπολόγισε τον ιονισμό ενός

³⁰ Charles Darwin (1887-1962): Άγγλος φυσικός, γιος του μαθηματικού George Darwin και εγγονός του Δαρβίνου. Το 1928 υπολόγισε πρώτος τη λεπτή υφή του ατόμου του υδρογόνου χρησιμοποιώντας τη σχετικιστική θεωρία του Dirac για το ηλεκτρόνιο (ΣτΜ).

³¹ Περιοδικό που εκδίδεται από το Cambridge University Press. Δημοσιεύει άρθρα στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά. Το περιοδικό εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1843 και μέχρι το 1975 ονομαζόταν “Proceedings of the Cambridge Philosophical Society”. Πλέον ονομάζεται “Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society” (ΣτΜ).

³² Ο Fowler εξελέγη Fellow στη Royal Society μόλις το 1925 και στη συνέχεια κοινοποιούσε τα άρθρα του Dirac ο ίδιος.

³³ Εκείνη την εποχή το ενδιαφέρον του Fowler ήταν στραμμένο τόσο στην κβαντική θεωρία όσο και στην αστροφυσική. Το πρώιμο έργο του Dirac προέκυψε όχι μόνο από τα δικά του ενδιαφέροντα, αλλά και από αυτά του Fowler.

³⁴ Ο Pauli (Z. Phys. 18, 272 (1923)) και οι Einstein και Ehrenfest (Z. Phys. 19, 301 (1923)) είχαν μελετήσει προβλήματα παρόμοια με του Dirac, ο οποίος έκανε ρητή αναφορά σε αυτούς. Όπως είχαν πράξει και οι πρώτοι, ο Dirac συμπεριέλαβε στην αντιμετώπισή του τη διεγερμένη εκπομπή, προκειμένου να παράγει το νόμο ακτινοβολίας του Planck.

μονοατομικού αερίου σε στατιστική ισορροπία, παράγοντας τόσο την εξίσωση του Saha, όσο και τη γενίκευσή της από τον Fowler.

Ο Dirac έγραψε δύο άρθρα, όσο εργαζόταν με τον Milne κατά τη διάρκεια της επίσκεψης του Fowler στην Κοπεγχάγη για ένα εξάμηνο. Στο πρώτο³⁵ από αυτά, το οποίο κοινοποιήθηκε από τον Eddington στο "Philosophical Magazine"³⁶, ο Dirac αντιμετώπιζε ένα πρόβλημα, το οποίο είχε λυθεί μερικώς από τον Eddington στο βιβλίο του "Mathematical Theory of Relativity", δηλαδή την ταύτιση της "κινηματικής" και "δυναμικής" ταχύτητας ενός σωματιδίου με αυθαίρετο σχήμα³⁷. Αν η κινηματική ταχύτητα του σωματιδίου μηδενιστεί, δηλαδή όλες οι χωρικές συντεταγμένες είναι χρονικά σταθερές, τότε όλες οι συνιστώσες του τελεστή ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$ είναι συνεχείς στην επιφάνεια του σωλήνα που καταλαμβάνει το σωματίδιο. Εφόσον μηδενίζονται εντός του σωματιδίου, η δυναμική ταχύτητα είναι επίσης μηδενική.

Στο δεύτερο άρθρο³⁸, το οποίο κοινοποίησε ο Milne στο "Monthly Notices of the Royal Astronomical Society"³⁹ το Μάιο του 1925, ο Dirac επεξεργάστηκε τη σκέδαση Compton από ελεύθερα κινούμενα ηλεκτρόνια σε αστρικές ατμόσφαιρες. Ο Compton είχε προσπαθήσει να εξηγήσει την παρατηρούμενη μετατόπιση των γραμμών απορρόφησης προς το ερυθρό άκρο

³⁵ "Note on the Relativity Dynamics of a Particle", Phil. Mag. 47, 1158-1159 (1924) (παρελήφθη Απρίλιο 1924).

³⁶ Το "Philosophical Magazine" είναι ένα από τα παλαιότερα επιστημονικά περιοδικά στην αγγλική γλώσσα. Ιδρύθηκε το 1798 και το όνομά του έλκει την προέλευσή του από μια περίοδο, όπου ο όρος "φυσική φιλοσοφία" (natural philosophy) συμπεριλάμβανε όλες τις πτυχές της επιστήμης. Στο περιοδικό μεταξύ άλλων έχουν δημοσιεύσει άρθρα οι Humphry Davy, Michael Faraday και James Prescott Joule. Τη δεκαετία του 1860 ο James Clerk Maxwell δημοσίευσε αρκετά μακροσκελή άρθρα, με αποκορύφωμα το άρθρο στο οποίο συμπέρανε ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Το διάσημο άρθρο των Albert A. Michelson and Edward Morley δημοσιεύτηκε το 1887 και δέκα χρόνια αργότερα ο J. J. Thomson δημοσίευσε στο περιοδικό το άρθρο "Cathode Rays" που συνιστούσε ουσιαστικά την ανακάλυψη του ηλεκτρονίου. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ο Rutherford δημοσίευε τακτικά στο περιοδικό και πέρα από τις εργασίες του για την κατανόηση της ραδιενέργειας, πρότεινε τα πειράματα των Geiger και Marsden που επιβεβαίωσαν το πυρηνικό μοντέλο του ατόμου. Το 1913 ο Niels Bohr δημοσιεύει στο περιοδικό το περίφημο άρθρο του για την πλανητική κίνηση των ηλεκτρονίων. Μια ακόμη κλασική συνεισφορά του Rutherford το 1919 είχε τίτλο "Collision of α Particles with Light Atoms. IV. An Anomalous Effect in Nitrogen" - άρθρο που περιέγραφε την ανακάλυψη του πρωτονίου (ΣτΜ).

³⁷ A.S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity. Με τον όρο "κινηματική" ταχύτητα εννοείται η χρονική παράγωγος του στοιχείου κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου, ενώ η "δυναμική" ταχύτητα προέρχεται από την ορμή του και τη διατήρησή της. Ο Eddington έδειξε την ταύτιση των κατευθύνσεων των δύο ταχυτήτων για ένα σωματίδιο που διαθέτει τρία κάθετα επίπεδα συμμετρίας.

³⁸ "The Effect of Compton Scattering by Free Electrons in a Stellar Atmosphere", Monthly Notices Roy. Astron. Soc. (London) 85, 825-832 (1925) (υπεβλήθη το Μάιο του 1925).

³⁹ Το "Monthly Notices of the Royal Astronomical Society" (MNRAS) είναι ένα επιστημονικό περιοδικό για την αστρονομία, την αστροφυσική και τα συναφή αντικείμενα. Δημοσιεύει πρωτότυπη έρευνα και υπερέρχει σε ετήσιο αριθμό δημοσιεύσεων έναντι οποιουδήποτε άλλου περιοδικού αστρονομίας. Λειτουργεί ως συνεταιρισμός μεταξύ της Royal Astronomical Society (RAS), η οποία επιλέγει και κρίνει το περιεχόμενο και της Oxford University Press (OUP), η οποία δημοσιεύει και εμπορεύεται το περιοδικό. Από το 2024 το περιοδικό λειτουργεί διαδικτυακά με ανοικτή πρόσβαση για τους αναγνώστες (ΣτΜ).

του φάσματος κοντά στο όριο του ήλιου⁴⁰. Ο Dirac υπολόγισε αναλυτικά το φαινόμενο Doppler λόγω της θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων και τη μείωση του μέσου μήκους κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας, που οφείλεται στο γεγονός ότι η προσπίπτουσα ακτινοβολία είναι εντονότερη σε σχέση με τα κινούμενα προς αυτήν ηλεκτρόνια. Συμπέρανε ότι οι παρατηρήσεις δεν μπορούσαν να εξηγηθούν με αυτό τον τρόπο⁴¹.

Σε τρία άρθρα, δημοσιευμένα στο “Proceedings of the Royal Society” και στην “Cambridge Philosophical Society”, ο Dirac ασχολήθηκε με τα προβλήματα της παλιάς κβαντικής θεωρίας, η οποία σύντομα θα αντικαθίστατο από τη νέα μηχανική. Ξεκινώντας την έρευνά του με τον Fowler, ο Dirac είχε μελετήσει τις ατομικές και κβαντικές θεωρίες από το βιβλίο “Atombau und Spektrallinien”⁴² του Sommerfeld και διάβασε τα περισσότερα από τα άρθρα για την κβαντική θεωρία⁴³ από τα περιοδικά, τα κυριότερα των οποίων εκείνη την εποχή⁴⁴ ήταν το “Proceedings of the Royal Society”, το “Annalen der Physik”⁴⁵ και το “Zeitschrift für Physik”⁴⁶. Η κβαντική

⁴⁰ A.H. Compton, Phil. Mag. **46**, 908 (1923). Η μετατόπιση των γραμμών Fraunhofer είναι, φυσικά, απλώς φαινόμενα, διότι το συνεχές φάσμα εκπομπής μετατοπίζεται συνολικά.

⁴¹ Αργότερα ο S. Chandrasekhar (Proc. Roy. Soc. (London), **A92**, 508 (1947-48)) μελέτησε το πρόβλημα της πολλαπλής σκέδασης Compton σε αστρικές ατμόσφαιρες και παρήγαγε αξιοσημείωτες μετατοπίσεις.

⁴² Η πρώτη έκδοση στα Γερμανικά του βιβλίου του Sommerfeld είχε δημοσιευτεί το 1919 και η μετάφραση στα Αγγλικά εμφανίστηκε το 1923. Υπήρχαν επίσης τα γραπτά του Bohr, συμπεριλαμβανομένων των άρθρων του για την κβαντική θεωρία των φασματικών γραμμών (“The Quantum Theory of Line Spectra”, Kgl. Dansk. Vid. Selsk., Nat. og Math. Aft. **8**, 4.1 (1918)) και σημειώσεις για την ατομική δομή (“Atomic Structure”, Nature, **107**, 104-107 και **108**, 208-209 (1921)). Ο Dirac βασίστηκε περισσότερο στο βιβλίο του Sommerfeld, διαβάζοντας τη γερμανική έκδοση. Είχε μάθει κάποια Γερμανικά στο σχολείο και με τη βοήθεια ενός λεξικού είχε αποκτήσει αρκετή ευχέρεια. Το βιβλίο του Max Born “Atom Mechanik” για την παλιά κβαντική θεωρία εμφανίστηκε επίσης εκείνη την εποχή περίπου (Berlin, 1924), αλλά ο Dirac δεν το μελέτησε.

⁴³ Για τις μελέτες του ο Dirac ανέτρεχε στα πρώιμα πρωτότυπα άρθρα για την κβαντική θεωρία.

⁴⁴ Το “Physical Review” δεν είχε ακόμη επιτύχει τη σπουδαιότητα που απέκτησε μετά το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο.

⁴⁵ Το περιοδικό “Annalen der Physik” είναι ένα από τα παλαιότερα επιστημονικά περιοδικά για τη φυσική - εκδίδεται από το 1799. Αρχικά εκδιδόταν στα Γερμανικά, την τότε ηγετική επιστημονική γλώσσα. Μεταξύ 1950 και 1980 δημοσίευε άρθρα στα Γερμανικά και τα Αγγλικά, αλλά από το 1970 οι γερμανόφωνοι συγγραφείς έγραφαν όλο και περισσότερο στα Αγγλικά, προκειμένου να έχουν απήχηση σε διεθνές επίπεδο. Μετά την ενοποίηση της Γερμανίας τα Αγγλικά έγιναν η μόνη γλώσσα του περιοδικού. Η σπουδαιότητα του περιοδικού έφτασε στην ακμή της το 1905 με τα περίφημα άρθρα του Einstein. Με το κύμα μετανάστευσης του 1933 τα γερμανόφωνα περιοδικά έχασαν πολλούς από τους καλύτερους συγγραφείς τους. Κατά την περίοδο του ναζισμού, θεωρείτο ότι αντιπροσώπευε τα πλέον συντηρητικά στοιχεία της γερμανικής κοινότητας των φυσικών μαζί με το “Physikalische Zeitschrift” (ΣτΜ).

⁴⁶ Το περιοδικό “Zeitschrift für Physik” άρχισε να κυκλοφορεί το 1920 από τον εκδοτικό οίκο Springer Berlin Heidelberg. Από το 1845 η Γερμανική Ακαδημία Φυσικής εξέδιδε τα “Fortschritte der Physik” και “Verhandlungen”, με το δεύτερο να γίνεται γνωστό το 1899 ως “Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft”. Εκεί δημοσίευσε ο Planck το περίφημο άρθρο του το 1900. Για τις επόμενες δύο δεκαετίες επιφανείς φυσικοί όπως οι Planck, Einstein, Franck, Hertz, von Laue, Born δημοσίευαν τις ρηξικέλευθες εργασίες τους στην κβαντική θεωρία και τη σχετικότητα. Το περιοδικό άρχισε να γίνεται πολύ ογκώδες, ως μέσο που αρχικά είχε στόχο να συγκεντρώνει τις σημειώσεις των μελών της Ακαδημίας, οπότε το 1919 μια επιτροπή αποτελούμενη από τους Einstein, Goldstein, Haber, Jahnke, Scheel και Westphal πρότεινε την αλλαγή στόχων. Συμφώνησαν ότι το “Verhandlungen” θα επικεντρωνόταν σε αναφορές των μελών της Ακαδημίας και ένα νέο περιοδικό θα δημοσίευε πρωτότυπες ερευνητικές εργασίες. Έτσι γεννήθηκε το “Zeitschrift für Physik” που έγινε το σπίτι της νέας ατομικής φυσικής των Bohr, Sommerfeld και Born και επιπρόσθετα έγινε το πρώτο γερμανικό περιοδικό διεθνούς φυσικής.

θεωρία, γύρω στο 1924, ήταν σε κατάσταση ρευστότητας και επικείμενων αλλαγών. Υπήρχε η μερικός επιτυχής μέθοδος κβάντωσης των Bohr-Sommerfeld, η οποία είχε προκύψει από μια γενίκευση των πρωτότυπων ιδεών του Bohr και επέτρεπε ως ένα βαθμό τη μελέτη συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Στο έργο του Sommerfeld η θεωρία Hamilton-Jacobi έπαιζε σημαντικό ρόλο, την οποία ο Dirac μελέτησε από το “Analytical Dynamics” του Whittaker. Οι σημαντικές θεωρητικές κατευθυντήριες αρχές της εποχής ήταν η Αδιαβατική Αρχή του Ehrenfest και η Αρχή Αντιστοιχίας του Bohr, για την οποία πολλοί πίστευαν ότι θα παρείχε ένα στοιχείο για τη νέα θεωρία⁴⁷.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1920 ο Louis de Broglie δημοσίευσε τα πρώτα άρθρα του στο “Comptes Rendus de l'Académie des Sciences”⁴⁸ του Παρισιού. Στα τέλη του 1923, ο Fowler πείστηκε να κοινοποιήσει μια αναφορά, η οποία συνόψιζε την εργασία του de Broglie, στο “Philosophical Magazine”⁴⁹. Η εργασία του de Broglie σχετιζόταν με τις τροχιές Bohr, τη στατιστική μηχανική και τα φωτεινά κβάντα, τα οποία αντιμετώπιζε ως σωματίδια με πολύ μικρή μάζα και το κύριο αποτέλεσμά του ήταν η πρόβλεψη κυματικών ιδιοτήτων για όλα τα υλικά σωματίδια⁵⁰. Ο Dirac είχε πιθανότατα μελετήσει τα άρθρα του de Broglie, αλλά δεν έκανε αναφορά σε αυτά⁵¹.

Αξιοσημείωτες δημοσιεύσεις έγιναν από τους Bohr, Rutherford, αλλά και από σοβιετικούς φυσικούς όπως ο Frenkel, ο Landau και ο Friedmann. Στις αρχές της δεκαετίας του 1920, καθώς άρχισε να διαμορφώνεται η κβαντική θεωρία, στο περιοδικό δημοσιεύουν οι Stern, Gerlach, Bothe, Geiger, Born. Στα μέσα της δεκαετίας μια νέα γενιά θεωρητικών φυσικών εμφανίζεται στο προσκήνιο: οι Heisenberg, Jordan, Pauli, Wigner θα διαμορφώσουν με τα άρθρα τους τη μητρομηχανική, τη θεωρία μετασχηματισμών και τις πρώτες ιδέες της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Παρά το ότι η χρυσή εποχή του περιοδικού είναι στενά συνδεδεμένη με τα πρώτα ένδοξα χρόνια της κβαντικής φυσικής, το περιοδικό συνέχισε να είναι ανοικτό σε όλους τους τομείς έρευνας μέχρι το 1997, οπότε και συγχωνεύθηκε με άλλα ευρωπαϊκά περιοδικά στο “European Physical Journal” (ΣΤΜ).

⁴⁷ Niels Bohr, “On the Quantum Theory of Line Spectra”, Kgl. Dansk. Vid. Selsk., Nat. og Math. Aft. 8, 4.1 (1918). Ο Dirac πίστευε ότι η Αρχή της Αντιστοιχίας δεν ήταν πολύ ακριβής. Ιδιαίτερα εφόσον δεν μπορούσε να διατυπωθεί με συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις, “φαινόταν πάντα λίγο ασαφής”. Υποστήριζε ότι η αντιστοιχία μεταξύ κλασικής και κβαντικής θεωρίας θα υπήρχε στο όριο που η σταθερά του Planck θα έτεινε στο μηδέν. Οι άνθρωποι στην Κοπεγχάγη, και ο Fowler επίσης, πίστευαν ότι η εν λόγω αρχή θα λειτουργούσε καθοδηγητικά για την ατομική θεωρία. Ο Dirac προτιμούσε την Αδιαβατική Αρχή, καθώς μπορούσε να διατυπωθεί “μέσω μιας εξίσωσης”.

⁴⁸ Το περιοδικό “Comptes Rendus de l'Académie des Sciences” της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών δημιουργήθηκε το 1835 από τον φυσικό François Arago. Το περιοδικό είναι χωρισμένο σε επτά σειρές, οι οποίες καλύπτουν όλο το φάσμα έρευνας στις ακριβείς και εφαρμοσμένες επιστήμες: Μαθηματικά, Μηχανική, Χημεία, Βιολογία, Γεωεπιστήμη, Φυσική και Εξελικτική Παλαιοντολογία (ΣΤΜ).

⁴⁹ L. de Broglie, “A Tentative Theory of Light Quanta”, Phil. Mag. 47, 446-458 (1924). Πιθανά ο C.D. Ellis, ο οποίος βρισκόταν στο εργαστήριο του Maurice de Broglie, αδερφού του Louis, στο Παρίσι, ήταν υπεύθυνος για τη δημοσίευση αυτή. Στη Γερμανία, η εργασία του de Broglie έγινε γνωστή μέσω του Einstein, ο οποίος την πρόσεξε κατόπιν σύστασης του P. Langevin και την ανέφερε στη δική του εργασία του 1925 για την κβαντική θεωρία των ιδανικών αερίων.

⁵⁰ Μια τροχιά Bohr μπορούσε να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι έπρεπε να χωρά σε αυτή ένας ακέραιος αριθμός μηκών κύματος de Broglie.

⁵¹ Στο άρθρο του “Conditions of Statistical Equilibrium...” στο τέλος της παραγράφου 5, σελ. 594, ο Dirac δήλωνε: “Για τη συζήτηση των προβλημάτων ισορροπίας, τα κβάντα ακτινοβολίας δεν μπορούν να θεωρηθούν ως πολύ

Στο πρώτο άρθρο του για την παλιά κβαντική θεωρία ο Dirac προσπάθησε να συσχετίσει την αρχή του Doppler με τη συνθήκη συχνότητας του Bohr. Ο Schrödinger, με τη βοήθεια της υπόθεσης Einstein για τα φωτεινά κβάντα και θεωρώντας ότι η συνθήκη Bohr ισχύει για όλα τα συστήματα αναφοράς, είχε καταλήξει σε μια “γενικευμένη” αρχή Doppler, μέσω της οποίας μπορούσε να εκφράσει τη συχνότητα στο νέο σύστημα αναφοράς⁵². Ξεκινώντας από το αποτέλεσμα του Schrödinger, ο Dirac απλοποίησε την έκφρασή του στη μορφή ενός συνήθους όρου Doppler και πρόσφερε μια νέα απόδειξη στη βάση μιας σχετικιστικής γενίκευσης της συχνότητας σε ένα διάνυσμα συχνότητας, που είναι ανάλογο με την παράγωγο μιας γωνίας φάσης ϕ συναρτήσει της χωροχρονικής συντεταγμένης⁵³. Η εργασία αυτή είναι αντιπροσωπευτική των πρώιμων άρθρων του Dirac και απηχεί τον τρόπο με τον οποίο έβρισκε τα αντικείμενα της έρευνάς του. Κατά τη διάρκεια της μελέτης του, ανακάλυπτε τη δυνατότητα βελτίωσης συγκεκριμένων αποτελεσμάτων. Έπαιρνε συχνά ένα πολυσυζητημένο πρόβλημα από την τρέχουσα βιβλιογραφία και ασκώντας του κριτική και επεκτείνοντας τη μελέτη του, το έθετε σε μια πιο στέρεη βάση σε σχέση με πριν. Αυτός ήταν ο μόνος τρόπος προσέγγισης των προβλημάτων φυσικής που γνώριζε εκείνη την εποχή και είναι αξιοσημείωτο το πόσο γρήγορα ολοκληρώθηκε η εκπαίδευσή του⁵⁴. Στις ύστερες δημοσιεύσεις του πρόσθεσε το χαρακτηριστικό των μακροσκελών εισαγωγικών παραγράφων, στις οποίες ανέφερε τι είχε επιτευχθεί νωρίτερα είτε από άλλους είτε από τον ίδιο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και δεν κουραζόταν ποτέ να βελτιώνει τη λογική σειρά των παρουσιάσεων. Αυτό γινόταν τόσο για να βοηθηθεί ο αναγνώστης, όσο και για να ικανοποιηθούν οι λογικές και αισθητικές ανάγκες του Dirac.

Στο σημείωμά του για την “Αδιαβατική αμεταβλητότητα των κβαντικών ολοκληρωμάτων”⁵⁵, το πρώτο από δύο άρθρα για την αδιαβατική αρχή, ο Dirac προχώρησε στη βάση των αποτελεσμάτων του J.M. Burgers, ενός φοιτητή του Ehrenfest, που είχε αποδείξει ότι η σταθερότητα των κβαντικών ολοκληρωμάτων σε αδιαβατικές μεταβολές θα μπορούσε να συναχθεί μέσω κλασικών νόμων⁵⁶. Η μόνη συνθήκη ήταν ότι δεν θα έπρεπε να υπάρχει καμία γραμμική σχέση μεταξύ των συχνοτήτων του συστήματος και των ακέραιων ολοκληρωμάτων. Ο Dirac επέκτεινε τις εξισώσεις του Burger για την αδιαβατική κίνηση σε γενικές αδιαβατικές,

μικρά σωματίδια ύλης κινούμενα με ταχύτητα πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός”. Πολύ σπάνια μάλιστα μιλούσε κανείς για το ότι τα φωτεινά κβάντα διαθέτουν πολύ μικρή μάζα. Ο Einstein είχε αναφέρει την ιδέα, αλλά αυτή εμφανίστηκε στα άρθρα του de Broglie.

⁵² Erwin Schrödinger, *Phys. ZS* 23, 301 (1922)

⁵³ Η διαδικασία αυτή εμφανίζει κάποιες ομοιότητες με τις ιδέες του de Broglie. Ο Dirac δεν είχε δει ακόμα το άρθρο του de Broglie στο “*Philosophical Magazine*”, αφού εμφανίστηκε λίγο αργότερα.

⁵⁴ Μόνο για το πρώτο άρθρο του, το αντικείμενο του οποίου είχε προταθεί από τον Fowler, ο Dirac δεν είχε μελετήσει προκαταβολικά. Αργότερα, επέλεγε μόνος του τα αντικείμενα της έρευνάς του.

⁵⁵ “The Adiabatic Invariants of the Quantum Integrals”, *Proc. Roy. Soc. (London)* A107, 725-734 (1925).

⁵⁶ J.M. Burgers, *Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam)* 20, 613 (1918). Ο όρος “κβαντομηχανική” είχε ήδη εμφανιστεί στη διατριβή του Burger. Ο Max Born αργότερα ισχυρίστηκε ότι ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τον όρο στο άρθρο του, *Z. Phys.* 26, 379-395 (1924).

δηλαδή απείρως αργές και κανονικές, μεταβολές. Στη συνέχεια κατέληξε στη γενική συνθήκη αδιαβατικής σταθερότητας. Ο Dirac παρήγαγε μια πολύ απλή συνθήκη, συνεπή με τους κανόνες επιλογής, υπό την οποία τα σχετικά κβαντικά ολοκληρώματα ήταν αδιαβατικά αναλλοίωτα: ο λόγος των συχνοτήτων έπρεπε να είναι διαφορετικός από το λόγο των παραγώγων των ίδιων συχνοτήτων συναρτήσει της αδιαβατικής παραμέτρου. Το άρθρο του για τα αδιαβατικά αναλλοίωτα έδειξε τη μεγάλη του πρόοδο κατά το πρώτο έτος του στο Cambridge. Είχε μάθει πώς να χειρίζεται μάλλον πολύπλοκα περιοδικά συστήματα με τα κομψά εργαλεία της θεωρίας Hamilton-Jacobi⁵⁷. Σε μια δεύτερη περίπτωση μελέτησε την επίδραση ενός αδιαβατικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου σε ένα ατομικό σύστημα⁵⁸. Το μαγνητικό πεδίο ασκεί δυνάμεις στο ηλεκτρόνιο, που εξαρτώνται από την ταχύτητά του και η αλλαγή στη Χαμιλτονιανή συναρτήσει της ελεύθερης Χαμιλτονιανής δίνεται από τη σχέση

$$H = H_0 + \frac{e}{2mc} |\vec{H}| p_\phi \quad (1)$$

όπου p_ϕ η συνιστώσα της τροχιακής στροφορμής του συστήματος στην κατεύθυνση του πεδίου H . Εφόσον ο δεύτερος όρος είναι μια σταθερά της κίνησης, τα κβαντικά ολοκληρώματα εξακολουθούν να δίνονται από τις ίδιες συναρτήσεις μεταβλητών θέσης και ορμής. Παρόλα αυτά η μεταβλητή ορμής γίνεται

$$\vec{p} = m\dot{\vec{q}} - \frac{e}{c} \vec{A}, \quad [\vec{H} = \text{curl} \vec{A}] \quad (2)$$

Αν το πεδίο $\vec{H}$ μεταβάλλεται αδιαβατικά, θα προστίθετο στη Χαμιλτονιανή H μόνο ένας μικρός όρος, που θα προέκυπτε από το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Παρόλα αυτά, ο Dirac έδειξε επίσης το αδιαβατικό αναλλοίωτο υπό την επίδραση ενός ταχύτατα μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς άξονα διερχόμενο από τον πυρήνα ενός ατόμου.

Τα άρθρα αυτά του Dirac, πριν την έλευση της κβαντομηχανικής, δείχνουν την απέλπιδα προσπάθειά του να παράγει τη νέα κβαντική θεωρία από την αδιαβατική υπόθεση. Προσπάθησε επίσης να εισαγάγει μεταβλητές δράσης-γωνίας σε συστήματα, τα οποία δεν είναι πολλαπλώς περιοδικά, όπως το άτομο του ηλίου. “Μου φαινόταν τότε ότι αυτός ήταν ο μόνος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε κανείς να αναπτύξει την κβαντική θεωρία”⁵⁹. Ακόμη και όταν, ακολουθώντας την εργασία του Heisenberg, άρχισε να συνεισφέρει στη νέα θεωρία,

⁵⁷ Ιδιαίτερα αξιοσημείωτος ήταν ο τρόπος που αντιμετώπισε το πρόβλημα των πολλών βαθμών ελευθερίας μέσω των κανόνων επιλογής, δίνοντας την ελπίδα ότι θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σχετικά πολύπλοκα προβλήματα με τη βοήθεια της αδιαβατικής αρχής.

⁵⁸ “The Adiabatic Hypothesis for Magnetic Fields”, Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 69-72 (1925) (παρελήφθη 19 Δεκεμβρίου 1924).

⁵⁹ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969). Επίσης στο AQHP.

κάποιες από τις παλιές του έννοιες δεν είχαν χάσει τη γοητεία τους γι αυτόν. Λόγω της μεγάλης επίδρασης του Fowler, τα προβλήματα της κβαντικής θεωρίας είχαν γίνει το επίκεντρο του ενδιαφέροντος του Dirac από πολύ νωρίς. Τα ερωτήματα που έθετε η κβαντική θεωρία θεωρούνταν σημαντικά από τον Fowler, τον Rutherford και το στενό κύκλο των φοιτητών τους⁶⁰. Τα προβλήματα κβαντικής συζητιούνταν συχνά στις μαθηματικές λέσχες των κολλεγίων του Cambridge, αλλά και σε ακαδημαϊκές λέσχες όπως η $\nabla^2 V$ και η λέσχη του Kapitza⁶¹. Τα πρώιμα άρθρα του Dirac απηχούν την πλήρη εξοικείωσή του με τη διεθνή έρευνα στην κβαντική θεωρία και με ό,τι θεωρείτο σημαντικό, ειδικά στην Κοπεγχάγη.

Στην αρχή ο Fowler έπρεπε να πιέσει τον Dirac να ετοιμάσει την εργασία του για δημοσίευση. Οι λέξεις δεν του έρχονταν εύκολα και ξεκίνησε φτιάχνοντας δύο ή τρία προσχέδια με τις σημειώσεις του, μέχρι να ικανοποιηθεί με το αποτέλεσμα. Παραδόξως, ήταν αυτή η έλλειψη διάθεσης για γράψιμο που τον έκανε να αναπτύξει τον ακριβή και περιεκτικό τρόπο επικοινωνίας, ως μοντέλο γλωσσικής και τεχνικής ακρίβειας. Επεξεργαζόταν πάντοτε πολύ τις ιδέες του νοητικά πριν αρχίσει να γράφει, κάνοντας μόνο τις τελικές αλλαγές κατά τη διαδικασία συγγραφής. Δεν συζητούσε τα αποτελέσματά του και δεν τα έδειχνε σε κανέναν, πριν διαμορφωθούν πλήρως στο μυαλό του και γραφτούν. Και στη συνέχεια δεν του άρεσαν οι αλλαγές⁶². Ο Fowler θα του πρότεινε πού να στείλει τα άρθρα του - τα πιο σημαντικά πήγαιναν

⁶⁰ Ο Darwin και ο Rutherford είχαν παρακολουθήσει το πρώτο συνέδριο Solvay στις Βρυξέλες το 1911 και έδειχναν πάντοτε ενδιαφέρον για τα προβλήματα της κβαντικής θεωρίας. Ο Eddington ενδιαφερόταν επίσης για αυτήν. Στην Αγγλία το Cambridge ήταν ένα σημαντικό κέντρο για την κβαντική θεωρία.

⁶¹ Η συμμετοχή στη Λέσχη Kapitza (Kapitza Club) επιτρεπόταν μόνο σε φοιτητές ή συνεργάτες του P. Kapitza, καθώς και σε λίγους ακόμη. Ο Dirac εξελέγη μέλος της λίγο πριν την ομιλία του Heisenberg στις 28 Ιουλίου 1925. Στην επόμενη συνάντηση της Λέσχης στις 4 Αυγούστου 1925, ο Dirac εκφώνησε μια ομιλία. Όταν το ξαναέκανε στις 15 Δεκεμβρίου 1925, συζήτησε την “κβαντική θεωρία περίθλασης” αντιμετωπίζοντας την κβάντωση του φωτός σύμφωνα με τις ιδέες του Duane για την παλιά κβαντική θεωρία, παρόλο που είχε ολοκληρώσει το πρώτο του άρθρο στην κβαντομηχανική λίγο καιρό πριν. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Heisenberg στην ομιλία του με τίτλο “Terminologie und Zeeman-Physik” στη Λέσχη Kapitza είχε επίσης αναφερθεί σε προβλήματα της παλιάς κβαντικής θεωρίας, παρά το γεγονός ότι είχε ανακαλύψει το σχήμα της κβαντομηχανικής αρκετές εβδομάδες νωρίτερα. Αυτό συνέβη διότι εκείνη την εποχή οι φυσικοί δεν ήταν ακόμη αρκετά σίγουροι ότι είχαν ανά χείρας τη λύση του βασικού γρίφου.

Ο Dirac μου είπε: “Αν θυμάμαι καλά, παρακολούθησα το συγκεκριμένο σεμινάριο του Heisenberg. Ο Heisenberg ασχολήθηκε κυρίως με τα τρέχοντα φασματοσκοπικά προβλήματα και αναφέρθηκε στο τέλος μόνο εν συντομία στις νέες ιδέες του για τα στοιχεία μήτρας. Αυτά δεν με εντυπωσίασαν ιδιαίτερα και τα αγνόησα πλήρως. Όταν μελέτησα την εργασία το Σεπτέμβριο, μου φάνηκε σαν μια εντελώς νέα θεωρία”. (Επιστολή του Dirac, Τερνέστη, 27 Ιουλίου 1971).

⁶² Ο Niels Bohr ανέφερε κάποτε στον Heisenberg: “όποτε ο Dirac μου στέλνει κάποιο χειρόγραφο, το γράψιμο είναι τόσο καθαρό και αψεγάδιαστο, ώστε και μόνο να το κοιτάς αποτελεί μια αισθητική απόλαυση. Αν προτείνω ακόμη και μικρές αλλαγές, ο Paul γίνεται τρομερά δυστυχής και δεν αλλάζει τίποτα απολύτως”. (Werner Heisenberg, *Physics and Beyond*, New York 1971, p.87).

Ο Bohr συνήθιζε να “κατασκευάζει” τα άρθρα του, υπαγορεύοντάς τα σε άλλους, κάνοντας διορθώσεις, γράφοντας και ξαναγράφοντας, μέχρι τελικά να ικανοποιηθεί. Για τη μεταπτυχιακή εργασία του επιστρατεύτηκε η μητέρα του, για τη διδακτορική διατριβή του η σύζυγός του και στη συνέχεια με πρώτο τον Kramers, όλοι οι συνεργάτες του Bohr έγραφαν καθ’ υπαγόρευσή του. Κάποτε ο Dirac έτυχε να βρίσκεται εκεί, όταν ο Bohr προετοίμαζε ένα άρθρο. Βάδιζε και υπαγόρευε, επέστρεφε και διόρθωνε, και αυτό συνεχιζόταν για πολλή ώρα.

στο “Proceedings of the Royal Society”. Το “Proceedings of the Cambridge Philosophical Society” είχε υψηλά στάνταρ και μεγάλη αναγνωσιμότητα και ο Dirac δημοσίευε εκεί επίσης. Ο Dirac μελέτησε επίσης πολλά προβλήματα, αλλά δεν δημοσίευσε τις εργασίες του⁶³.

Αργότερα, όταν ο Kapitza και ο Dirac έγιναν στενοί φίλοι, ο Kapitza τον έπεισε να αναλάβει κάποια πειραματική εργασία. Ο Dirac είχε την ιδέα ότι η περιστροφή των αερίων σε μεγάλες ταχύτητες θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το διαχωρισμό των ισοτόπων. Χρησιμοποιώντας τη συσκευή του βρήκε “μια αμελητέα ποσότητα διαχωρισμού”, αλλά ανακάλυψε ένα “θερμικό” φαινόμενο κατά τη διαδικασία. Το φαινόμενο συνίστατο στο γεγονός ότι όταν το αέριο αντλούταν από ένα σωλήνα που διακλαδιζόταν σε δύο άλλους, το αέριο εξερχόταν από τους δύο σωλήνες με ιδιαίτερα διαφορετικές θερμοκρασίες: η αιτία για το φαινόμενο αυτό ήταν το ιξώδες του αερίου, μέσω του οποίου ενέργεια από τα εσωτερικά στρώματα του αερίου στον πρώτο σωλήνα μεταφερόταν στα εξωτερικά στρώματα και θα μπορούσε κάποιος να διαχωρίσει τα στρώματα διαφορετικής θερμοκρασίας του αερίου μέσω της διάταξης των δύο σωλήνων. Η εργασία για το διαχωρισμό των ισοτόπων διεκόπη, όταν ο Kapitza επέστρεψε στη Ρωσία το 1934, καθώς ο Dirac δεν είχε αρκετό ενθουσιασμό να συνεχίσει χωρίς αυτόν. Τίποτε δεν συνέβη σχετικά με το θέμα αυτό μέχρι το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, όταν ασχολήθηκαν ξανά στην Οξφόρδη μέσω κάποιας τροποποιημένης διάταξης⁶⁴.

Ένα κοινό άρθρο των Dirac και Kapitza⁶⁵ αναφέρεται σε ένα άλλο πείραμα, που επιχείρησαν να πραγματοποιήσουν. Συζήτησαν τη θεωρητική δυνατότητα να δημιουργήσουν περιθλαση ηλεκτρονίων από μια σχισμή με στάσιμα φωτεινά κύματα, αλλά το πείραμά τους δεν μπορούσε να πραγματοποιηθεί με πηγές συνεχούς φωτός λόγω χαμηλής έντασης και πρότειναν τη χρήση μια πηγής ισχυρής υδραργυρικής αίγλης. Παρόλα αυτά, ο Dirac δεν εργάστηκε ποτέ ξανά με το συγκεκριμένο πείραμα. Το πείραμά του στο διαχωρισμό των ισοτόπων παρέμεινε η μόνη πειραματική εργασία του όπως επίσης και η μόνη, θεωρητική ή πειραματική, που είχε κάποια σχέση με την πυρηνική φυσική.

Κατά τη διάρκεια ενός διαλείμματος ο Dirac είπε: “Καθηγητή Bohr, όταν ήμουν στο σχολείο, ο δάσκαλός μου μου έμαθε να μην ξεκινώ μια πρόταση, αν δεν γνωρίζω πώς να την τελειώσω”.

⁶³ Για παράδειγμα, τον ενδιέφερε η θεωρία του Weyl για τον ηλεκτρομαγνητισμό και τη βαρύτητα και έκανε μια λεπτομερή μελέτη του πεδίου γύρω από το ηλεκτρόνιο, βρίσκοντας ότι οι εξισώσεις χρειαζόνταν μια τροποποίηση, που θα έκανε το φορτίο να μεταβάλλεται με το χρόνο. (Συζήτηση με τον Dirac, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969). (Για τη θεωρία του Weyl βλ. A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 196-212, H. Weyl, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), 1918, p.465, Ann. Phys. (Leipzig) 59, 101-133 (1919)).

⁶⁴ Ο Dirac επισκεπτόταν περιστασιακά την Οξφόρδη για να συζητά με τους πειραματιστές. Το πρόβλημα ήταν να επιτύχει κανείς περιστρεφόμενα αέρια χωρίς τη χρήση κινούμενων μηχανικών τμημάτων.

⁶⁵ “The Reflection of Electrons from Standing Light Waves”, with P.L. Kapitza, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 29, 297-300 (1933) (παρελήφθη 24 Μαρτίου 1933).

IV. Κβαντομηχανική

Στις 28 Ιουλίου 1925 ο Werner Heisenberg μίλησε για τη ζούγκλα προβλημάτων της παλιάς κβαντικής θεωρίας σε ένα σεμινάριο με τίτλο “Termzoologie und Zeemanbotanik” στην 94^η συνάντηση της Λέσχης Kapitza⁶⁶. Σε ιδιωτικές συζητήσεις ο Heisenberg εξήγησε επίσης τις ιδέες και τα αποτελέσματά του στην κβαντομηχανική - την οποία είχε παραγάγει λίγες εβδομάδες πριν την εμφάνισή του στο Cambridge - που περιείχονταν στο υπό δημοσίευση άρθρο του “Quantum-Theoretical Re-Interpretation of Kinematic and Mechanic Relations”⁶⁷. Ο Fowler ήταν πιθανότατα παρών στο σεμινάριο του Heisenberg και του ζήτησε να του στείλει αντίγραφο του άρθρου του⁶⁸. Στο άρθρο αυτό που έθετε τα θεμέλια της κβαντομηχανικής, ο Heisenberg είχε καταλήξει σε ένα νέο κανόνα κβάντωσης χρησιμοποιώντας μόνο τέτοιες ποσότητες, οι οποίες θα μπορούσαν να “ελεγχθούν κατ’ αρχήν”, δηλαδή ήταν μετρήσιμες. Ως τέτοιες θεώρησε τους συντελεστές Fourier που περιγράφουν τη θέση και την αντίστοιχη ορμή ενός περιοδικού συστήματος. Τοποθετώντας τους συντελεστές αυτούς σε τετραγωνικά σχήματα και χρησιμοποιώντας τον κανόνα άθροισης των Thomas-Kuhn, ο Heisenberg είχε καταλήξει σε ένα τυπικό κανόνα πολλαπλασιασμού. Μέσω αυτού υπολόγισε τις ενεργειακές καταστάσεις του αρμονικού και ενός ελαφρώς αναρμονικού ταλαντωτή, και του ρότορα, και παρείχε τη θεμελιώδη βάση των διαφόρων επιτυχών κανόνων που είχαν παραχθεί στο παρελθόν μαντεύοντας μέσω των φασματικών δεδομένων.

Ο Dirac πιθανότατα παρακολούθησε το σεμινάριο του Heisenberg και μία εβδομάδα αργότερα μίλησε στη Λέσχη Kapitza. “Δεν είχα ακούσει τίποτα για τις μήτρες του Heisenberg, μέχρι που

⁶⁶ Βλέπε και υποσημείωση 59.

⁶⁷ Z. Phys. 33, 879-893 (1925). Έπειτα από μια σοβαρή κρίση αλλεργικού πυρετού, ο Heisenberg πέρασε κάποιες εβδομάδες στο βραχύδες νησί Helgoland. Κατά την παραμονή του εκεί του προέκυψε η λύση του κβαντικού προβλήματος. Ολοκλήρωσε την εργασία στο Göttingen και έστειλε το χειρόγραφο στον Pauli στις 9 Ιουλίου 1925. Στις 11 ή 12 Ιουλίου έδωσε στο Max Born την τελική εκδοχή και αυτός “εντυπωσιάστηκε βαθιά” με την εργασία του Heisenberg. (βλ. B.L. van der Waerden, Sources of Quantum Mechanics, Amsterdam 1967, Dover, N.Y., 1968, pp. 25-27). Ο Born έγραψε αμέσως στον Einstein: “το νέο άρθρο του Heisenberg, που θα δημοσιευθεί σύντομα, μοιάζει μυστικιστικό, αλλά είναι σίγουρα σωστό και βαθύ”. Όταν ο Born σκέφτηκε σχετικά με το συμβολικό πολλαπλασιασμό του Heisenberg, βρήκε πολύ σύντομα ότι “δεν ήταν τίποτε άλλο παρά λογισμός πινάκων, γνωστός σε εμένα από τις φοιτητικές μέρες μου στα σεμινάρια του Rosanes”. (βλ. van der Waerden, “Sources”, pp. 36-37). Απλοποιώντας το συμβολισμό του Heisenberg, ο Born ανακάλυψε ότι “τα δύο γινόμενα μητρών pq και qp δεν ήταν ταυτόσημα” και τελικά έγραψε την “παράξενη εξίσωση” $pq - qp = \frac{\hbar}{i}$, όπου p και q οι μεταβλητές ορμής

και θέσης του Heisenberg και I η μοναδιαία μήτρα. Στις 19 Ιουλίου 1925, στο τρένο καθοδόν για τη συνάντηση της Γερμανικής Ακαδημίας Φυσικής στο Ανόβερο, ο Born πληροφόρησε τον Pauli για την ανακάλυψή του. Στις 27 Σεπτεμβρίου 1925 υπέβαλλε ένα κοινό άρθρο με τον P. Jordan στην κβαντομηχανική (Z. Phys. 34, 858-888 (1925)). Ταυτόχρονα ξεκίνησε η συνεργασία για το άρθρο των Τριών (M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Z. Phys. 35, 557-615 (1926)). Σε μια σημείωση του άρθρου, οι συγγραφείς λένε: “ένα άρθρο του P.A.M. Dirac (Proc. Roy. Soc. London A109, 642 (1925)), το οποίο εμφανίστηκε στο μεσοδιάστημα, παρέχει ανεξάρτητα κάποια από τα αποτελέσματα που περιέχονται στο πρώτο τμήμα του παρόντος άρθρου, μαζί με κάποια νέα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη θεωρία”.

⁶⁸ B.L. van der Waerden, “Sources”, p. 41.

έλαβα ένα αντίγραφο από τον Fowler”. Ο Fowler είχε λάβει την προκαταρκτική εκδοχή του άρθρου του Heisenberg στις αρχές Σεπτεμβρίου 1925, βρήκε το θέμα ενδιαφέρον, αλλά δεν ήταν πολύ σίγουρος γι αυτό και ήθελε να δει την αντίδραση του Dirac. Ο Dirac λέει: “έχω συχνά προσπαθήσει να θυμηθώ την πρώτη μου αντίδραση, αλλά δεν θυμάμαι ποια ήταν. Υποθέτω ότι ήταν απλά διαφορετική από το φορμαλισμό του Hamilton. Ήμουν τόσο εντυπωσιασμένος τότε με το φορμαλισμό του Hamilton ως βάση της ατομικής φυσικής, που πίστευα ότι οτιδήποτε δεν συνδεόταν με αυτόν δεν θα ήταν αρκετά καλό. Πίστευα ότι δεν είχε κάτι το ιδιαίτερο [το άρθρο του Heisenberg] και το έβαλα στην άκρη για μια εβδομάδα περίπου”⁶⁹. Ο Dirac είχε αρχικά την εντύπωση ότι ο Heisenberg διατηρούσε περισσότερα στοιχεία από την παλιά θεωρητική δομή σε σχέση με αυτόν⁷⁰. Παρόλα αυτά, “επέστρεψα σε αυτό αργότερα και ξαφνικά μου έγινε σαφές, ότι επρόκειτο για το αληθινό πράγμα”⁷¹. Η ιδέα του Heisenberg είχε προσφέρει το κλειδί για το “όλο μυστήριο”. Κατά τη διάρκεια των επόμενων εβδομάδων ο Dirac προσπαθούσε να συνδέσει τις μήτρες του Heisenberg με τις μεταβλητές δράσης-γωνίας της θεωρίας Hamilton-Jacobi. “Εργάστηκα γι αυτό εντατικά ξεκινώντας από το Σεπτέμβριο του 1925. Νομίζω ότι ήταν απλά θέμα εβδομάδων πριν μου έρθει η ιδέα των αγκύλων Poisson. Κατά τη διάρκεια ενός μεγάλου Κυριακάτικου περιπάτου, σκέφτηκα ότι ο μεταθέτης ίσως ήταν το ανάλογο της αγκύλης Poisson, αλλά δεν γνώριζα πολύ καλά τότε τι ήταν η αγκύλη Poisson. Είχα διαβάσει λίγα πράγματα σχετικά και είχα ξεχάσει τα περισσότερα από αυτά. Ήθελα να ελέγξω την ιδέα αυτή, αλλά δεν μπορούσα να το κάνω, διότι δεν είχα κανένα βιβλίο στο σπίτι για τις αγκύλες Poisson και όλες οι βιβλιοθήκες ήταν κλειστές. Έτσι, έπρεπε να περιμένω με ανυπομονησία μέχρι τη Δευτέρα το πρωί που θα άνοιγαν οι βιβλιοθήκες, ώστε να ελέγξω τι ήταν πραγματικά η αγκύλη Poisson. Τότε ανακάλυψα ότι θα ταίριαζαν, αλλά πέρασα μια ανυπόμονη νύχτα αναμονής”⁷².

Ευθύς εξ αρχής η αποσαφήνιση του Dirac της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών του Heisenberg και των κλασικών μεταβλητών έκανε τη διατύπωση να μοιάζει περισσότερο κλασική και ταυτόχρονα απομόνωνε με πολύ σαφή τρόπο το μικρό σημείο, στο οποίο η επαναδιατύπωση έπρεπε να προχωρήσει σε ρήξη με την κλασική θεωρία.

⁶⁹ ΑΗQP, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968).

⁷⁰ Γράφοντας στον Pauli στις 9 Ιουλίου 1925, όταν του έστειλε το άρθρο του, ο Heisenberg είπε: “η γνώμη μου για τη μηχανική γίνεται πιο ριζοσπαστική μετά το Helgoland μέρα με τη μέρα....Είμαι πραγματικά πεισμένος, ότι μια ερμηνεία της εξίσωσης Rydberg με τη γεωμετρική έννοια των κυκλικών και ελλειπτικών τροχιών δεν έχει καμία φυσική σημασία και όλες οι ταπεινές προσπάθειές μου κατευθύνονται προς την πλήρη δολοφονία της έννοιας των τροχιών που έτσι κι αλλιώς κανείς δεν μπορεί να παρατηρήσει και την αντικατάστασή τους από μια άλλη καταλληλότερη έννοια”. (B.L. van der Waerden, “Sources”, p. 27).

⁷¹ ΑΗQP, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968).

⁷² Ομιλία του Dirac στο “Από μια ζωή Φυσικής” στις 14 Ιουνίου 1968.

Εκφράζοντας τις κβαντικές συνθήκες σε γωνιακές μεταβλητές ο Dirac βρήκε την αντιστοιχία μεταξύ των αγκύλων μετάθεσης του Heisenberg και των κλασικών αγκύλων Poisson για τις μεταβλητές X και Y

$$XY - YX = i\hbar \sum_r \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_r} - \frac{\partial Y}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_r} \right\} \quad (3)$$

όπου τα q_r και p_r μπορούν να θεωρηθούν ως οι μεταβλητές δράσης-γωνίας ω_r και J_r . Ο Dirac βρισκόταν τώρα με ασφάλεια πίσω στο χαμιλτονιανό έδαφος και έδειξε τα νέα του αποτελέσματα στον Fowler, ο οποίος εκτίμησε πλήρως τη σπουδαιότητά τους. Ο Fowler γνώριζε τι συνέβαινε στην Κοπεγχάγη και το Göttingen και συνειδητοποίησε ότι ίσως προέκυπτε ανταγωνισμός από τα κέντρα αυτά. Θεώρησε ότι τα αποτελέσματα της Αγγλίας στο πεδίο αυτό έπρεπε να δημοσιευτούν πάραυτα και πίεσε το “Proceedings of the Royal Society” να δώσει άμεση προτεραιότητα στη δημοσίευση του άρθρου του Dirac “The Fundamental Equations of Quantum Mechanics”⁷³.

Στο θεμελιώδες άρθρο του ο Dirac έδωσε αρχικά μια σύνοψη των ιδεών του Heisenberg, απλοποιώντας τα μαθηματικά και κάνοντάς τα κομψότερα, με τρόπο παρόμοιο με αυτό που έκαναν ανεξάρτητα οι Born και Jordan⁷⁴. Ανέπτυξε μια κβαντική άλγεβρα, εισάγοντας το άθροισμα και το γινόμενο δύο ποσοτήτων, της αντίστροφης (reciprocal) και της τετραγωνικής ρίζας. Στρεφόμενος στην “κβαντική διαφόριση”, ο Dirac παρήγαγε μια σχέση μεταξύ της παραγώγου μιας ποσότητας και του μεταθέτη της με μια άλλη ποσότητα. Από εκεί βρήκε το κλειδί για τη σχέση του κβαντικού μεταθέτη με την κλασική θεωρία, όπως εκφράστηκε στην εξίσωση (3). Μπορούσε τώρα να χρησιμοποιήσει όλα τα εργαλεία της κλασικής θεωρίας, θεωρώντας ειδικότερα ως δεδομένο ότι οι μεταθέτες ήταν συνεπείς με τις εξισώσεις κίνησης. “Η αντιστοιχία μεταξύ της κβαντικής και της κλασικής θεωρίας δεν έγκειται τόσο στη συμφωνία για το όριο που το $\hbar$ τείνει στο μηδέν, όσο στο γεγονός ότι οι μαθηματικές πράξεις στις δύο θεωρίες υπακούουν σε πολλές περιπτώσεις τον ίδιο νόμο”⁷⁵. Εξήγαγε αμέσως τους

⁷³ “The Fundamental Equations of Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A109, 642-653 (1925). Παρελήφθη στις 7 Νοεμβρίου 1925 και εμφανίστηκε την 1^η Δεκεμβρίου 1925 στο “Proceedings of the Royal Society”. Ο Fowler είχε πολύ δίκιο, διότι η ομάδα του Göttingen (Born και Jordan) δημοσίευσαν ταχύτατα ένα άρθρο για τους κανόνες μετάθεσης στην κβαντομηχανική, όπως επίσης και η “Εργασία των Τριών” (Born, Heisenberg, Jordan) που περιείχε τμήματα της θεωρίας μετασχηματισμών, στην οποία ο Dirac συνεισέφερε άμεσα (και ανεξάρτητα) τα μέγιστα. Ήταν πράγματι ευτυχές που κάποιος που κατανοούσε τη σπουδαιότητα και το επείγον της κατάστασης σχετικά με την εργασία του Dirac βρισκόταν τριγύρω.

Μέχρι την εργασία του Dirac δεν εμφανίστηκαν αξιοσημείωτες συνεισφορές στην κβαντική θεωρία από την Αγγλία, παρόλο που ήταν ο Λόρδος Kelvin στις διαλέξεις του στη Βαλτιμόρη, αυτός που είχε συνοψίσει τις δυσκολίες που επιλύονταν από την κβαντική θεωρία για πρώτη φορά. Η παλιά κβαντική θεωρία είχε αναπτυχθεί σχεδόν αποκλειστικά στην Ηπειρωτική Ευρώπη - τη Γερμανία, τη Δανία και την Ολλανδία. Οι πρότερες εργασίες του J. Larmor (Proc. Roy. Soc. (London) A83, 82-95 (1909)) και του J. Jeans (έγραψε χρήσιμα σημειώματα για την κβαντική θεωρία, 1914, 1924) δεν αποδείχτηκαν μεγάλου ενδιαφέροντος.

⁷⁴ M. Born και P. Jordan, Z. Phys. 34, 858-888 (1925).

⁷⁵ “The Fundamental Equations of Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A109, (1925), p.649.

κανόνες κβάντωσης του Heisenberg και δημιούργησε τις κανονικές (canonical) εξισώσεις κίνησης για τα κβαντικά συστήματα⁷⁶. Τέλος, στο ίδιο άρθρο, ο Dirac εισήγαγε μια πρώιμη μορφή τελεστών γένεσης και εξαΰλωσης, δείχνοντας τις αναλογίες τους στην κλασική θεωρία.

Ο Dirac πολύ σύντομα - λίγες εβδομάδες αργότερα - δημοσίευσε ένα άλλο άρθρο⁷⁷. Σε αυτό ανέπτυξε τους αλγεβρικούς νόμους που διέπουν τις δυναμικές μεταβλητές, την άλγεβρα των “αριθμών q ” (“ q -numbers”), όπως ονόμαζε τώρα τις δυναμικές μεταβλητές που ικανοποιούν όλους τους κανόνες των συνήθων αριθμών, εκτός από το ότι το γινόμενό τους δεν αντιμετατίθεται αναγκαστικά. Η μη μεταθετικότητα του γινομένου οδηγεί σε κάποιες δυσκολίες, για παράδειγμα του προσδιορισμού της παραγώγου. Προκειμένου να συσχετίσει κάποιος τους αριθμούς q με τα πειραματικά αποτελέσματα, θα πρέπει να τους αναπαραστήσει με κλασικούς αριθμούς (“ c -numbers”)⁷⁸. Για παράδειγμα, ο αριθμός q X πρέπει να παρασταθεί με τους όρους Fourier $x(n,m)e^{i\omega(nm)t}$, όπου τα $x(nm)$ και $\omega(nm)$ είναι κλασικοί αριθμοί⁷⁹. Ο Dirac κατέληξε σε επιπλέον συμπεράσματα μέσω των αγκύλων Poisson για γενικότερους μεταθέτες και προσδιόρισε τις συνθήκες υπό τις οποίες μια ομάδα μεταβλητών είναι κανονική. Οποιαδήποτε ομάδα κανονικών μεταβλητών Q και P συσχετίζεται με κάποια άλλη μέσω ενός μετασχηματισμού, αλλά δεν απέδωσε εκείνη την εποχή μεγάλη σημασία στο μετασχηματισμό αυτό⁸⁰. Παρέθεσε λεπτομερή θεωρήματα τελεστών με αριθμούς q και εφάρμοσε τους κανόνες του σε πολλαπλώς περιοδικά συστήματα σε στενή αναλογία με τους παλιούς κβαντικούς κανόνες.

Ο στόχος του Dirac ήταν να εφαρμόσει το σχήμα του στο άτομο του υδρογόνου. Έγραψε τη Χαμιλτονιανή του αντικαθιστώντας απλά τις μεταβλητές θέσης και ορμής της κλασικής Χαμιλτονιανής με αριθμούς q και προχώρησε στην παραγωγή της εξίσωσης Balmer⁸¹. Το άρθρο αυτό ήταν ένα σημαντικό βήμα εμπρός, διότι έδειξε ότι θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί με το τυπικό σχήμα που είχε αναπτύξει νωρίτερα ο Dirac, καταλήγοντας σε αποτελέσματα που ήταν πολύ κοντά στα πειράματα⁸². Ο Dirac δεν προχώρησε όσο ο Pauli ολοκληρώνοντας τον

⁷⁶ Βλέπε υποσημείωση 73.

⁷⁷ “Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom”, Proc. Roy. Soc. (London) A110, 561-579 (1926) (παρελήφθη 22 Ιανουαρίου 1926).

⁷⁸ Οι όροι “ q -numbers” και “ c -numbers” εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Dirac. Ο πρώτος δηλώνει τελεστές (κβαντικούς αριθμούς), ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς (ΣΤΜ).

⁷⁹ Ο Dirac τόνισε ότι οι αριθμοί q είναι γενικότεροι από αυτούς που μπορούν να περιγραφούν μέσω σειρών Fourier. Έτσι, θα μπορούσαν, κατ’ αρχήν, να περιγραφούν τα μη περιοδικά συστήματα.

⁸⁰ Ο αντίστοιχος “μετασχηματισμός στους κύριους άξονες” θεωρείτο πολύ σημαντικός από τους Born και Jordan και τους μαθηματικούς στο Göttingen.

⁸¹ Στην πραγματικότητα μετασχημάτισε πρώτα σε πολικές συντεταγμένες και υπολόγισε τις αντίστοιχες κλασικές ορμές χρησιμοποιώντας αγκύλες Poisson. Η Χαμιλτονιανή που προέκυψε έμοιαζε διαφορετική από την κλασική σε πολικές συντεταγμένες, αλλά οι υπολογισμοί του Dirac απέδειξαν την ορθότητά της.

⁸² Στις 17 Ιανουαρίου 1926, το “Zeitschrift für Physik” έλαβε το άρθρο του Pauli “The Hydrogen Spectrum from the Standpoint of the New Quantum Mechanics” (Z. Phys. 36, 336-363 (1926)). Από μια επιστολή που έγραψε ο Heisenberg στον Pauli, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι ο υπολογισμός του Pauli είχε ολοκληρωθεί πριν τις 3

υπολογισμό για το άτομο του υδρογόνου, αλλά δεν ήταν απαραίτητο διότι μπορούσε να γίνει με τον τρόπο που υποδείκνυε ο Pauli - ο Dirac είχε δει έναν απολογισμό της εργασίας του Pauli και αναφέρθηκε σε αυτή σε μια υποσημείωση στο άρθρο του. Ο Dirac είχε χρησιμοποιήσει το παράδειγμα του ατόμου του υδρογόνου για να τονίσει τη σχέση και τη διαφορά ανάμεσα στην κλασική και την κβαντική θεωρία - χωρίς αυτή την εφαρμογή η εργασία του έμοιαζε να είναι μάλλον φορμαλιστική και συμβολική.

Στο επόμενο άρθρο του, που υπεβλήθη στο τέλος Μαρτίου 1926, ο Dirac εξέτασε το πρόβλημα των δυναμικών μεταβλητών στην κβαντική θεωρία ακόμη περισσότερο⁸³. Ήταν το ίδιο πρόβλημα με αυτό που είχε προκύψει μετά την εργασία του Bohr στο άτομο του υδρογόνου και είχαν δοθεί ως απάντηση μόνο κάποιοι υπαινιγμοί στις εργασίες των Sommerfeld, Einstein, Planck, Schwarzschild, Epstein και Ehrenfest τη δεκαετία που ακολούθησε⁸⁴. Το ερώτημα ήταν: ποιες είναι οι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές, όταν κάποιος πρέπει να μελετήσει ένα ατομικό σύστημα με αρκετά ηλεκτρόνια σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων; Ο Dirac επεξεργάστηκε το πρόβλημα αυτό σε στενή αναλογία με το κλασικό αντίστοιχό του, εκφράζοντας τις “γεωμετρικές” σχέσεις που ικανοποιούσαν οι κλασικές μεταβλητές σε αναλυτική μορφή και στη συνέχεια δημιουργώντας τις κβαντικές μεταβλητές που ικανοποιούν τις ίδιες αλγεβρικές σχέσεις, αντικαθιστώντας βέβαια τις κλασικές αγκύλες Poisson με κβαντικές αγκύλες⁸⁵. Μέσω των υπολογισμών του μπορούσαν να προκύψουν τα διάφορα χαρακτηριστικά του διαχωρισμού και των εντάσεων των φασματικών γραμμών σε μαγνητικό πεδίο (συμπεριλαμβανομένου του ανώμαλου φαινομένου Zeeman) σε συμφωνία με το πείραμα.

Σε ένα σημείωμα που αναγνώστηκε στην “Cambridge Philosophical Society” στις 26 Ιουλίου 1926, ο Dirac συνόψισε τις ιδιότητες των συναρτήσεων των αριθμών q ⁸⁶. Η μη μεταθετική άλγεβρα ήταν μια παράξενη ιδέα τον καιρό εκείνο, παρόλο που δεν θα έπρεπε, διότι τα τετραδόνια υπήρχαν αρκετό καιρό πριν και ο λογισμός πινάκων, στα μαθηματικά βέβαια, ήταν σε ευρεία χρήση. Στην αρχή, ο ίδιος ο Dirac δεν συνειδητοποίησε ακριβώς ότι η άλγεβρά του

Νοεμβρίου 1925, επιστρατεύοντας την πλήρη ισχύ της μητρομηχανικής και επιδεικνύοντας τη μεγάλη δεξιοτεχνία του. Έδειξε επίσης ότι το κβαντομηχανικό σχήμα των Born, Heisenberg και Jordan ήταν απολύτως αξιόπιστο.

⁸³ “The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A111, 281-305 (1926) (παρελήφθη 27 Μαρτίου 1926).

Το ερώτημα αυτό είχε απασχολήσει τον Dirac για αρκετό διάστημα, χωρίς να σημειώσει ικανοποιητική πρόοδο. Ειδικότερα, είχε σκεφτεί το πρόβλημα του φάσματος του ηλίου και το είχε μελετήσει για σχεδόν δύο χρόνια. Συνειδητοποίησε τώρα ότι το κλειδί του μυστηρίου είχε δοθεί από τον Heisenberg, που επίσης έλυσε το πρόβλημα του ηλίου (Z. Phys. 39, 499, 1926). Ο Heisenberg χρησιμοποίησε τη μέθοδο της κυματοσυνάρτησης Schrödinger και ανέφερε επίσης το συγκεκριμένο άρθρο του Dirac.

⁸⁴ A. Sommerfeld, Ann. Phys. (Leipzig) 51, 1 (1916), M. Planck, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 17, 407 (1915), P. Epstein, Phys. ZS 17, 148 (1916), K. Schwarzschild, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) (1916), p.548, A. Einstein, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 19, 82 (1917).

⁸⁵ Ο Dirac ασχολήθηκε εκτενώς με τις σχέσεις που προέκυπταν από τη διατήρηση της τροχιακής στροφορμής.

⁸⁶ “On Quantum Algebra”, Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 412-418 (1926).

με τους αριθμούς q ήταν ακριβώς ισοδύναμη με την άλγεβρα πινάκων. Ούτως ή άλλως, δεν του άρεσε ιδιαίτερα η άλγεβρα μητρών του Heisenberg⁸⁷. Η προσέγγιση του Dirac με τη χρήση των αριθμών q του έμοιαζε διαφορετική από τους κανόνες που είχε χρησιμοποιήσει ο Heisenberg στο πρώτο του άρθρο, όπως επίσης και από την προσέγγιση των Born και Jordan με τη χρήση αναπααραστάσεων μέσω μητρών, που θεωρούσαν τις μήτρες καθαυτές ως θεμελιώδεις. Συνειδητοποίησε ότι το πιο σημαντικό πράγμα ήταν η μη μεταθετικότητα, η οποία είχε τόσο ενοχλήσει τον Heisenberg στην αρχή⁸⁸. Οι μαθηματικοί βέβαια γνώριζαν τα προβλήματα μητρών όπως και τη γενικευμένη έννοια των γραμμικών τελεστών. Η τελευταία είχε αναπτυχθεί ως θεωρία κυρίως από τον D. Hilbert, αλλά ο Dirac ανακάλυψε ανεξάρτητα ξανά εκείνες τις πτυχές της θεωρίας που χρειαζόταν για την έρευνά του. Οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να δημιουργήσουν υψηλότερα κριτήρια αυστηρότητας και τους απασχολούσαν πολύ τα λεπτομερή θεωρήματα σύγκλισης και ύπαρξης, ζητήματα που ο Dirac δεν έβρισκε τόσο γοητευτικά⁸⁹.

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Dirac ακολούθησε το δικό του μαθηματικό μονοπάτι αρκετά ανεξάρτητα. Είχε ξεκινήσει με τη θεωρία δράσης-γωνίας των Hamilton-Jacobi και είδε ότι οι απόπειρες που βασίζονταν σε αυτή δεν θα οδηγούσαν σε μια ικανοποιητική λύση των ατομικών προβλημάτων. Έπρεπε να εισαχθεί ένας νέος κανόνας, τον οποίο βρήκε στην έννοια των αριθμών q και της άλγεβράς τους. “Μπορούσα να στραφώ στην άλγεβρα, όταν είχα δεδομένες τις βασικές ιδέες. Αλλά για να συλλάβω τις νέες βασικές ιδέες εργάστηκα γεωμετρικά. Όταν καθιερώνονται οι ιδέες, μπορούν να διατυπωθούν σε αλγεβρική μορφή και μπορούμε να προχωρήσουμε στη συναγωγή συνεπειών”⁹⁰.

Στη θεωρία του φάσματος υδρογόνου, το να εργαστεί κανείς “γεωμετρικά” σήμαινε ότι, δεδομένου του σχήματος δράσης και του κλασικού προβλήματος, θα μπορούσε κάποιος να στραφεί στο κβαντικό πρόβλημα αντικαθιστώντας τους συνήθεις αριθμούς c με τους αριθμούς q .

Μέσω αυτής της σειράς άρθρων προκύπτει εύκολα, ότι ο Dirac εργάστηκε πολύ σκληρά και με τεράστια συγκέντρωση. Το 1926, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου εκπληκτικής

⁸⁷ Ο Dirac δεν ευχόταν να επιβιβαστεί στο άρμα της μητρομηχανικής και ο Fowler ήταν ευτυχής που ο Dirac αφοσιώθηκε στην προσωπική του μέθοδο.

⁸⁸ “Ο Heisenberg οδηγήθηκε πολύ διστακτικά στη μη μεταθετική άλγεβρα. Ήταν πολύ διστακτικός διότι ήταν τόσο ξένη προς όλες τις ιδέες των φυσικών εκείνη την εποχή και όταν προέκυψε αρχικά, θεώρησε ότι έπρεπε να υπάρχει κάποιο λάθος στη θεωρία του και προσπάθησε να το διορθώσει, αλλά αναγκάστηκε απλά να το αποδεχτεί. Έτσι η μη μεταθετικότητα εμφανίστηκε με έναν έμμεσο τρόπο”. (Ομιλία του Dirac στο Austin, 14 Απριλίου 1970).

⁸⁹ Το 1929 ο A. Wintner δημοσίευσε το βιβλίο του “Spektraltheorie der unendlichen Matrizen” (Leipzig, 1929). Ο Dirac και ο Heisenberg είχαν χρησιμοποιήσει νωρίτερα αυτές τις μεθόδους πολύ επιτυχώς. Ας αναλογιστούμε επίσης ότι ήδη το 1926 ο Schrödinger είχε ανακαλύψει τελεστές με συνεχείς ιδιοτιμές.

⁹⁰ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

δημιουργικότητας, ο Dirac ολοκλήρωσε επίσης τη διδακτορική διατριβή του στο Cambridge με θέμα τα αξιώματα της κβαντομηχανικής⁹¹. Έδωσε διαλέξεις για τη νέα θεωρία, συμπεριλαμβανομένων των ομιλιών στις Λέσχες Kapitza και $\nabla^2 V$, θεωρώντας ευκολότερο και διδακτικότερο να συζητά για πράγματα που μόλις είχε μάθει, “παρά μετά από χρόνια, διότι θυμάσαι ακόμη πού βρίσκονται οι δυσκολίες”⁹².

⁹¹ “Quantum Mechanics”, Cambridge University dissertation, May 1926. (Η διατριβή του Dirac ήταν η πρώτη που γράφτηκε ποτέ για την κβαντομηχανική (ΣΤΜ)).

Ο Dirac έγραψε τη διατριβή του σχετικά με τα αξιώματα της κβαντομηχανικής, τις οποίες είχε αναπτύξει. Αργότερα έκανε διαλέξεις για την κβαντομηχανική στο Cambridge, που οδήγησαν στο βιβλίο του “The Principles of Quantum Mechanics”, Oxford 1930.

⁹² ΑΗQΡ.

V. Η ολοκλήρωση του σχήματος

Το άρθρο του E. Schrödinger “Η κβάντωση ως πρόβλημα ιδιοτιμών”, το πρώτο από μια σειρά άρθρων που ακολούθησαν γρήγορα το ένα το άλλο σχετικά με το πλαίσιο της κυματομηχανικής, παρελήφθη από τον εκδότη των “Annalen der Physik” στις 27 Ιανουαρίου 1926⁹³. Ο Schrödinger είχε κατασκευάσει μια θεωρία, η οποία σε πρώτη ανάγνωση έμοιαζε εντελώς διαφορετική από τα σχήματα που αναπτύχθηκαν στο Göttingen και το Cambridge. Βασισμένη στις ιδέες του de Broglie⁹⁴, η θεωρία του χρησιμοποιούσε μια κυματική συνάρτηση για την οποία έγραψε μια γραμμική εξίσωση, επιβάλλοντας συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Ο Schrödinger κατάφερε να αναπαράγει τους υπολογισμούς για το φάσμα του υδρογόνου σε περίπου τρεις σελίδες⁹⁵. Οι μεγάλοι φυσικοί στο Βερολίνο M. Planck, A. Einstein και M. von Laue ήταν πολύ ευχαριστημένοι με την εργασία του Schrödinger, διότι στη θεωρία αυτή χρησιμοποιούνταν συνεχείς συναρτήσεις και κάποιος δεν χρειαζόταν να βασιστεί στην “απαίσια και αηδιαστική” μητρομηχανική και την “πολύπλοκη” και προφανώς “αυτοαναιρούμενη” φιλοσοφία του Bohr⁹⁶. Εξάλλου, οι υπολογισμοί του Schrödinger παρείχαν μια εύκολη ερμηνεία με όρους κλασικών εννοιών, τις οποίες οι άνθρωποι του Göttingen προσπαθούσαν να αποφύγουν ολοκληρωτικά. Λίγο αργότερα όμως, ο ίδιος ο Schrödinger απέδειξε ότι οι εξισώσεις μητρώων του Heisenberg μπορούσαν να αντικατασταθούν από τις δικές του διαφορικές εξισώσεις, δείχνοντας το ταυτόσημο των δύο σχημάτων αναφορικά με τα αποτελέσματα στα οποία κατέληγαν⁹⁷.

Εφόσον ο Dirac είχε αναπτύξει “ένα καλό σχήμα” και αναζητούσε τις συνέπειές του, ήταν “καθυστερημένος” στην ανάγνωση του πρώτου άρθρου του Schrödinger. Όταν τελικά το διάβασε, ενοχλήθηκε κάπως διότι θα έπρεπε τώρα να μάθει μια άλλη μέθοδο, η οποία

⁹³ E. Schrödinger, Ann. Phys. (Leipzig), 79, 36, 489 (1926), 80, 437 (1926), 81, 109 (1926).

⁹⁴ O de Broglie είχε ασχοληθεί με τις ιδέες του για τα κυματοσωματίδια εκκινώντας σχετικιστικούς προβληματισμούς. Ο Schrödinger ξεκίνησε επίσης με μια σχετικιστική εξίσωση για την κίνηση ενός ηλεκτρονίου, αλλά απέριψε την προσπάθεια αυτή όταν βρήκε ότι δεν κάλυπτε τα εμπειρικά δεδομένα στα άτομα. (Βλ. τη νεκρολογία του Dirac για τον Schrödinger στο Nature 189, 355-356, 1961. Επίσης το άρθρο του Dirac “The Evolution of the Physicist’s Picture of Nature”, Scientific American 208, No. 5, 45-53 (1963) και την ομιλία του στην Τεργέστη στο “From a Life of Physics”, Ιούνιος 1968).

⁹⁵ Ο Pauli μελέτησε το άτομο του υδρογόνου σε 28 σελίδες και η κομψή μέθοδος του Dirac ασχολήθηκε με τμήμα του προβλήματος σε έκταση 10 σελίδων (“Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom”, Proc. Roy. Soc. (London) A110, 561-579 (1926)).

⁹⁶ N. Bohr, “Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics”, in P.A. Schilpp’s “Albert Einstein: Philosopher-Scientist, Evanston 1949, p. 199.

⁹⁷ E. Schrödinger, Ann. Phys. (Leipzig) 79, 734-756 (1926). Το άρθρο του Schrödinger υπεβλήθη στις 8 Μαρτίου. Στις 31 Μαρτίου 1926 ο C. Eckart από το Caltech, του οποίου το ενδιαφέρον για την κβαντομηχανική προκλήθηκε από τη διάλεξη του Born στην Pasadena (χειμώνας 1925), υπέβαλλε μια άλλη τυπική απόδειξη της ισοδυναμίας διαφορικών κβαντομηχανικών σχημάτων στην Εθνική Ακαδημία (Proc. Nat. Acad. Sci. 12, 473-476 (1926). Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Phys. Rev. 28, 711-726 (1926).

προφανώς δούλευε καλά⁹⁸. Σε αντίθεση με τους ανθρώπους στο Göttingen, όμως, των οποίων η πρώτη αντίδραση ήταν ότι η κυματοσυνάρτηση Schrödinger δεν μπορούσε να έχει κάποια φυσική σημασία, ο Dirac δεν είχε καμία “φιλοσοφική” προκατάληψη εναντίον της⁹⁹. Γράφοντας τη “Θεωρία της Κβαντομηχανικής” τον Αύγουστο του 1926, ο Dirac αναφέρθηκε στην εργασία του Schrödinger¹⁰⁰. Αρχικά επισήμανε τα αποτελέσματα στα οποία είχε καταλήξει νωρίτερα, στην προσπάθειά του να λύσει το πρόβλημα των πολλών ηλεκτρονίων¹⁰¹. Εκεί η δυσκολία είχε προκύψει ως προς την εύρεση ενός κατάλληλου συνόλου “ομογενών” δυναμικών μεταβλητών. Ήταν συνδεδεμένη με την ύπαρξη ενός φαινομένου ανταλλαγής, το οποίο αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τον Heisenberg, το οποίο προέκυπτε από το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια δεν ήταν διακρίσιμα μεταξύ τους¹⁰².

Ως συνήθως, ο Dirac αρχικά αναπροσάρμοσε τη θεωρία του Schrödinger στο δικό του φορμαλισμό. Επισήμανε το γεγονός ότι ακριβώς όπως θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει τα q και p ως δυναμικές μεταβλητές, θα μπορούσε επίσης να θεωρήσει την αρνητική ενέργεια $-E$ και το χρόνο ως μεταβλητές που αντιστοιχούν σε διαφορικές σχέσεις

$$p_r = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r} \quad \text{και} \quad -E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (4)$$

Είχε ήδη εισαγάγει το βήμα αυτό λίγους μήνες νωρίτερα σε ένα άρθρο για τη “Σχετικιστική Κβαντομηχανική με μία εφαρμογή στη σκέδαση Compton”, όπου μιλούσε για “κβαντικό χρόνο” με μια άποψη για την εισαγωγή της σχετικότητας στην κβαντομηχανική¹⁰³.

Από την εξίσωση (4) κατέληξε σε δυο συμπεράσματα: πρώτον, ότι έχουν νόημα μόνο συναρτήσεις πραγματικών ολοκληρωμάτων των E και p και δεύτερον, ότι γενικά κάποιος δεν μπορεί να πολλαπλασιάσει μια εξίσωση που περιέχει τα p και E με ένα συντελεστή από το πρώτο μέλος. Ο Dirac τότε ξαναέγραψε την εξίσωση Schrödinger στη μορφή

$$F(q_r, p_r, t, E)\psi = [H(q_r, p_r, t) - E]\psi = 0 \quad (5)$$

⁹⁸ Εφόσον δεν υπήρχε καμία απόδειξη ότι οι δύο μέθοδοι ήταν ισοδύναμες, η πρώτη αντίδραση του Dirac ήταν ότι ο Schrödinger έπρεπε να ήταν λάθος.

⁹⁹ Στο Cambridge ο Charles Darwin ήταν ικανοποιημένος με την προσέγγιση που βασιζόταν στην κυματομηχανική. Οι πειραματικοί, βέβαια, ήταν χαρούμενοι με τη νέα “κατανοητή” έννοια.

¹⁰⁰ “On the Theory of Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A112, 661-677 (1926).

¹⁰¹ “The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A111, 281-305 (1926).

¹⁰² W. Heisenberg, Z. Phys. 38, 411-426 (1926). Ο Heisenberg χρησιμοποίησε στη συζήτηση την κυματομηχανική του Schrödinger.

¹⁰³ “Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering”, Proc. Roy. Soc. (London) A111, 405-423 (1926) (παρελήφθη 29 Απριλίου 1926).

Ο Dirac επισήμανε εκεί ότι προκύπτουν κάποιες δυσκολίες μεταξύ της “κβαντικής ενέργειας” E και της κβαντομηχανικής Χαμιλτονιανής, διότι η νέα μεταβλητή E όφειλε να μετατίθεται με, ας πούμε, τη μεταβλητή θέσης, ενώ η Χαμιλτονιανή δεν το κάνει. Οι ιδέες στο άρθρο αυτό, σύμφωνα με τον ίδιο τον Dirac, ήταν μάλλον “τεχνητές” και επέστρεψε στο πρόβλημα αυτό αργότερα στο πλαίσιο της θεωρίας του Schrödinger.

παρατηρώντας ότι η αυθεντική κβαντομηχανική του Heisenberg προκύπτει από μία ειδική επιλογή των ιδιοσυναρτήσεων¹⁰⁴.

Στην παράγραφο 4 του ίδιου άρθρου ο Dirac ασχολούμενος με την εξίσωση Schrödinger προχώρησε κάνοντας μια άλλη πολύ σημαντική συνεισφορά, παρέχοντας μια γενική αντιμετώπιση συστημάτων που περιέχουν αρκετά ταυτόσημα σωματίδια. Ο Dirac είπε ότι αν έχουμε ένα σύστημα με έστω δύο ηλεκτρόνια και κάποιος θεωρήσει δύο καταστάσεις (mn) ή ακριβέστερα (m(1), n(2)) και (m(2), n(1)), οι οποίες διακρίνονται μόνο από το γεγονός ότι στη δεύτερη κατάσταση τα δύο ηλεκτρόνια έχουν ανταλλαχθεί μεταξύ τους, τότε σύμφωνα με το σχήμα του και με το σχήμα του Heisenberg οι δύο καταστάσεις θα πρέπει να θεωρηθούν ως μία¹⁰⁵. Με αυτή τη διαδικασία αρίθμησης, όμως, κάποιος δεν μπορεί να περιγράψει εύκολα συναρτήσεις που είναι αντισυμμετρικές στις συντεταγμένες του ηλεκτρονίου. Η γενική έκφραση για την ιδιοσυνάρτηση των δύο σωματιδίων είναι

$$\Psi_{mn} = a_{mn} \psi_m(1)\psi_n(2) + b_{mn} \psi_m(2)\psi_n(1) \quad (6)$$

Υπάρχουν, όμως, μόνο δύο επιλογές για τους συντελεστές a και b. Είτε

$$a_{mn} = b_{mn} \quad \text{συμμετρική περίπτωση (κατανομή Bose – Einstein)} \quad (7)$$

ή

$$a_{mn} = -b_{mn} \quad \text{αντισυμμετρική περίπτωση (κατανομή Fermi – Dirac)} \quad (8)$$

Η τελευταία περίπτωση προκύπτει από την Απαγορευτική Αρχή του Pauli, η οποία ισχύει για τα ηλεκτρόνια¹⁰⁶. Στη συνέχεια προχώρησε θεωρώντας αέρια ελεύθερων σωματιδίων σε όγκο V, τα οποία υπακούουν είτε τη στατιστική Bose - Einstein ή τη στατιστική που προκύπτει από την Απαγορευτική Αρχή. Για τον αριθμό N_s των σωματιδίων στην s ομάδα (με την ίδια ενέργεια E_s) συνήγαγε

$$N_s = \frac{A_s}{e^{(\alpha + \frac{E_s}{kT})} + 1}$$

όπου

¹⁰⁴ Στην περίπτωση που η “Χαμιλτονιανή” F δεν περιέχει εκπεφρασμένα το χρόνο, τότε E είναι η ενέργεια του συστήματος και ψ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα που φέρνουν τον πίνακα H σε διαγώνια μορφή.

¹⁰⁵ Αυτό ήταν ένα παλιό ερώτημα στη στατιστική μηχανική, το οποίο είχε οδηγήσει σε μεγάλες συζητήσεις μεταξύ των ειδικών. Στις αρχές της δεκαετίας του 1920 υπήρχαν δύο ομάδες με αντίθετες απόψεις. Η μία, με εκπροσώπους τους Planck και Einstein, υποστήριζε τη μη διακρίσιμότητα των μικροσκοπικών σωματιδίων και η άλλη, με εκπροσώπους τους Ehrenfest και Schrödinger, δεν έβλεπε κάποιον apriori λόγο γι αυτό.

¹⁰⁶ W. Pauli, Z. Phys. 31, 765-783 (1925).

$$A_S = 2\pi V(2m)^{3/2} E_S^{1/2} \frac{dE_S}{(2\pi\hbar)^3} \quad (9)$$

και το α σχετίζεται με την πυκνότητα¹⁰⁷.

Η σύλληψη της νέας στατιστικής εκ μέρους του Dirac ήταν προγενέστερη της εργασίας του E. Fermi, ο οποίος είχε καταλήξει στα ίδια συμπεράσματα αρκετούς μήνες νωρίτερα. “Είχα διαβάσει το άρθρο του Fermi για τη στατιστική Fermi και το είχα ξεχάσει εντελώς. Όταν έγραψα το άρθρο μου για τις αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις, δεν αναφέρθηκα σε αυτό καθόλου. Τότε ο Fermi μου έγραψε και μου το είπε και θυμήθηκα ότι είχα προηγουμένως διαβάσει γι αυτό”¹⁰⁸. Την περίοδο που ο Dirac διάβασε το άρθρο του Fermi, δεν του φάνηκε σπουδαίο και το ξέχασε εντελώς. Λίγους μήνες αργότερα ανακάλυψε ξανά εκείνο το αποτέλεσμα και η νέα στατιστική ονομάζεται έκτοτε “στατιστική Fermi-Dirac”. Στην εργασία του ο Dirac προχώρησε περισσότερο από τον Fermi και συνέδεσε τις δύο στατιστικές με τις ιδιότητες συμμετρίας των ιδιοσυναρτήσεων. Αυτό ήταν ένα πολύ σημαντικό σημείο, το οποίο σχετιζόταν με μία βαθύτερη συζήτηση του προβλήματος των ταυτόσημων σωματιδίων. Ο Dirac δεν είχε σκεφτεί σχετικά με τις στατιστικές, μέχρι που το συγκεκριμένο πρόβλημα του έγινε “πολύ σαφές”¹⁰⁹. Όταν όμως είδε το πρόβλημα, κατέληξε αμέσως στη λύση. Σε όλο αυτό, η εξίσωση Schrödinger προφανώς τον βοήθησε πολύ και τον οδήγησε αυτόματα στο να εξετάσει τις ιδιότητες συμμετρίας μιας συνάρτησης που περιγράφει αρκετά ταυτόσημα σωματίδια. Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας στις νέες έρευνές του, η Απαγορευτική Αρχή, δεν τον είχε απασχολήσει καθόλου στο παρελθόν, αλλά όταν έπρεπε να αποφασίσει για το αν μία κυματοσυναρτηση είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική κατά την ανταλλαγή δύο ηλεκτρονικών συντεταγμένων, θυμήθηκε αμέσως τον κανόνα του Pauli.

¹⁰⁷ Ο Dirac παρατήρησε επίσης ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει φαινόμενο κορεσμού παρόμοιο με αυτό του αερίου Bose-Einstein.

¹⁰⁸ AHQP.

Το σύντομο σημείωμα του Fermi “On the Quantum Mechanics of a Perfect Monatomic Gas” παρουσιάστηκε στην Ακαδημία της Ρώμης στις 7 Φεβρουαρίου 1926. Στις 26 Μαρτίου 1926, το “Zeitschrift für Physik” έλαβε την πιο μακροσκελή έκδοση του άρθρου του “On the Quantization of the Ideal Monatomic Gas” (Rend. Lincei 3, 145-149, 1926, Z. Phys. 36, 902-912, 1926). Το τεύχος αυτό του “Zeitschrift für Physik” (τόμος 12) ήταν έτοιμο για εκτύπωση στις 11 Μαΐου 1926 και κυκλοφόρησε στα τέλη Μαΐου.

Γράφοντας στον Dirac στις 25 Σεπτεμβρίου 1926 από τη Ρώμη, ο Fermi είπε: “Αγαπητέ Κύριε. Στο ενδιαφέρον άρθρο σας “On the Theory of Quantum Mechanics” (Proc. Roy. Soc. 112, 661, 1926) έχετε προτάξει μια θεωρία του ιδανικού αερίου βασισμένη στην Απαγορευτική Αρχή του Pauli. Τώρα μια θεωρία του ιδανικού αερίου πρακτικά ταυτόσημη με τη δική σας δημοσιεύτηκε από εμένα στις αρχές του 1926 (Z. Phys. 36, 902, Lincei Rend. February 1926). Επειδή υποθέτω ότι δεν έχετε δει το άρθρο μου, σας εκλιπαρώ να το προσέξετε. Ειλικρινά δικός σας, Enrico Fermi” (αντίγραφο επιστολής στο AHQP).

¹⁰⁹ P. Ehrenfest and V. Trkal, Ann. Phys. 65, 609 (1921), E. Schrödinger, Phys. ZS 25, 41 (1924), Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) 1925, p. 434, A. Einstein, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) 1924, p.261, 1925, p. 3, 18, M. Planck, Z. Phys. 35, 155 (1925).

Συνεχίζοντας αυτό το υπέροχο άρθρο, ο Dirac ανέπτυξε τη χρονοεξαρτημένη θεωρία διαταραχών της κυματομηχανικής, ανεξάρτητα από τον Schrödinger¹¹⁰. Την εφάρμοσε σε ένα ατομικό σύστημα, θεωρώντας το πεδίο ακτινοβολίας ως μία διαταραχή και παρήγαγε την έκφραση του Einstein για την επαγόμενη εκπομπή και απέδειξε την ισότητα του συντελεστή της με αυτόν της απορρόφησης. Επισήμανε ότι για τον υπολογισμό αυθόρμητης εκπομπής χρειαζόταν λεπτομερέστερη γνώση σχετικά με τη δομή του εκπέμποντος συστήματος.

Ο Dirac εφάρμοσε την προσέγγιση του Schrödinger για τον υπολογισμό του φαινομένου Compton και κατέληξε στο νόμο για την ένταση, που ήταν το κύριο αποτέλεσμα του προηγούμενου άρθρου του (“Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering”), με ένα πιο άμεσο τρόπο¹¹¹. Με το πρόβλημα να είναι ουσιαστικά σχετικιστικό, μετασχημάτισε τις μεταβλητές θέσης x_1, x_2, x_3 και το t μέσω ενός γραμμικού κανονικού μετασχηματισμού, ο οποίος πέρα από τον παρονομαστή, είναι ταυτόσημος με το μετασχηματισμό Lorentz. Έλυσε την κυματική εξίσωση στις νέες συντεταγμένες χωρίζοντας τις μεταβλητές και έδειξε ότι η συχνότητα και η ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας είναι μικρότερη από αυτή που προβλέπει η κλασική θεωρία. Ο Dirac είχε εργαστεί με αυτά τα προβλήματα για αρκετά χρόνια. Είχε φτάσει σε ένα σημείο όπου η μέθοδός του, της ομογενοποίησης των μεταβλητών που είχε δανειστεί από την κλασική μηχανική, έμοιαζε να αποτυγχάνει. Ακριβώς εκείνη τη στιγμή είδε την εργασία του Schrödinger που του πρόσφερε το κλειδί για τη λύση. Ο Schrödinger είχε επίσης αποδείξει την ισοδυναμία του κυματομηχανικού σχήματός του με το κβαντομηχανικό σχήμα του Göttingen και του Cambridge. Ο Dirac είχε λόγο και ευκαιρία να εκφράσει την εκτίμησή του προς τον Schrödinger αρκετές φορές¹¹².

Τι απέμενε τώρα να γίνει εκτός από την εφαρμογή των νέων σχημάτων σε λεπτομερή προβλήματα; Στην πραγματικότητα υπήρχαν ακόμη αρκετά να γίνουν και ο Dirac το έκανε. Στο περίφημο άρθρο του “On the ‘Anschaulichen’ Content of Quantum-Theoretic Kinematics and Mechanics”, στο οποίο εισήγαγε τις σχέσεις απροσδιοριστίας, ο Heisenberg δεν κινήθηκε στη βάση της μεθόδου του Schrödinger με κυματοπακέτα, που είναι ο πιο απλός και άμεσος τρόπος, αλλά χρησιμοποίησε τη θεωρία μετασχηματισμών του Dirac και του Jordan, υποδεικνύοντας με αυτό ότι η θεωρία μετασχηματισμών ανήκε στα πλέον αξιόπιστα θεμέλια της κβαντικής θεωρίας¹¹³.

¹¹⁰ Η συζήτηση του Schrödinger για τη χρονοεξαρτημένη θεωρία διαταραχών περιέχεται στο τέταρτο άρθρο της σειράς “Quantization as an Eigenvalue Problem”, που παρελήφθη από το “Annalen der Physik” στις 21 Ιουνίου 1926. Το τεύχος αυτό (Ann. Phys., Leipzig, 81, 109, 1926) ήταν έτοιμο προς εκτύπωση στις 8 Σεπτεμβρίου 1926. Μία σύντομη συζήτηση για τη χρονοεξαρτημένη θεωρία διαταραχών περιεχόταν στο άρθρο των Born, Heisenberg και Jordan στην παράγραφο 1.5.

¹¹¹ “The Compton Effect in Wave Mechanics”, Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 500-507 (1926) (παρελήφθη 22 Νοεμβρίου 1926)

¹¹² Βλέπε, για παράδειγμα, τη νεκρολογία του Dirac για τον Schrödinger στο Nature 189, 355-356, 1961.

¹¹³ P. Jordan, Z. Phys. 40, 809-838 (1927), παρελήφθη 18 Δεκεμβρίου 1926.

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί είχαν ήδη παίξει σημαντικό ρόλο στις διατυπώσεις της μητρομηχανικής και της μηχανικής των αριθμών q . Στη μητρομηχανική οι μετασχηματισμοί είχαν εισαχθεί στην εργασία των τριών (Born, Heisenberg και Jordan), στην οποία είχαν επίσης χρησιμοποιήσει τη μήτρα μετασχηματισμού του διαταραγμένου συστήματος¹¹⁴. Ο Jordan ανέπτυξε περεταίρω τη μήτρα μετασχηματισμού αποδεικνύοντας ότι κάθε κανονικός μετασχηματισμός που αφήνει τις μεταθετικές σχέσεις αναλλοίωτες, μπορεί να γραφεί ως

$$P = SpS^{-1}, Q = SqS^{-1} \quad (10)$$

όπου p, q οι παλιές και P, Q οι νέες δυναμικές μεταβλητές¹¹⁵.

Η προσέγγιση του Dirac στη θεωρία μετασχηματισμών, συμπεριλαμβανομένων των μεταβλητών δράσης-γωνίας, ξεκίνησε στο τέλος του 1925. Σύντομα μετά από αυτό στράφηκε στην εξίσωση Schrödinger. “Αφού είχε αποδειχθεί η ισοδυναμία μεταξύ της θεωρίας μητρών και της κυματικής θεωρίας, μελέτησα απλώς τις εργασίες αυτές και προσπάθησα να τις βελτιώσω με ένα τρόπο, τον οποίο είχα επαναλάβει πολλές φορές στο παρελθόν. Νομίζω ότι η θεωρία μετασχηματισμών προέκυψε από εκεί”¹¹⁶. Ο Dirac έδωσε έναν απολογισμό του “παιχνιδιού του με τις εξισώσεις” σε ένα άρθρο 21 σελίδων με τίτλο “Η φυσική ερμηνεία της κβαντομηχανικής”¹¹⁷. Στην εισαγωγή εξήγησε τι εννοούσε με τη “φυσική ερμηνεία”. Αναφέρθηκε στα ερωτήματα, τα οποία θα μπορούσαν να απαντηθούν μέσω των κβαντομηχανικών σχημάτων και στη φυσική πληροφορία που θα μπορούσε να προκύψει από αυτά. Για να γίνει αυτό, τόνισε, ήταν αναγκαίο να γενικευτεί η θεωρία αναπαράστασης των μητρών, στην οποία οι σειρές και οι στήλες αναφέρονται σε οποιοδήποτε σύνολο μετατιθέμενων σταθερών ολοκλήρωσης, συμπεριλαμβανομένων των “κατά συνεχή τρόπο μεταβαλλόμενων” σταθερών. Τόνισε επίσης ότι οι συλλογισμοί του μπορούσαν να θεωρηθούν ως εξέλιξη της εργασίας του C. Lanczos¹¹⁸.

¹¹⁴ M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan, Z. Phys. 35, 557-615 (1926).

¹¹⁵ P. Jordan, Z. Phys. 37, 383-386 (1926) (παρελήφθη 27 Απριλίου 1926), Z. Phys. 38, 513-517 (1926) (παρελήφθη 6 Ιουλίου 1926).

Επιπλέον έρευνα για τις μεταβλητές δράσης-γωνίας και τους κανονικούς μετασχηματισμούς πραγματοποιήθηκε από τον F. London, Z. Phys. 37, 915-925, 40, 193-210.

Η εξίσωση (10) πιστευόταν για καιρό ότι ήταν σωστή αλλά δεν είναι, διότι υπάρχουν πολλές μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις των σχέσεων μετάθεσης.

¹¹⁶ ΑΗΘΡ, Συνέντευξη με τον Dirac, 7 Μαΐου 1963.

¹¹⁷ “The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A113, 621-641 (1927), (παρελήφθη 2 Δεκεμβρίου 1926).

¹¹⁸ C. Lanczos, Z. Phys. 35, 812-830 (1926). Η πρώτη απόπειρα για μια τέτοια γενίκευση μπορεί να βρεθεί στο άρθρο των Born, Heisenberg και Jordan, στην παράγραφο 3.3 για τα “συνεχή φάσματα”. Παρόλα αυτά, δεν ανέπτυξαν περισσότερο τις ιδέες που περιείχονταν εκεί.

Cornelius (Cornel) Lanczos (1893-1974): Ουγγροεβραίος μαθηματικός και φυσικός. Πιθανολογείται ότι ανήκε στους “The Martians”, την ομάδα διακεκριμένων επιστημόνων (κυρίως μαθηματικών και φυσικών) με ουγγροεβραϊκή καταγωγή που μετανάστευσαν από την Ευρώπη στις ΗΠΑ στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Μέλη της

Το κύριο βήμα του Dirac συνίστατο στην εισαγωγή της συνάρτησης δ ως μαθηματικό εργαλείο¹¹⁹. Η συνάρτηση δ , η οποία θεωρείται μηδενική οπουδήποτε στο πεδίο ορισμού της, εκτός από το σημείο $x = 0$, βοήθησε στη διατύπωση μητρών με συνεχείς δείκτες και στους μετασχηματισμούς τους. Οι καθοριστικές εξισώσεις είναι¹²⁰

$$\int \delta(\alpha' - \alpha'') Y(\alpha''', \alpha'') d\alpha''' = Y(\alpha', \alpha'')$$

και

$$\int \delta'(\alpha' - \alpha'') Y(\alpha''', \alpha'') d\alpha''' = \frac{\partial Y(\alpha', \alpha'')}{\partial \alpha'} \quad (11)$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης δ , ο Dirac μπόρεσε να γράψει τις εξισώσεις μετασχηματισμού για συνεχή φάσματα μεταβλητών. Εφόσον προκύπτει από την κβαντική θεωρία ότι συσχετισμένες μεταβλητές, όπως η μήτρα θέσης $q(q', q'')$ και η αντίστοιχη μήτρα ορμής $p(q', q'')$ δεν μετατίθενται, έπρεπε απλά να χρησιμοποιηθεί

$$q(q', q'') = q' \delta(q' - q'')$$

και

$$(12)$$

$$p(q', q'') = -i\hbar q' \delta'(q' - q'')$$

Στο σχήμα μητρών των Heisenberg, Born και Jordan ο μετασχηματισμός έπρεπε να φέρει τη Χαμιλτονιανή στον κύριο άξονα, δηλαδή να την καταστήσει διαγώνια, ή

$$S^{-1}HS = E, \text{ με την } E \text{ διαγώνια} \quad (13)$$

Στο νέο σχήμα αυτή η εξίσωση σήμαινε

$$H\left(q, -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) S_E(q) = E S_E(q) \quad (14)$$

μεταξύ άλλων υπήρξαν οι: Theodore von Kármán, John von Neumann, Leo Szilard, Edward Teller, Eugene Wigner, John Polanyi και George de Hevesy (ΣτΜ).

¹¹⁹ Παρόλο που η συνάρτηση δ συνδέεται εύλογα με το όνομα του Dirac, δεν ήταν ο πρώτος που την εισήγαγε στη φυσική. Την υπαινίχθηκε ο G. Kirchhoff (Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) 1882, pp.641-669, ειδικά στην 644) και επίσης προτάθηκε από τον O. Heaviside (Proc. Roy. Soc., London, A52, 504-529, 1893, A54, 105-143, 1893). Ο P. Hertz τη χρησιμοποίησε επίσης ("Statistical Mechanics", Weber-Gans' Repertorium der Physik, Vol. I/2, Leipzig 1916, p.503). Ο Dirac απέδωσε στη συνάρτηση δ μια πιο οξεία σημασία, όταν παρατήρησε: "Αυστηρά, βεβαίως, $\delta(x)$ δεν είναι μια κατάλληλη συνάρτηση του x , αλλά μπορεί να θεωρηθεί μόνο ως όριο μιας συγκεκριμένης ακολουθίας συναρτήσεων" ("The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics", p.625). Τα μαθηματικά θεμέλια των συναρτήσεων τύπου δ εδραιώθηκαν επομένως μέσω της διαισθητικής χρήσης τους εκ μέρους του Dirac. Οι εργασίες των Hadamard, Schwartz, Gelfand και της σχολής του, οδήγησαν στη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων, η οποία δεν θεωρείται ολοκληρωμένη ακόμα και μέχρι σήμερα.

¹²⁰ δ' είναι η "παράγωγος" της συνάρτησης δ . Αν συνδυαστεί με άλλη συνάρτηση αναπαράγει την παράγωγό της σε δεδομένο σημείο (α').

Εδώ το $S_E(q)$ είναι η μήτρα μετασχηματισμού, που μετασχηματίζει τη Χαμιλτονιανή στον κύριο άξονα και ταυτόχρονα διατηρεί τις μεταθετικές σχέσεις για τις κανονικές μεταβλητές¹²¹.

Η $S_E(q)$ μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ανήκουσα σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή ενέργειας E_1 και έτσι είναι ταυτόσημη με την κυματοσυνάρτηση $\psi_E(q)$ του Schrödinger. “Οι ιδιοσυναρτήσεις των κυματικών εξισώσεων του Schrödinger είναι απλά οι συναρτήσεις μετασχηματισμού για τα στοιχεία της μήτρας μετασχηματισμού, που επιτρέπουν σε κάποιον να μετασχηματίσει...σε ένα σχήμα, στο οποίο η Χαμιλτονιανή είναι μία διαγώνια μήτρα”¹²². Με αυτό τον τρόπο ο Dirac είχε παραγάγει τη διαφορική εξίσωση του Schrödinger μέσω της κβαντομηχανικής. Κάνοντάς το, ολοκλήρωσε τη φυσική απόδειξη της ταύτισης όλων των σχημάτων στη νέα κβαντική θεωρία¹²³.

Σε αυτό το άρθρο (παράγραφος 6), ο Dirac κατέληξε επίσης σε κάποιες ποσοτικές προτάσεις που προσέγγιζαν τις σχέσεις απροσδιοριστίας. Θεωρώντας μία συνάρτηση των μεταβλητών θέσης και ορμής, έδειξε ότι αυτή η συνάρτηση έπρεπε να είναι απλωμένη σε όλο το χώρο ορμής, αν η θέση δινόταν απείρως στενή. Ενώ ήταν έτοιμος να ολοκληρώσει το άρθρο αυτό στην Κοπεγχάγη, έκανε ένα σχετικό σεμινάριο. “Πιθανά δεν το παρουσίασα αρκετά καλά, ώστε να εκτιμήσουν τι είχα κάνει και πίστευαν ακόμη ότι θα έπρεπε να το επεξεργαστούν αρκετά”¹²⁴. Η επίδραση αυτού του άρθρου, το οποίο ο Dirac υπέβαλλε από την Κοπεγχάγη το Δεκέμβριο του 1926, ήταν τεράστια. Εκτός από την εισαγωγή της συνάρτησης δ , η οποία δημιουργούσε πολλά προβλήματα στους μαθηματικούς, ο Dirac είχε δημιουργήσει μια πανίσχυρη μέθοδο παρόμοια με τους κανονικούς μετασχηματισμούς της παλιάς θεωρίας του Hamilton. Ο Dirac πίστευε τώρα, εντελώς δικαιολογημένα, ότι το νέο σχήμα θα μπορούσε πράγματι να αντικαταστήσει την κλασική δυναμική.

¹²¹ Στην πραγματικότητα οι μεταβλητές θέσης μετασχηματίζονται από ένα σύστημα x σε ένα σύστημα X . Αυτό δεν φαίνεται στην εξίσωση (13).

¹²² Βλέπε “The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics”, p.635.

¹²³ Ο P. Jordan πρότεινε ανεξάρτητα μια άλλη διατύπωση της θεωρίας μετασχηματισμού, ισοδύναμης με αυτή του Dirac. Βλέπε υποσημείωση 111.

¹²⁴ Οι Heisenberg και Bohr συνέχισαν τις έντονες συζητήσεις τους και την εργασία τους μέχρι το Φεβρουάριο του 1927, όταν ο Heisenberg κατέληξε σε λεπτομερή ποσοτικά συμπεράσματα (διατυπώνοντας την Αρχή Απροσδιοριστίας) αναλύοντας διάφορα “νοητικά” πειράματα. Η θεωρία μετασχηματισμού του Dirac, βέβαια, βρήκε μια περίοπτη θέση στην ανάλυση του Heisenberg.

VI. Επισκέψεις στην Κοπεγχάγη και το Göttingen

Ο Fowler πίστευε ακράδαντα ότι ο Dirac θα έπρεπε να πάει στην Κοπεγχάγη για ένα χρόνο, αλλά ο Dirac ανησυχούσε να επισκεφτεί μια χώρα όπου δεν γνώριζε τη γλώσσα. Στην πραγματικότητα προτιμούσε να επισκεφτεί τη Γερμανία, καθώς γνώριζε λίγα Γερμανικά. Τελικά συμβιβάστηκε και αποφάσισε να περάσει μισό χρόνο στην Κοπεγχάγη και άλλο μισό στο Göttingen. Από οικονομικής άποψης το πράγμα δεν ήταν τόσο άσχημο, ιδίως εφόσον είχε την υποτροφία (1851 Exhibition Senior Research Studentship) και μια χορηγία από το Τμήμα Επιστημονικής και Βιομηχανικής Έρευνας. Το φθινόπωρο του 1926, ο Dirac έφυγε για την Κοπεγχάγη, φτάνοντας εκεί γύρω στις 10 Σεπτεμβρίου.

Η ζωή στην Κοπεγχάγη, ειδικότερα στο Ινστιτούτο του Bohr, ήταν διαφορετική από ότι στο Cambridge. Ο Dirac περνούσε τον περισσότερο χρόνο του στο Ινστιτούτο και συναντούσε νέους ανθρώπους αρκετά συχνά. Βέβαια, η μέθοδος εργασίας του δεν άλλαξε ιδιαίτερα, ως προς το ότι εργαζόταν ακόμη μόνος του. Η ανοιχτή προσωπικότητα του Bohr επηρέαζε το μέρος με το μεγάλο ενθουσιασμό του. Ήταν πολύ διαφορετικά από το Göttingen και το Cambridge, όπου η περισσότερη δουλειά στη νέα κβαντική θεωρία είχε γίνει.

“Χωρίς τον Bohr, νομίζω, δεν θα ήταν τίποτα. Ήμουν πολύ εντυπωσιασμένος, όταν τον άκουγα να μιλάει. Το να είμαι με τον Bohr, αποτελούσε μια τεράστια εμπειρία έμπνευσης. Η προσωπικότητά του με εντυπωσίαζε πολύ”¹²⁵. Ο Bohr ήταν μεγάλος διανοητής και σκεφτόταν όλα τα προβλήματα. Ο Dirac θυμάται, για παράδειγμα, το ψυχολογικό πρόβλημα που έθεσε ο Bohr για τους δύο οπλοφόρους, που σημαδεύουν ο ένας τον άλλο, αλλά κανείς δεν τολμά να πυροβολήσει. Η λύση που επεξεργάστηκε ο Bohr ήταν ότι “Αν αποφασίσεις να πυροβολήσεις και το κάνεις, θα είναι μια πιο αργή διαδικασία σε σχέση με το να πυροβολήσεις λόγω κάποιου εξωτερικού κινήτρου. Ο Bohr αγόρασε κάποια παιδικά πιστόλια και το δοκίμασε με διάφορους ανθρώπους στο Ινστιτούτο”¹²⁶. Ο Bohr είχε επίσης σκεφτεί το ψυχολογικό πρόβλημα του χρηματιστήριου. Πίστευε ότι κάποιος που σκεφτόταν πάρα πολύ την αγορά και πώληση μετοχών θα τα πήγαινε χειρότερα από κάποιον που θα αγόραζε και θα πουλούσε τυχαία”¹²⁷.

Την εποχή εκείνη, στο τέλος του 1926, ο Bohr δεν εργαζόταν πλέον ενεργά σε ειδικά προβλήματα της κβαντικής θεωρίας¹²⁸. Συζητούσε βέβαια όλα τα προβλήματα και αφιέρωνε τη

¹²⁵ Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969)

¹²⁶ P.A.M. Dirac, “The Versatility of Niels Bohr”, in “Niels Bohr: His Life and Work”, Amsterdam 1967, 306-309. (Επίσης Συζήτηση με τον Dirac, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹²⁷ P.A.M. Dirac, “The Versatility of Niels Bohr”, in “Niels Bohr: His Life and Work”, Amsterdam 1967, 306-309. (Επίσης Συζήτηση με τον Dirac, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969)

¹²⁸ Μετά την εργασία του στα προβλήματα του φάσματος του υδρογόνου και τον περιοδικό πίνακα, ο Bohr έγινε η κεντρική μορφή στη συζήτηση και διευκρίνηση των θεμελιωδών προβλημάτων της ατομικής θεωρίας. Αυτός, περισσότερο από οποιονδήποτε άλλο, αναζητούσε ενεργά μια συνεπή φιλοσοφική κατανόηση των διαφόρων προβλημάτων που προέκυψαν στην κβαντική θεωρία τη δεκαετία του 1920. Οι φιλοσοφικοί του διάλογοι με τον Einstein μάλιστα προχώρησαν πέρα από αυτό.

σκέψη του στη φυσική περιγραφή που βασιζόταν στη νέα κβαντική θεωρία. Τον απασχολούσε ακόμη αρκετά η Αρχή της Αντιστοιχίας και η ιδέα της Συμπληρωματικότητας που άρχισε να παίρνει μορφή στο μυαλό του. Παρόλο που η κβαντομηχανική, όπως αναπτύχθηκε από τη σχολή του Göttingen, τον Schrödinger και τον Dirac, είχε ήδη αντικαταστήσει την Αρχή Αντιστοιχίας ως προς την παραγωγή νέων αποτελεσμάτων, ο Bohr επέμενε ακόμη. Ο Dirac πίστευε ότι “Όταν μια ιδέα απορροφά κάποιον τόσο πολύ, εμμένει σ αυτήν για πάντα. Ακριβώς όπως ο Einstein πίστευε ότι η μη Ευκλείδεια γεωμετρία θα ήταν η απάντηση σε όλα”¹²⁹. Ο ίδιος ο Dirac δεν θεωρούσε ότι η Αρχή της Αντιστοιχίας ήταν μεγάλης σπουδαιότητας, ούτε είχε επηρεαστεί ιδιαίτερα από την ιδέα της Συμπληρωματικότητας. “Δεν παρέχει πολλές εξισώσεις που δεν ήταν διαθέσιμες πριν και πιστεύω ότι η τελευταία λέξη αναφορικά με τη σχέση μεταξύ κυμάτων και σωματιδίων δεν έχει ακόμη λεχθεί. Όταν συμβεί αυτό, οι απόψεις των ανθρώπων για τη συμπληρωματικότητα θα είναι διαφορετικές”¹³⁰. Πρέπει να σημειωθεί ως προς αυτό, ότι ο Dirac διέφερε επίσης από τους περισσότερους στην άποψή του για την Αρχή Απροσδιοριστίας. Έχει επίσης εκφράσει την άποψη ότι η σταθερά του Planck ίσως είναι μια τεχνητή και όχι μια θεμελιώδης σταθερά¹³¹.

Στην Κοπεγχάγη, ο Dirac έμενε στην “Pension Scheck” δίπλα στο δημαρχείο. Ο περίπατος πλάι στη λίμνη προς το Ινστιτούτο του έπαιρνε γύρω στα είκοσι λεπτά. Τις Κυριακές, όπως συνήθιζε, έκανε ένα μεγάλο περίπατο ή εκδρομή στην εξοχή με τον Bohr, με κάποιον άλλο ή με μεγαλύτερη ομάδα, αλλά πολύ συχνά μόνος. Πήγαινε στο Ινστιτούτο γύρω στις 9:30 το πρωί και επέστρεφε για μεσημεριανό στην πανσιόν, καθώς έτρωγε πάντοτε εκεί. Μετά το γεύμα επέστρεφε στο Ινστιτούτο. Κατά τους περιπάτους του προς και από το Ινστιτούτο είχε το χρόνο να σκεφτεί την εργασία του, μένοντας κατά κύριο λόγο μόνος του όπως πριν¹³².

Στο Ινστιτούτο ο Dirac είχε την ευκαιρία να ακούει αρκετούς ανθρώπους. Ο Heisenberg δεν ήταν εκεί την περίοδο εκείνη, αλλά μπορούσε να μιλά με τον O. Klein¹³³. Κάποιες φορές ερχόταν επίσκεψη ο Ehrenfest από το Leyden. Είχε μεγάλη επιστημονική περιέργεια και κριτικό πνεύμα και συνεισέφερε πολύ στα σεμινάρια ξεκαθαρίζοντας πράγματα, τα οποία δεν είχαν

¹²⁹ ΑΗΘΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Μαΐάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹³⁰ “Η Συμπληρωματικότητα ήταν ένα είδος φιλοσοφικής αρχής και το βρίσκω μάλλον δύσκολο να κατανοήσω φιλοσοφικές αρχές. Η αρχή του Mach, την οποία συχνά αναφέρουν κάποιοι, είναι ένα άλλο παράδειγμα - δεν κατανοώ πραγματικά τι σημαίνει. Καταλαβαίνω κάτι μόνο όταν έχω στη διάθεσή μου εξισώσεις και δεν βλέπω πώς η συμπληρωματικότητα έχει συνεισφέρει με κάποιο τρόπο στις εξισώσεις της κβαντικής θεωρίας. Απλά κάνει κάποιον να νιώθει ικανοποιημένος με την ερμηνεία της κβαντομηχανικής, με μια μάλλον περιορισμένη ερμηνεία, και να μην προσπαθεί να πάει πέρα από αυτό”. (Συζήτηση με τον Dirac, 28 Μαρτίου 1969).

¹³¹ Συζητήσεις με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968 και Μαΐάμι, Μάρτιος 1969).

¹³² Περιπατούσε όσο μακριά του άρεσε χωρίς να πληρώνει για το τραμ, ενώ μερικές φορές το έκανε μέχρι τον τερματικό σταθμό. Από εκεί επέστρεφε στην πόλη και έτσι γνώρισε την Κοπεγχάγη αρκετά καλά.

¹³³ Μιλούσε περισσότερο από κάθε άλλον με τον Oscar Klein. Ο Eugene Wigner μου είπε κάποτε για ένα γεύμα στο Princeton στο οποίο ήταν παρόντες οι Dirac, Polanyi και Wigner. Όλοι, εκτός του Dirac, συμμετείχαν στη συζήτηση. Σε μια στιγμή ο Wigner ρώτησε τον Dirac: “Paul γιατί δεν λες κάτι; Όλοι μας θα θέλαμε να ακούσουμε τις απόψεις σου”. Ο Dirac απάντησε: “Υπάρχουν περισσότεροι άνθρωποι πρόθυμοι να μιλούν παρά να ακούν”.

παρουσιάζεται κατάλληλα από τον ομιλητή¹³⁴. “Ο Ehrenfest ήταν ο πιο χρήσιμος άνθρωπος στα σεμινάρια”¹³⁵.

Ο ευρύτερος ορίζοντας που ανοίχτηκε για τον Dirac στην Κοπεγχάγη τον βοήθησε, όχι μόνο να ολοκληρώσει την εργασία για την ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας, αλλά και για να ξεκινήσει τη διεύρυνση του σχήματος της κβαντομηχανικής.

Το άρθρο “The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation”, που κοινοποιήθηκε από τον Bohr στο “Proceedings of the Royal Society”, αντιμετώπιζε το πρόβλημα της κατασκευής μιας σχετικιστικής κβαντικής θεωρίας¹³⁶. Αλλά οι εμπλεκόμενες δυσκολίες ήταν τόσο μεγάλες, ώστε ο Dirac θεώρησε ότι άξιζε τον κόπο να αναζητήσει μια προσέγγιση όχι αυστηρά σχετικιστική¹³⁷. Ως σύστημα θεώρησε ένα άτομο σε αλληλεπίδραση με ένα πεδίο ακτινοβολίας. Προκειμένου να έχει ένα διακριτό πλήθος βαθμών ελευθερίας για το τελευταίο, έκλεισε το σύστημα σε ένα πεπερασμένο κουτί και ανέλυσε την ακτινοβολία στις Fourier συνιστώσες της¹³⁸. Στη συνέχεια, αναπτύσσοντας την κυματοσυνάρτηση του αλληλεπιδρώντος συστήματος (δηλαδή της ακτινοβολίας και του ατόμου, με το τελευταίο να προσεγγίζεται από ένα διπολικό δυναμικό) σε αυτές της ελεύθερης ακτινοβολίας, επέλεξε τις παρακάτω δυναμικές μεταβλητές

$$b_r = N_r^{1/2} e^{-i\theta_r/\hbar}, \quad b_r^* = N_r^{1/2} e^{i\theta_r/\hbar} \quad (15)$$

Το (*) εδώ δηλώνει τον Ερμιτιανό συζυγή, N_r είναι το απόλυτο τετράγωνο του συντελεστή Fourier a_r και θ_r είναι μια μεταβλητή φάσης συζυγής του N_r . Για τα b θεώρησε τις σχέσεις μετάθεσης

$$b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1 \quad (16)$$

με όλα τα άλλα μηδενικά. Το N_r παίρνει μόνο ολοκληρώσιμες τιμές, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Ο Dirac αναγνώρισε τη φύση των b και b^* ως τελεστών εξαϋλωσης και γένεσης, δείχνοντας ότι η αλληλεπίδραση του ατόμου με την ακτινοβολία προκαλεί μεταβάσεις φωτονίων με ενέργεια E_r σε φωτόνια ενέργειας E_s . Υπολογίζοντας τα στοιχεία μήτρας για αυτές

¹³⁴ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

Υπήρχε ένα είδος ομοιότητας μεταξύ του Ehrenfest και του Bohr. Ο δεύτερος διέκοπτε συχνά τον ομιλητή σε ένα σεμινάριο, “όχι για να τον κρίνει, αλλά για να μάθει”.

¹³⁵ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹³⁶ “The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation”, Proc. Roy. Soc. (London), A114, 243-265, 1927 (παρελήφθη 2 Φεβρουαρίου 1927).

Στη συλλογή άρθρων του J. Schwinger “Quantum Electrodynamics” (Dover, New York, 1958), αυτό το άρθρο του Dirac είναι το πρώτο.

¹³⁷ Ο λόγος είναι ότι ο χρόνος δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί συμμετρικά ως προς τις μεταβλητές θέσης, αλλά μόνο ως αριθμός c .

¹³⁸ Αυτό είχε ήδη γίνει για ελεύθερη ακτινοβολία στο άρθρο των Born, Heisenberg και Jordan. Η κβάντωση του ταλαντωτή οδήγησε στην κβαντική φύση της ακτινοβολίας.

τις μεταβάσεις, ο Dirac παρήγαγε τους συντελεστές A και B του Einstein ως συναρτήσεις του δυναμικού αλληλεπίδρασης¹³⁹.

Ένα χρόνο μετά από αυτό το πρώτο άρθρο σχετικά με τη “δεύτερη κβάντωση” οι P. Jordan και E. Wigner ανέπτυξαν ένα παρόμοιο σχήμα για τα πεδία Fermi¹⁴⁰. Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί γιατί δεν κινήθηκε ο Dirac προς αυτή την κατεύθυνση: αφενός, ήθελε να ασχοληθεί με το πρόβλημα ακτινοβολίας και συνεπώς έπρεπε να εφαρμόσει τη στατιστική Bose. Αφετέρου, δεν μπορούσε ακόμα να ασχοληθεί με το πεδίο του ηλεκτρονίου με τον ίδιο σχετικιστικό τρόπο όπως με το πεδίο του φωτονίου¹⁴¹.

Σύντομα μετά τα Χριστούγεννα του 1926 ο Dirac πήγε από την Κοπεγχάγη στο Göttingen. Καθ’ οδόν σταμάτησε στο Αμβούργο, για να παρακολουθήσει μία συνάντηση της Γερμανικής Ακαδημίας Φυσικής, όπου έμαθε ότι τα πειράματα στη φασματοσκοπία δούλευαν ακόμη πολύ καλά, αναφορικά με τα multiplets και τις εντάσεις τους. Στο Αμβούργο επίσης πιθανότατα συνάντησε τον Pauli, τον οποίο είχε γνωρίσει προσωπικά στην Κοπεγχάγη. Οι δυο τους τα πήγαιναν πάντοτε αρκετά καλά, ιδιαίτερα επειδή ο Pauli ήταν ικανός να αντιληφθεί την άποψη του Dirac γρηγορότερα απ’ ότι οι περισσότεροι άνθρωποι και ο Dirac είχε την εντύπωση ότι ο Pauli εκτιμούσε την επιστημονική του στάση περισσότερο ίσως και από αυτή του Heisenberg. Είναι πιθανό να συνάντησε επίσης τον Sommerfeld στο Αμβούργο τότε ή να τον γνώρισε κατά τη διάρκεια της επίσκεψης του δεύτερου κάποια στιγμή αργότερα.

Η ατμόσφαιρα στο Göttingen ήταν ξανά πολύ διαφορετική από αυτή που έζησε στην Κοπεγχάγη. Εκεί ο Dirac είχε μια στενή και πολύ φιλική σχέση με τον Bohr, αλλά στο Göttingen δεν υπήρχε κανείς, με τον οποίο θα μπορούσε να αναπτύξει μια τέτοια επαφή. Συναντούσε συχνά τον Born και τον Franck και γνώρισε τους μαθηματικούς D. Hilbert, R. Courant και πιθανά τον H. Weyl¹⁴². Στο σύνολό του το Göttingen ήταν μια πιο μαθηματική σχολή σε σχέση με την Κοπεγχάγη και η φυσική που παραγόταν εκεί αντανakλούσε το γεγονός αυτό. Μεταξύ των νέων εκεί, ο Dirac συναναστρεφόταν συχνά τον J.R. Oppenheimer. Τα δωμάτιά τους ήταν στο ίδιο σπίτι (το οικοτροφείο του Günther Cario) και συχνά έκαναν μεγάλους περιπάτους μαζί¹⁴³. Στο Göttingen γνώρισε επίσης τον Ρώσο φυσικό I. Tamm και μαζί με άλλους έκαναν κάποτε

¹³⁹ Στο προηγούμενο άρθρο του (“On the Theory of Quantum Mechanics”), ο Dirac είχε ήδη ασχοληθεί με τους συντελεστές B.

¹⁴⁰ P. Jordan and E. Wigner, Z. Phys. 47, 631 (1928).

¹⁴¹ Στο τέλος του άρθρου “The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation”, ο Dirac ευχαρίστησε τον Bohr για τις συζητήσεις τους. Ο Bohr έστρεψε την προσοχή του Dirac στο πρόβλημα της κβάντωσης πεδίου και έθεσε επιπλέον ερωτήματα, στα οποία ο Dirac επέστρεψε αργότερα.

¹⁴² Την άνοιξη του 1926 ο Weyl είχε εργαστεί στενά με τον Schrödinger στη Ζυρίχη.

¹⁴³ Ο Günther Cario ήταν πειραματικός φυσικός στο Göttingen. Η οικογένειά του ήταν εύπορη κάποτε, αλλά η οικονομική κρίση τους κατέστρεψε. Η οικογένεια διέθετε αν τεράστιο σπίτι με μεγάλο κήπο κοντά στο κέντρο του Göttingen και συνήθιζαν να φιλοξενούν επισκέπτες, ιδιαίτερα Αμερικανούς. Μεταξύ αυτών που έμειναν στο σπίτι του Cario ήταν οι Condon, Dirac, Karl Compton και Oppenheimer. (Συζήτηση με τον Dirac, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

ορειβασία στα βουνά Harz. Ο Dirac συνέχιζε να κάνει την αγαπημένη του άσκηση, περπάτημα και κολύμπι - αργότερα έκανε επίσης λίγη αναρρίχηση. Μπορούσε να κάνει όλα αυτά με παρέα και να σκέφτεται επίσης τις ιδέες του, όσο βρισκόταν με τους άλλους.

Ο Dirac υπέβαλλε προς δημοσίευση δύο άρθρα από το Göttingen. Το πρώτο, "The Quantum Theory of Dispersion", αντιμετώπιζε ένα πρόβλημα, το οποίο στην εργασία των Heisenberg και Kramers είχε προετοιμάσει το έδαφος για την κβαντομηχανική¹⁴⁴. Στη θεωρία μητρώων το πρόβλημα αυτό είχε αντιμετωπιστεί κατ' αναλογία με την κλασική θεωρία. Ο Dirac πίστευε ότι η κβαντική θεωρία ήταν τώρα τόσο καλά εδραιωμένη, ώστε θα μπορούσε κάποιος να εγκαταλείψει τη σύνδεση που προσέφερε η Αρχή Αντιστοιχίας και να χρησιμοποιήσει τη θεωρία αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμων και ακτινοβολίας, την οποία είχε μόλις αναπτύξει ("The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation"). Η δυσκολία στην αντιμετώπιση φαινομένων σχετικών με απορρόφηση, εκπομπή και σκέδαση ακτινοβολίας βρισκόταν στην επιλογή του ηλεκτρικού πεδίου για το άτομο. Ο Dirac συμπέρανε ότι το μοντέλο του διπολικού πεδίου που είχε χρησιμοποιήσει για το άτομο θα έδινε συνεπή αποτελέσματα για τη σκέδαση και το συντονισμό ακτινοβολίας σε προσέγγιση πρώτης τάξης. Παρόλα αυτά, αν προσπαθούσε κάποιος να υπολογίσει το εύρος μιας φασματικής γραμμής στη βάση του μοντέλου αυτού, θα του προέκυπτε ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Το δεύτερο άρθρο του από το Göttingen είχε τίτλο "On the Quantum Mechanics of Scattering Processes"¹⁴⁵. Ο Born είχε διαπραγματευτεί το θέμα στην κυματομηχανική και είχε οδηγηθεί στη στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης¹⁴⁶. Ο Dirac χρησιμοποίησε επίσης την κυματική εξίσωση, την οποία είχε "έντιμα" παραγάγει από την κβαντομηχανική στο προηγούμενο άρθρο του ("The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics"), αλλά τώρα τη διατύπωσε στο χώρο ορμής. Εφάρμοσε τη μέθοδό του στην απορρόφηση της ακτινοβολίας από άτομα, αντιμετωπίζοντας έτσι ένα παλιό δικό του πρόβλημα υπό το πνεύμα του Born.

Από τις 24 έως τις 29 Οκτωβρίου 1927, ο Dirac παρακολούθησε το 5^ο Συνέδριο Φυσικής στο Solvay με θέμα "Ηλεκτρόνια και Φωτόνια", μαζί με τους υπόλοιπους αρχιτέκτονες της παλιάς και νέας κβαντικής θεωρίας, όπως οι Planck, Einstein, Bohr, Ehrenfest, Debye, Born, Heisenberg, Kramers, Compton, de Broglie, Pauli και Schrödinger. Μεταξύ των επιφανών, αυτοί που απουσίαζαν ήταν ο Sommerfeld και ο Jordan. Ο Dirac συνεισέφερε στις συζητήσεις του

¹⁴⁴ "The Quantum Theory of Dispersion", Proc. Roy. Soc. (London) A114, 710-728 (1927) (παρελήφθη 4 Απριλίου, 1927).

Βλέπε, για παράδειγμα, R. Ladenburg "The Quantum Theoretical Number of Dispersion Electrons", Z. Phys. 4, 451 (1921), H.A. Kramers "The Law of Dispersion and Bohr's Theory of Spectra", Nature 113, 673 (1924), "The Quantum Theory of Dispersion", Nature 114, 310 (1924), H.A. Kramers and W. Heisenberg "On the Dispersion of Radiation by Atoms", Z. Phys. 31, 681 (1925), W. Kuhn "On the Total Intensity of Absorption Lines Emanating from a Given State", Z. Phys. 33, 408 (1925).

¹⁴⁵ "Über die Quantenmechanik der Stoßvorgänge", Z. Phys. 44, 585-595 (1927) (παρελήφθη 28 Ιουνίου, 1927).

¹⁴⁶ M. Born, Z. Phys. 37, 863-867 (1926), 38, 803-827 (1926).

Συνεδρίου. Μετά τον απολογισμό των Born και Heisenberg για την “Κβαντομηχανική”, στον οποίο η έμφαση βρισκόταν στην άποψη του Göttingen, ο Dirac τόνισε την αντιστοιχία μεταξύ κλασικής και κβαντικής μηχανικής, η οποία εμφανίζεται με τη χρήση μεταβλητών δράσης-γωνίας¹⁴⁷. Ξανά, στη γενική συζήτηση που ακολούθησε την αναφορά του Bohr για το “Κβαντικό Αξίωμα” (“The Quantum Postulate”), ο Dirac σχολίασε εκτενώς τις ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των κλασικών και κβαντικών περιγραφών των φυσικών διαδικασιών¹⁴⁸. Η κβαντική θεωρία, είπε, περιγράφει μια κατάσταση μέσω μιας χρονοεξαρτημένης κυματοσυνάρτησης ψ , η οποία μπορεί να αναπτυχθεί σε δεδομένη στιγμή t_1 σε μια σειρά που περιέχει κυματοσυναρτήσεις ψ_n με συντελεστές c_n . Οι κυματοσυναρτήσεις ψ_n είναι τέτοιες, ώστε να μην συμβάλλουν σε μια στιγμή $t > t_1$. Τώρα η Φύση κάνει μια επιλογή κάποια στιγμή αργότερα και αποφασίζει υπέρ της κατάστασης ψ_n με πιθανότητα $|c_n|^2$. Αυτή την επιλογή δεν μπορούμε να την αρνηθούμε και καθορίζει τη μελλοντική εξέλιξη της κατάστασης¹⁴⁹. Ο Heisenberg αντιτάχθηκε στην άποψη αυτή υποθέτοντας ότι δεν υπήρχε νόημα να λέμε ότι η Φύση επιλέγει και ότι είναι η ίδια μας η παρατήρηση που μας παρέχει την κατάρρευση στην ιδιοσυνάρτηση¹⁵⁰. Αυτό που ο Dirac ονόμαζε “επιλογή της Φύσης”, ο Heisenberg προτιμούσε να το αποκαλεί “παρατήρηση”, δείχνοντας την προτίμησή του στη γλώσσα που αυτός και ο Bohr είχαν αναπτύξει μαζί¹⁵¹.

¹⁴⁷ Βλέπε “Électrons et Photons”, Rapports et Discussions du Cinquième Conseil de Physique, Gauthier-Villars, Paris 1928, p. 182.

¹⁴⁸ “Électrons et Photons”, 258-263.

¹⁴⁹ Αυτή είναι ακριβώς η ιδέα της κατάρρευσης του κυματοπακέτου, που σημειώθηκε αμέσως από τον Born και συζητήθηκε επίσης ανεξάρτητα από τον von Neumann.

¹⁵⁰ “Électrons et Photons”, 264-265.

¹⁵¹ Το Νοέμβριο του 1927, κατά την επιστροφή του στο Cambridge, ο Dirac εξελέγη Fellow του St. John’s College και συνέχισε να οικοδομεί στα στέρεα θεμέλια που είχε θέσει στην κβαντική θεωρία. Ταξίδεψε στις ΗΠΑ και την Ιαπωνία μεταξύ 1929-30. Κατά τη διάρκεια της πεντάμηνης παραμονής του στις ΗΠΑ, ο Dirac έκανε διαλέξεις στην κβαντομηχανική στο Michigan και το Wisconsin. Την ίδια περίπου εποχή ο Heisenberg επίσης ταξίδευε και έκανε διαλέξεις στις ΗΠΑ. (Το βιβλίο του Heisenberg “The Physical Principles of Quantum Theory”, Chicago, 1930, προέκυψε από τις διαλέξεις του στο πανεπιστήμιο του Chicago). Κατά την επιστροφή τους στην Ευρώπη, μέσω Ιαπωνίας, οι Dirac και Heisenberg διέσχισαν μαζί τον Ειρηνικό με ένα γιαπωνέζικο πλοίο. Είχαν αρκετό χρόνο να στοχαστούν και να συζητήσουν τις απόψεις τους για τη Φύση: γνωρίστηκαν καλά και έγιναν καλοί φίλοι. (Βλέπε W. Heisenberg, “Physics and Beyond”, 100-102). Ανακάλυψαν ότι είχαν πολλά κοινά - μεταξύ άλλων απεχθάνονταν και οι δύο τους δημοσιογράφους. Καθώς πλησίαζαν στη Yokohama, εμφανίστηκε ένας δημοσιογράφος σε συνοδό σκάφος, επιβιβάστηκε στο πλοίο και ήθελε να τους πάρει συνέντευξη. Σύντομα άρχισε να το κάνει με τον Heisenberg, αλλά ο Dirac κατάφερε να τον αποφύγει. Οι Dirac και Heisenberg στέκονταν στην κουπαστή, όταν εμφανίστηκε ο δημοσιογράφος και είπε στον Heisenberg: “έχω ψάξει τον Dirac σε όλο το πλοίο, αλλά δεν μπορώ να τον βρω”. Ο Heisenberg δεν του είπε ότι ο Dirac στεκόταν ακριβώς δίπλα του. “Ήταν πολύ πιστός. Αυτό που του είπα ήταν: ‘αν θέλετε, μπορείτε να μου κάνετε κάποιες ερωτήσεις για τον Dirac και θα προσπαθήσω να τις απαντήσω’. Έτσι στεκόμουν εκεί, κοιτάζοντας προς διαφορετική κατεύθυνση, παριστάνοντας τον ξένο και ακούγοντας τον Heisenberg να με περιγράφει στο δημοσιογράφο. Πέρασαμε πολύ καλά ταξιδεύοντας στην Ιαπωνία”. (Στον πρόλογο του Dirac για την ομιλία του Heisenberg στο “Από μια ζωή Φυσικής”, Τεργέστη, 18 Ιουνίου 1968). Μετά από ένα μήνα συνύπαρξης στην Ιαπωνία χώρισαν, ο Heisenberg συνέχισε για την Ινδία και ο Dirac επέστρεψε στο Cambridge μέσω Βλαδιβοστόκ και Μόσχας.

VII. Σχετικιστική κβαντομηχανική

“Θυμάμαι κάποτε όταν ήμουν στην Κοπεγχάγη, ότι ο Bohr με ρώτησε πάνω σε τι εργαζόμουν και του είπα ότι προσπαθούσα να φτάσω σε μια επιτυχή σχετικιστική θεωρία του ηλεκτρονίου. Και ο Bohr είπε: “Όμως οι Klein και Gordon το έχουν κάνει ήδη!”. Η απάντηση αυτή αρχικά μάλλον με ενόχλησε. Ο Bohr φαινόταν αρκετά ικανοποιημένος με τη λύση του Klein αλλά εγώ όχι, εξαιτίας του ότι οδηγούσε σε αρνητικές πιθανότητες. Συνέχισα να ασχολούμαι με αυτό, ανησυχώντας για το πώς θα προέκυπτε μια θεωρία που θα έδινε μόνο θετικές πιθανότητες”¹⁵².

Το 1926 ο Oscar Klein είχε παραγάγει μια σχετικιστική εξίσωση για ένα βαθμωτό πεδίο, εισάγοντας κβαντικούς τελεστές για την ορμή και την ενέργεια στην εξίσωση¹⁵³

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (17)$$

Η προκύπτουσα εξίσωση ανακαλύφθηκε επίσης ανεξάρτητα από τον Gordon στο Αμβούργο και τώρα αναφέρεται ως εξίσωση Klein-Gordon¹⁵⁴. Οι δυσκολίες που ενοχλούσαν τον Dirac σχετίζονταν με δύο ερωτήματα. Πρώτον, αν κάποιος χρησιμοποιούσε την εξίσωση Klein-Gordon για ένα σωματίδιο και ερμήνευε την έκφραση

$$\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial t} = \rho(x) \quad (18)$$

Ο Heisenberg μου είπε κάποτε μια γοητευτική ιστορία από αυτό το ταξίδι στον ωκεανό. Ο Dirac καθόταν συχνά σε ένα γωνιακό τραπέζι, με ένα ποτήρι νερό ή ένα ελαφρύ ποτό, καθώς ο Heisenberg συμμετείχε στους χορούς που διοργάνωνε το πλοίο. Κάποτε, στο τέλος ενός χορού, ο Heisenberg επέστρεψε στο τραπέζι τους και ο Dirac τον ρώτησε: “Heisenberg γιατί χορεύεις;” Ο Heisenberg απάντησε: “Όταν ένα κορίτσι είναι καλό, μου αρέσει να χορεύω μαζί του” και συνέχισε στον επόμενο χορό. Όταν επέστρεψε ξανά μετά από λίγο, ο Dirac είπε: “Πώς ξέρεις ότι ένα κορίτσι είναι ‘καλό’, πριν χορέψεις μαζί του;”

¹⁵² Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁵³ O. Klein, Z. Phys. 37, 895 (1926). Στην πραγματικότητα αυτή η εξίσωση είχε ήδη παραχθεί από τον Schrödinger το 1925, αλλά δεν τη δημοσίευσε. Στο άρθρο του “The Evolution of the Physicist’s Picture of Nature” (Scientific American 208, No. 5, 45-53 (1963)), ο Dirac έγραψε: “Ο Schrödinger έφτασε στην εξίσωση μέσω καθαρής σκέψης, αναζητώντας κάποια όμορφη γενίκευση των ιδεών του de Broglie και όχι παρακολουθώντας την πειραματική ανάπτυξη του θέματος, όπως έκανε ο Heisenberg”.

“Ας αναφέρω την ιστορία που άκουσα από τον Schrödinger για το πώς, όταν αρχικά συνέλαβε την ιδέα για αυτή την εξίσωση, στράφηκε αρχικά στη συμπεριφορά του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου και στη συνέχεια τα αποτελέσματά του δεν συμφωνούσαν με το πείραμα. Η ασυμφωνία εμφανίστηκε επειδή εκείνη την εποχή δεν ήταν γνωστό ότι το ηλεκτρόνιο διέθετε spin. Αυτό, βέβαια, αποτέλεσε μεγάλη απογοήτευση για τον Schrödinger και τον έκανε να εγκαταλείψει το εγχείρημα για κάποιους μήνες. Μετά πρόσεξε ότι αν εφάρμοζε τη θεωρία με ένα πιο προσεγγιστικό τρόπο, αγνοώντας τις λεπτομέρειες που επέβαλλε η σχετικότητα, η εργασία του ήταν σε συμφωνία με το πείραμα. Δημοσίευσε το πρώτο του άρθρο με μόνη αυτή τη χονδρική προσέγγιση και με αυτό τον τρόπο η κυματική του εξίσωση παρουσιάστηκε στον κόσμο. Στη συνέχεια, βέβαια, όταν οι άνθρωποι έμαθαν πώς να λαμβάνουν σωστά υπόψη το spin του ηλεκτρονίου, η ασυμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή της σχετικιστικής εξίσωσης Schrödinger και των πειραμάτων εξαφανίστηκε εντελώς”.

¹⁵⁴ W. Gordon, Z. Phys. 40, 117 (1926). Η εξίσωση που παρήγαγε ο Schrödinger, και αυτή που προτάθηκε από τον Klein, περιείχε έναν όρο που λάμβανε υπόψη την αλληλεπίδραση με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. (Ο V. Fock επίσης παρήγαγε την ίδια εξίσωση. Z. Phys. 38, 242, 38, 226 (1926)).

ως την πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου σε κάποιο σημείο, τότε θα μπορούσε να προκύψει αρνητική πιθανότητα¹⁵⁵. Δεύτερον, ο Dirac είχε ήδη στήσει στη γενική της μορφή τη θεωρία μετασχηματισμών, που ήταν ένα πανίσχυρο εργαλείο και πίστευε ότι όχι μόνο ήταν σωστή, αλλά έπρεπε να διατηρηθεί και να εναρμονιστεί με τη σχετικότητα. Για την πραγματοποίηση του τελευταίου στόχου χρειαζόταν μια εξίσωση χρονικά γραμμική.

Ο Dirac άρχισε “να παίζει μάλλον με τις εξισώσεις παρά να προσπαθήσει να εισαγάγει τη σωστή φυσική ιδέα”. “Μεγάλο μέρος της δουλειάς μου είναι απλά να παίζω με τις εξισώσεις και να ελέγχω τι προκύπτει από αυτές. Η Δεύτερη Κβάντωση προέκυψε από παιχνίδι με τις εξισώσεις... Είναι συνήθειά μου το παιχνίδι με τις εξισώσεις, αναζητώντας απλά μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες μπορούν να μην έχουν καμία φυσική σημασία”¹⁵⁶. Με τον όρο “εισάγοντας τις σωστές φυσικές ιδέες” ο Dirac εννοούσε την ιδέα του σπιν. Το σπιν του ηλεκτρονίου είχε ήδη προταθεί από τους Uhlenbeck και Goudsmit το 1925, προκειμένου να εξηγηθεί η διπλή δομή του φάσματος ενός ηλεκτρονίου χωρίς την “υπόθεση μη μηχανικού συνδέσμου”¹⁵⁷. Ο Pauli είχε αναπτύξει περεταίρω τη θεωρία του ιδιοστρεφόμενου ηλεκτρονίου και περιέγραψε το ηλεκτρόνιο μέσω μιας κυματοσυνάρτησης δύο συνιστωσών, η οποία μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να εξηγηθούν τα εμπειρικά φασματικά δεδομένα με μια μη σχετικιστική εξίσωση Schrödinger¹⁵⁸.

Η πρόθεση του Dirac ήταν να προχωρήσει πέρα από μια τέτοια προσέγγιση. Ένα βαθμωτό γινόμενο στις τρεις διαστάσεις μπορούσε να σχηματιστεί από τις μήτρες σ του Pauli και την ορμή και ήθελε να το επεκτείνει στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Μετά από αρκετές εβδομάδες συγκεντρωμένης προσπάθειας ανακάλυψε την απλή λύση, ότι θα μπορούσε να το κάνει γενικεύοντας τις 2×2 μήτρες σ σε 4×4 μήτρες, τις οποίες ονόμασε μήτρες γ ¹⁵⁹. Από τη γενίκευση της άλγεβρας σ προέκυψε εύλογα ότι οι μήτρες γ έπρεπε να είναι αντισυμμετρικές. Κατά την κατασκευή της εξίσωσης ο Dirac είχε εργαστεί απουσία κάποιου πεδίου¹⁶⁰. Η ομοιογένεια του χώρου και του χρόνου επέβαλλε οι συντελεστές των ορμών να είναι ανεξάρτητες του χώρου και του χρόνου και κατέληξε στην

¹⁵⁵ Εφόσον η ψ αναφέρεται σε ένα σύνθετο πεδίο Klein-Gordon, σήμερα προτιμάμε να αποκαλούμε το $\rho(x)$ πυκνότητα φορτίου και τότε η $\psi(x)$ περιγράφει τόσο τα σωματίδια όσο και τα αντισωματίδια, αλλά αυτή η δυνατότητα δεν ήταν γνωστή τότε.

¹⁵⁶ Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁵⁷ G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **13**, 953-954 (1925). Αναφέρθηκαν στην εισαγωγή ενός επιπλέον κβαντικού αριθμού για τα ηλεκτρόνια από τον Pauli (*Z. Phys.* **31**, 765-785 (1925)).

¹⁵⁸ W. Pauli, “Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons”, *Z. Phys.* **37**, 263 (1926).

¹⁵⁹ Ο Weyl επεσήμανε αργότερα ότι μια τέτοια επέκταση δεν θα ήταν απαραίτητη στην περίπτωση σωματιδίων με μηδενική μάζα ηρεμίας, διότι τότε μια σχετικιστική κυματοσυνάρτηση δύο συνιστωσών υπάρχει στην πρώτη τάξη ορμής. (H. Weyl, *Z. Phys.* **56**, 330-352 (1929)). Η ανάγκη για επιπλέον συνιστώσες δεν ήταν εντελώς σαφής στον Dirac, όταν επιχειρούσε να κατασκευάσει την εξίσωσή του. (Συζήτηση με τον Dirac, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁶⁰ “The Quantum Theory of the Electron” Part I, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A117**, 610-624 (1928) (παρελήφθη 2 Ιανουαρίου 1928).

$$(i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} p_{\mu} + mc) \psi = 0 \quad (19)$$

όπου

$$\gamma_{\mu}^2 = 1 \quad \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}$$

Στο ίδιο άρθρο, που παρελήφθη από τον εκδότη στις 2 Ιανουαρίου 1928, εισήγαγε στη συνέχεια ένα αυθαίρετο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και αντικατέστησε τις συνιστώσες της τετραορμής με μια σχετικιστική επέκταση της εξίσωσης (2). Τέλος, αντιμετώπισε την κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα κεντρικά συμμετρικό πεδίο που ανέμενε να περιγράφει η εξίσωσή του, παράγοντας μια περιγραφή κάποιων από τις σχέσεις που ικανοποιούνταν από το φάσμα του υδρογόνου.

Στη δεύτερη συνεισφορά του για την “Κβαντική Θεωρία του Ηλεκτρονίου”, που υπεβλήθη ένα μήνα αργότερα από το πρώτο μέρος του άρθρου, ο Dirac προχώρησε στον υπολογισμό των καταστάσεων του ατόμου του υδρογόνου με τη νέα θεωρία του¹⁶¹. Ξεκίνησε το άρθρο αυτό δίνοντας την απόδειξη ότι “η μεταβολή στην πιθανότητα να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε δεδομένο όγκο μια δεδομένη στιγμή είναι ίση με την πιθανότητα να έχει διασχίσει το σύνορο. Αυτή η απόδειξη... είναι αναγκαία πριν να μπορεί κάποιος να συνάγει ότι η θεωρία θα δώσει συνεπή αποτελέσματα, τα οποία είναι αναλλοίωτα στους μετασχηματισμούς Lorentz”¹⁶².

Τα αποτελέσματα της νέας θεωρίας συνοψίστηκαν αργότερα σε μία διάλεξη, την οποία παρουσίασε ο Dirac στην “Leipziger Universitätswoche” (εβδομάδα πανεπιστημίου της Λειψίας) τον Ιούνιο του 1928¹⁶³. Από τη θεωρία του προέκυπτε ότι στα φάσματα αλκαλίων το

ηλεκτρόνιο θα έπρεπε να έχει σπιν της τάξης του $\frac{1}{2} \hbar$. Η νέα ταξινόμηση των φασμάτων

γινόταν με βάση την ολική στροφορμή, που είναι το άθροισμα του εσωτερικού σπιν και την τροχιακής στροφορμής. Οι κανόνες επιλογής δεν άλλαζαν. Η νέα θεωρία παρήγαγε επίσης την εξίσωση λεπτής υφής του Sommerfeld¹⁶⁴. Ο ίδιος ο Dirac είχε σκεφτεί ότι κάποιος θα μπορούσε να επιτύχει μόνο μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσής του, αλλά οι Gordon και Darwin

¹⁶¹ “The Quantum Theory of the Electron” Part II, Proc. Roy. Soc. (London), A118, 351-361 (1928) (παρελήφθη 2 Φεβρουαρίου 1928).

¹⁶² “The Quantum Theory of the Electron” Part II, 352. Για την πιθανότητα επέλεξε το $\psi^* \psi$.

¹⁶³ “Über die Quantentheorie des Elektrons”, Phys. Zeitschr. 29, 561-563 (1928).

Οι P. Debye και W. Heisenberg είχαν ήδη αναλάβει τις σχετικές θέσεις καθηγητή στη Λειψία και οργάνωσαν μαζί ένα συνέδριο για την “Κβαντική Θεωρία και Χημεία”. Μεταξύ των ομιλητών ήταν επίσης ο W. Kossel (μέγεθος κρυστάλλων), ο C.N. Hinshelwood (χημική κινητική), ο F. London (χημικοί δεσμοί) και ο A. Eucken (θερμική αγωγιμότητα στα στερεά).

¹⁶⁴ A. Sommerfeld, Ann. Phys. (Leipzig) 51, 1 (1916).

κατέληξαν ανεξάρτητα σε αξιοσημείωτα ακριβή αποτελέσματα στη βάση της θεωρίας του¹⁶⁵. “Πίστευα ότι αν πλησίαζα κάπως με την προσεγγιστική μέθοδο, θα ήμουν πολύ ευχαριστημένος. Θα με τρόμαζε πολύ η ιδέα να το αντιμετωπίσω με ακρίβεια, διότι θα μπορούσε να δώσει ατυχή αποτελέσματα και τότε ίσως θα έπρεπε να εγκαταλειφθεί η όλη θεωρία”¹⁶⁶. Κατά τη διάλεξή του στη Λειψία τόνισε επίσης το πρόβλημα που τον είχε απασχολήσει περισσότερο. Αν κάποιος έγραφε την κυματική εξίσωση με $-e$ αντί για e (το φορτίο του ηλεκτρονίου), θα προέκυπτε κάτι εντελώς καινούριο και υπέθεσε ότι αυτό ίσως αναφερόταν στο πρωτόνιο. Παρόλα αυτά, η εξίσωση δεν το προέβλεπε. Συμπέρανε τότε, ότι αν δεν υπήρχαν μεταπτώσεις μεταξύ των δύο λύσεων – με $-e$ και με e – της κυματικής εξίσωσης, δεν θα γινόταν ζημιά. Αυτό όμως δεν ίσχυε για τη θεωρία του, παρόλο που η πιθανότητα μετάβασης ήταν πολύ μικρή – της τέταρτης τάξης του v/c , όπου v η ταχύτητα του ηλεκτρονίου. Επομένως η θεωρία μπορούσε να αποτελεί μόνο μια προσέγγιση της Φύσης και ίσως θα έπρεπε να αλλάξουν εντελώς οι έννοιες, ακόμη και να υιοθετηθεί μια ασυμμετρία των νόμων μεταξύ του παρελθόντος και του μέλλοντος¹⁶⁷.

Κατά τα επόμενα δύο χρόνια ο Dirac δεν δημοσίευσε τίποτε σχετικά με τη ρελατιβιστική εξίσωση¹⁶⁸. Αυτό δεν οφειλόταν μόνο στο γεγονός ότι έκανε διαλέξεις και ετοίμαζε την πρώτη έκδοση του βιβλίου του “The Principles of Quantum Mechanics”¹⁶⁹, στο οποίο συμπεριέλαβε θέματα όπως συστήματα πολλών ηλεκτρονίων και κβαντική στατιστική μηχανική. Γνώριζε ότι η σχετικιστική θεωρία του ήταν ακόμα ατελής και σε ένα άρθρο με τίτλο “A Theory of Electrons and Protons” εξήγησε αναλυτικά το λόγο¹⁷⁰. Η κυματική εξίσωση έδινε, εκτός από “λύσεις για τις οποίες η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι θετική, ένα ίδιο πλήθος παράλογων λύσεων με αρνητική κινητική ενέργεια για το ηλεκτρόνιο, το οποίο φαινόταν χωρίς φυσική

¹⁶⁵ C.G. Darwin, Proc. Roy. Soc. (London) A118, 654-680 (1928), A120, 621-631 (1928), W. Gordon, Z. Phys. 48, 11-14 (1928).

¹⁶⁶ “The Quantum Theory of the Electron” Part II

¹⁶⁷ “Über die Quantentheorie des Elektrons”, p. 563. Ο Dirac αναφέρθηκε στο γεγονός ότι το 1928 ήταν γνωστό πως μόνο το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο - δύο σωματίδια με αντίθετα φορτία αλλά πολύ διαφορετικές μάζες - υπήρχαν στη Φύση. Σε αντίθεση με τον Dirac, ο Weyl δεν ενοχλήθηκε από αυτή τη συνέπεια της εξίσωσης.

¹⁶⁸ Δημοσίευσε δύο άρθρα. Το ένα, “The Basis of Statistical Mechanics” (Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 62-66 (1929) (παρελήφθη 17 Οκτωβρίου 1928)), αντιμετώπιζε την κβαντική στατιστική μηχανική σε αναλογία με την κλασική. Το δεύτερο, “Quantum Mechanics of Many Electron Systems” (Proc. Roy. Soc. (London) A123, 714-733 (1929) (παρελήφθη 12 Μαρτίου 1929)), αναφερόταν ρητά στις εμπλεκόμενες δυσκολίες όταν είναι παρόντα σωματίδια με μεγάλες ταχύτητες. Τόνιζε το γεγονός ότι κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων σχετικών με χημικούς δεσμούς, οι δυσκολίες αυτές μπορούν να αποφευχθούν. Ο στόχος του ήταν να καταλήξει σε μια προσεγγιστική, πρακτική μέθοδο ερμηνείας των κύριων χαρακτηριστικών των σύνθετων ατομικών συστημάτων. Σε δύο επόμενα άρθρα (“Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom”, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 376-385, (1930)) και “Note on the Interpretation of the Density Matrix in the Many Electron Problem”, Proc. Camb. Phil. Soc. 27, 240-243 (1931) επέστρεψε σε παρόμοια ερωτήματα.

¹⁶⁹ “The Principles of Quantum Mechanics”, Oxford 1930.

¹⁷⁰ “A Theory of Electrons and Protons”, Proc. Roy. Soc. (London) A126, 360-365 (1930), (παρελήφθη 6 Δεκεμβρίου 1929). Βλέπε σελ. 360.

σημασία”¹⁷¹. Εξετάζοντας την κυματοσυνάρτηση μιας λύσης αρνητικής ενέργειας σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ο Dirac βρήκε ότι συμπεριφερόταν ως σωματίδιο με θετικό φορτίο. Αλλά αυτό δεν θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα, λόγω της Απαγορευτικής Αρχής. Μπορούσε συνεπώς να υποθέσει ότι “υπάρχουν τόσο πολλά ηλεκτρόνια στον κόσμο, ώστε να καταλαμβάνονται οι πιο σταθερές καταστάσεις ή ακριβέστερα ότι όλες οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι κατειλημμένες εκτός ίσως κάποιων μικρής ταχύτητας”¹⁷².

Ο Dirac υποστήριξε ότι η μετάβαση ηλεκτρονίων από καταστάσεις θετικής ενέργειας σε καταστάσεις αρνητικής ενέργειας ήταν απαγορευμένες και μόνο οι μη κατειλημμένες αρνητικές καταστάσεις, οι “οπές”, μπορούσαν να παρατηρηθούν. Υπέθεσε ότι “οι οπές στην κατανομή ηλεκτρονίων με αρνητική ενέργεια είναι τα πρωτόνια. Όταν ένα ηλεκτρόνιο θετικής ενέργειας πέσει σε μια οπή και τη γεμίσει, το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο εξαφανίζονται με εκπομπή ακτινοβολίας”¹⁷³. Σε ένα επόμενο σημείωμα στα “Proceedings of the Cambridge Philosophical Society” υπολόγισε το ρυθμό εξαϋλωσης¹⁷⁴ και σε ένα άρθρο που αναγνώστηκε στη “British Association” στο Μπρίστολ στις 8 Σεπτεμβρίου 1930 ο Dirac συνόψισε τα αποτελέσματά του¹⁷⁵. Η ύλη αποτελείται, είπε, από “ηλεκτρόνια και πρωτόνια” και η ύπαρξη πρωτονίων “προκύπτει από τη σχετικιστική κυματοσυνάρτηση”. Με αυτή την ερμηνεία παρέμενε μια δυσκολία: ο Dirac στη θεωρία του μπορούσε να υπολογίσει την πιθανότητα μετάβασης για τη διαδικασία εξαϋλωσης μόνο με την “προσέγγιση” ότι οι μάζες του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου ήταν ίσες και το προκύπτον πλάτος ήταν αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από αυτό που υποδείκνυαν τα εμπειρικά δεδομένα για τις “εξαϋλώσεις ηλεκτρονίου-πρωτονίου”¹⁷⁶. Παρά το πρόβλημα αυτό ο Dirac είχε πίστη στην ουσιαστική ορθότητα της ερμηνείας του για την κυματική εξίσωση.

¹⁷¹ Το τίμημα για το γεγονός ότι στη θεωρία για το ηλεκτρόνιο το $\psi^* \psi$ είναι πάντα θετικό ήταν ότι η Χαμιλτονιανή γίνεται απροσδιόριστη. Αυτό μπορεί να φανεί ήδη στην κλασική μορφή, δηλαδή στην εξίσωση (16) ($b_r b_r^* - b_r^* b_r = 1$), στην οποία συμβαίνουν και οι δύο πιθανότητες. Στην κλασική φυσική μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων θετικής και αρνητικής ενέργειας ίσως να αποφεύγονται, αλλά στη θεωρία διαταραχών, με ταχέως μεταβαλλόμενες διαταραχές, αυτό δεν είναι δυνατό.

¹⁷² “A Theory of Electrons and Protons”, σελ. 362.

¹⁷³ “A Theory of Electrons and Protons”, σελ. 363.

¹⁷⁴ “On the Annihilation of Electrons and Protons”, Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 361-375 (1930), (παρελήφθη 26 Μαρτίου 1930).

Ο Dirac υπολόγισε τη διεγερμένη εκπομπή ενός ηλεκτρονίου υπό την επίδραση δύο δεσμών ακτινοβολίας. Εφόσον η διαδικασία εξαϋλωσης μπορεί να θεωρηθεί ως αυθόρμητη εκπομπή δύο φωτονίων από τη σύγκρουση ηλεκτρονίου-πρωτονίου, θα μπορούσε κάποιος απλά να χρησιμοποιήσει τη σχέση μεταξύ αυθόρμητης και διεγερμένης εκπομπής.

¹⁷⁵ “The Proton”, Nature 126, 605 (1930).

¹⁷⁶ Κατά συνέπεια ο J.R. Oppenheimer πρότεινε τη συμπλήρωση όλων των οπών αρνητικής ενέργειας (Phys. Rev. 35, 562 (1930)). Κάνοντάς το, κατά πρώτον δεν συμβαίνουν μεταβάσεις και κατά δεύτερον τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια μπορούσαν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα αντικείμενα.

Μετά τη δημοσίευση του Dirac για την κυματική εξίσωση του ηλεκτρονίου το 1928, πολλοί ανέλαβαν τη μελέτη της. Ο ίδιος ο Schrödinger έδωσε μια ερμηνεία για την ιδιότητα του σπιν ενός σωματιδίου ως “Zitterbewegung” (ταχείες ταλαντώσεις)¹⁷⁷. Ο Dirac γνώριζε ότι έπρεπε να προχωρήσει περισσότερο, προκειμένου να καταστήσει συνεπή τη φυσική ερμηνεία. “Ένωθα ότι γράφοντας το άρθρο για το ηλεκτρόνιο δεν ήταν τόσο δύσκολο, όσο γράφοντας το άρθρο για τη φυσική ερμηνεία”¹⁷⁸. Υπήρχε το πρόβλημα με τις καταστάσεις αρνητικής ενέργειας: “Ήταν ένα ελάττωμα της θεωρίας και δεν έβλεπα τι μπορούσε να γίνει για αυτό. Μόνο αργότερα συνέλαβα την ιδέα της συμπλήρωσης όλων των καταστάσεων αρνητικής ενέργειας”¹⁷⁹. Στη συνέχεια υπήρχαν οι άνισες μάζες των θετικά και αρνητικά φορτισμένων σωματιδίων που υπήρχαν στη Φύση. “Ένωσα από την αρχή ότι τα ηλεκτρόνια αρνητικής ενέργειας θα είχαν την ίδια μάζα ηρεμίας με τα συνήθη ηλεκτρόνια... Ήλπιζα ότι κάπου υπήρχε κάποια έλλειψη συμμετρίας, η οποία θα δικαιολογούσε την επιπλέον μάζα για τα θετικά φορτισμένα σωματίδια. Ήλπιζα ότι με κάποιο τρόπο η αλληλεπίδραση Coulomb θα μπορούσε να οδηγήσει σε αυτή την επιπλέον μάζα, αλλά δεν μπορούσα να δω πώς θα μπορούσε να συμβεί αυτό”¹⁸⁰. Μετά τις προσεκτικές έρευνες του Weyl, ο Dirac εγκατέλειψε την ιδέα ότι η θετικά φορτισμένη οπή ήταν ένα πρωτόνιο¹⁸¹. “Φαίνεται έτσι ότι πρέπει να εγκαταλείψουμε την ταύτιση των οπών με πρωτόνια και πρέπει να βρούμε κάποια άλλη ερμηνεία για αυτές. Μια οπή, αν υπήρχε κάποια τέτοια στον κόσμο, θα ήταν ένα νέο είδος σωματιδίου, άγνωστο στους πειραματικούς φυσικούς, με ίδια μάζα και αντίθετο φορτίο με ένα ηλεκτρόνιο. Μπορούμε να αποκαλέσουμε ένα τέτοιο σωματίδιο ως αντιηλεκτρόνιο. Δεν θα έπρεπε να περιμένουμε να τα βρούμε στη Φύση, λόγω του ταχύτατου ρυθμού ανασυνδυασμού τους με τα ηλεκτρόνια, αλλά αν μπορούσαν να παραχθούν πειραματικά σε υψηλό κενό, θα ήταν αρκετά σταθερά και παρατηρήσιμα. Μια συνάντηση μεταξύ δύο σκληρών ακτίνων γ (ενέργειας τουλάχιστον μισού εκατομμυρίου eV) θα μπορούσε να οδηγήσει στην ταυτόχρονη δημιουργία ενός ηλεκτρονίου και ενός αντιηλεκτρονίου. Αυτή η πιθανότητα (της δημιουργίας ενός ζεύγους) είναι ασήμαντη, παρόλα αυτά, με τις εντάσεις των ακτίνων γ που είναι διαθέσιμες προς το παρόν”¹⁸².

¹⁷⁷ E. Schrödinger, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) 1930, 418-428.

¹⁷⁸ ΑΗΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁷⁹ ΑΗΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁸⁰ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι ο Einstein, που εκείνη την εποχή ασχολιόταν ήδη έντονα με τη θεωρία ενοποιημένου πεδίου, ενδιαφέρθηκε για το πρόβλημα αναζητώντας γενίκευση της έννοιας των σπινόρων. A. Einstein and W. Mayer, “Semi-Vectors and Spinors”, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) 1932, 522-550. Σε αυτή τη θεωρία τα “αντισωματίδια” μπορούσαν να έχουν διαφορετικές μάζες.

¹⁸¹ Βλέπε H. Weyl, ‘Gruppentheorie und Quantenmechanik, second edition, Leipzig, 1931, p. 234.

¹⁸² Βλέπε “Quantized Singularities in the Electromagnetic Field”, Proc. Roy. Soc. (London) A133, 60-72 (1931), (παρελήφθη 29 Μαΐου 1931). Ο Dirac παρατήρησε αργότερα: “Δεν συνειδητοποίησα ότι η πιθανότητα ήταν πολύ μεγαλύτερη, αν μια ακτίνα γ σε πεδίο Coulomb χτυπούσε απλά ένα πυρήνα”. (Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

Κατόπιν στις 2 Αυγούστου 1932 έγινε η ανακάλυψη του ποζιτρονίου από τον C. Anderson¹⁸³. Για τον Dirac αυτό σήμαινε την ικανοποίηση ότι η εξίσωσή του προέβλεπε σωστά την κατάσταση, όπως είχε ελπίσει.

Η εργασία του είχε επίσης προσφέρει το πρώτο παράδειγμα στην ιστορία της φυσικής, όπου η ύπαρξη ενός νέου σωματιδίου είχε προβλεφθεί σε μια αμιγώς θεωρητική βάση. Ο ίδιος ο Dirac θεωρούσε πολύ πιο σημαντικό το γεγονός ότι στην εξίσωσή του το σπιν είχε ενσωματωθεί τόσο φυσικά, ακολουθώντας απλά τις ιδιότητες συμμετρίας που εμφανίζονταν στις εξισώσεις¹⁸⁴. Στο 7^ο Συνέδριο Solvay τον Οκτώβριο του 1933, ο Dirac συνόψισε τη “Θεωρία του Ποζιτρονίου”¹⁸⁵. Στην ομιλία του για το βραβείο Νόμπελ στις 12 Δεκεμβρίου 1933, ο Dirac είχε την ευκαιρία να επιστρέψει στο θέμα και να προβλέψει επίσης την ύπαρξη “αρνητικών” πρωτονίων¹⁸⁶.

¹⁸³ C.D. Anderson, “The Positive Electron”, *Phys. Rev.* **43**, 492 (1933). Ο Anderson δεν γνώριζε τη θεωρία του Dirac όταν ανακάλυψε το νέο σωματίδιο στο θάλαμο νέφωσης. Για λεπτομέρειες σχετικά με την ιστορία του ποζιτρονίου βλέπε N.R. Hanson, “The Concept of the Positron”, Cambridge 1963, ειδικά το κεφάλαιο IX.

¹⁸⁴ Υπάρχει μια ιστορία, πιθανά αποκρυφιστική, ότι ο Dirac είχε βάλει στοίχημα με τον Heisenberg για το θέμα του σπιν, λέγοντας πως θα έβρισκε μια πιο θεμελιώδη εξήγησή του πέρα από την απλή προσθήκη ενός νέου βαθμού ελευθερίας. Για αυτή την ιστορία είπε: “Δεν νομίζω ότι θα έβαζα στοίχημα για τη μελλοντική εξέλιξη της επιστήμης, διότι είναι πολύ αβέβαιη. Ίσως να είπα ότι δεν ήμουν ικανοποιημένος με τη θεωρία και ότι πίστευα πως κάποια μέρα θα ανακαλυπτόταν μια καλύτερη θεωρία. Τώρα θα έλεγα ότι κάποια μέρα θα βρεθεί ο λόγος για τη σταθερά 137”. ΑΗQP, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

¹⁸⁵ “Théorie du Positron”, Septième Conseil de Physique Solvay (Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques), 22-29 October 1933, Gauthier-Villars, Paris, 1934.

¹⁸⁶ Προς το κλείσιμο της ομιλίας, τα λόγια του Dirac ήταν προφητικά: “Σε κάθε περίπτωση πιστεύω ότι είναι πιθανό να υπάρχουν αρνητικά πρωτόνια, καθώς εφόσον μέχρι τώρα η θεωρία είναι οριστική, υπάρχει μια πλήρης και τέλεια συμμετρία μεταξύ θετικού και αρνητικού ηλεκτρικού φορτίου και αν αυτή η συμμετρία είναι πραγματικά θεμελιώδης στη φύση, πρέπει να είναι δυνατό να αναστραφεί το φορτίο οποιουδήποτε είδους σωματιδίου. Τα αρνητικά πρωτόνια θα ήταν βέβαια πολύ πιο δύσκολο να παραχθούν πειραματικά, καθώς θα απαιτείτο πολύ μεγαλύτερη ενέργεια, αντίστοιχη με τη μεγαλύτερη μάζα. Αν αποδεχτούμε την άποψη πλήρους συμμετρίας μεταξύ θετικού και αρνητικού φορτίου όσον αφορά τους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης, θα πρέπει να θεωρήσουμε μάλλον ως ατύχημα ότι η Γη (και πιθανά όλο το ηλιακό σύστημα) περιέχει ένα πλεόνασμα αρνητικών ηλεκτρονίων και θετικών πρωτονίων. Είναι αρκετά πιθανό ότι σε κάποια από τα άστρα θα συμβαίνει το αντίθετο και αυτά θα είναι φτιαγμένα κυρίως από ποζιτρόνια και αρνητικά πρωτόνια. Στην πραγματικότητα, ίσως τα μισά άστρα να είναι αυτού του είδους. Τα δύο είδη άστρων θα είχαν ακριβώς τα ίδια φάσματα και δεν θα υπήρχε τρόπος να τα διακρίνουμε με τις παρούσες αστρονομικές μεθόδους”. (“Nobel Lectures in Physics”, 1922-41, Amsterdam 1965, 324-325).

VIII. Το έργο ενός Θεωρητικού Φυσικού

Έχουμε συζητήσει το έργο του Dirac κατά την περίοδο στην οποία ολοκληρώθηκε η θεωρία των ατομικών φαινομένων. Στο ίδιο άρθρο¹⁸⁷, στο οποίο ο Dirac δημιούργησε τη νέα φυσική έννοια του αντισωματιδίου, πρότεινε επίσης την ιδέα ενός “μαγνητικού μονόπολου”, το οποίο έδειξε ότι θα έπρεπε να προκύπτει από την ύπαρξη μιας ελάχιστης μονάδας φορτίου¹⁸⁸. Πέρα από αυτό, ο Dirac έστρεψε πολύ νωρίς την προσοχή του σε μια συστηματική μελέτη της σχετικιστικής κβαντικής θεωρίας πεδίου. Είχε θέσει τα θεμέλια στην προσέγγιση που βασιζόταν στη δεύτερη κβάντωση, αλλά προχώρησε με μεγαλύτερη φροντίδα και προσοχή σε σχέση με αρκετούς από τους συγχρόνους του. Παρά το ότι ήταν πεισμένος, πως η τελική θεωρία θα έπρεπε να είναι πλήρως σχετικιστική, θεωρούσε πάντοτε την προσέγγιση που βασιζόταν σε διαδοχικές βελτιωμένες προσεγγίσεις ως την πλέον επιθυμητή¹⁸⁹. Σε μία σειρά τριών άρθρων για την κβαντική θεωρία πεδίου το 1932¹⁹⁰, ο Dirac προχώρησε πιο προσεκτικά

¹⁸⁷ “Quantized Singularities in the Electromagnetic Field”

¹⁸⁸ Τα μαγνητικά μονόπολα δεν έχουν ακόμη ανακαλυφθεί πειραματικά. Παρόλα αυτά, κανείς δεν έχει βρει κάποιο ικανοποιητικό λόγο για τη μη ύπαρξή τους. Επιπλέον, δεν έχουν πλήρως ενσωματωθεί στο θεωρητικό σχήμα της φυσικής υψηλών ενεργειών. Ο Dirac πρότεινε το 1931 ότι οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ θετικών και αρνητικών πόλων είναι πολύ ισχυρές σε σχέση με τις ελκτικές δυνάμεις μεταξύ στοιχειωδών σωματιδίων. Πιστεύεται τώρα ότι οι αλληλεπιδράσεις αδρονίων θα μπορούσαν να είναι ισχυρότερες από αυτές μεταξύ μονόπολων.

¹⁸⁹ Ο Dirac ήταν πεισμένος, ακόμη και όταν προετοιμάζε την πρώτη έκδοση του βιβλίου του “The Principles of Quantum Mechanics” (1930), ότι η καλύτερη μορφή παρουσίασης της κβαντικής θεωρίας θα ήταν η σχετικιστική. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου του το 1935 και πολύ περισσότερο στην τρίτη έκδοση το 1947, αναγνώρισε ότι υπάρχουν έννοιες που δεν διατηρούνται στη σχετικιστική μηχανική, παρόλο που φαίνονται πολύ φυσιολογικές στη μη σχετικιστική μορφή της κβαντομηχανικής. Επιπλέον, οι απειρισμοί που προκύπτουν στην κβαντική θεωρία πεδίου έδειξαν ότι η απευθείας γενίκευση της κβαντομηχανικής δεν ήταν η τελική απάντηση για όλα.

Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου του Dirac αξιολογήθηκε από τον C.G. Darwin, που εξέφρασε την άποψη ότι “δεν θεωρούμε τη δεύτερη έκδοση καλύτερη της πρώτης. Στην πρώτη έκδοση, ο συγγραφέας πέτυχε τόσο αξιοθαύμαστα να εκφράσει τη φιλοσοφία του, ώστε η νέα έκδοση να προδώσει τις προσδοκίες μας για ακόμη καλύτερα πράγματα” (Nature 136, 14 September 1935, 411-412). Ο S. Chandrasekhar μου είπε την ιστορία, ότι μετά από ένα περίπατο με τον Dirac στο Cambridge, τον προσκάλεσε στο γραφείο του στο Trinity College για τσάι. Ο Dirac παρατήρησε: “ο Darwin πιστεύει ότι η πρώτη έκδοση του βιβλίου μου είναι καλύτερη από την πρώτη”. Ο Chandrasekhar τον ρώτησε: “Συμφωνείς με αυτή την άποψη;”. Ο Dirac απάντησε: “Αν συμφωνούσα, δεν θα είχα γράψει τη δεύτερη έκδοση”.

Το 1939 ο Dirac πρότεινε το νέο συμβολισμό των “bra” και “ket” διανυσμάτων, τα οποία χρησιμοποίησε στην τρίτη έκδοση το 1947. Στον πρόλογο του βιβλίου “Perturbation Methods in the Quantum Mechanics of n-Electron Systems” του E.M. Corson (Hafner, New York 1950), που βασιζόταν στη θεωρία του Dirac και τις διαλέξεις του στο Princeton, ο Born έγραψε: “δεν υπάρχει για μένα καλύτερο από τους συγκεκριμένους συμβολισμούς όπου τα brackets αντικαθιστούν τα συνήθη σύμβολα”. (Ο εν λόγω συμβολισμός είναι πλέον καθιερωμένος στη γλώσσα της κβαντομηχανικής).

¹⁹⁰ “Relativistic Quantum Mechanics”, Proc. Roy. Soc. (London) A136, 453-464 (1932), (παρελήφθη 24 Μαρτίου 1932).

“On Quantum Electrodynamics”, with V.A. Fock and B. Podolsky, Phys. Zeitschr. der SU 2, 468-479 (1932), (παρελήφθη 25 Οκτωβρίου 1932).

“The Lagrangian in Quantum Mechanics”, Phys. Zeitschr. der SU 3, 64-72 (1933), (παρελήφθη 19 Νοεμβρίου 1932).

σε σχέση με τον Heisenberg και τον Pauli, οι οποίοι στο θεμελιώδες άρθρο τους είχαν παραγάγει το πεδίο ως ένα δυναμικό σύστημα που υπόκειται σε κβάντωση¹⁹¹. Ο Dirac προτίμησε να διαχωρίσει τα πεδία από τα σωματίδια. “Η ίδια η φύση μιας παρατήρησης απαιτεί μια συνεργασία μεταξύ του πεδίου και των σωματιδίων. Συνεπώς δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πεδίο είναι ένα δυναμικό σύστημα στην ίδια βάση με τα σωματίδια. Το πεδίο θα έπρεπε να εμφανίζεται στη θεωρία ως κάτι πιο στοιχειώδες και θεμελιώδες”¹⁹². Ο L. Rosenfeld έδειξε, παρόλα αυτά, ότι η σχετικιστική κβαντομηχανική του Dirac ήταν ισοδύναμη με αυτή των Heisenberg και Pauli¹⁹³. Ο Dirac εμπλούτισε κι άλλο την κβαντική θεωρία πεδίου, γενικεύοντας την έννοια της κατάστασης σε μη θετική νόρμα¹⁹⁴.

Ο Dirac επέστρεψε αργότερα σε μία επανεξέταση της έννοιας του αιθέρα σε σχέση με το ρόλο του χρόνου στο σχήμα της σχετικιστικής κβαντομηχανικής¹⁹⁵. Η ιδέα αυτή ήταν χαλαρά συνδεδεμένη με την εργασία του στην κοσμολογία στο τέλος της δεκαετίας του 1930. Οι πιο ασυνήθιστες θεωρήσεις σε αυτά τα άρθρα σχετίζονταν με μια αλλαγή των θεμελιωδών σταθερών, όπως η σταθερά λεπτής υφής, στη ροή της εξέλιξης¹⁹⁶. Ο Dirac συνεισέφερε επίσης αργότερα στις μελέτες για την κβάντωση του βαρυτικού πεδίου¹⁹⁷.

Ο Dirac έχει πάντοτε υπάρξει πολύ ευφάνταστος ως προς την παρουσίαση νέων και ανοίκειων εννοιών, τόσο στις μαθηματικές μεθόδους όσο και στη φυσική ερμηνεία. “Νομίζω ότι θα ήμουν πολύ ευτυχής αν κάποια καθιερωμένη ιδέα ανατρεπόταν”¹⁹⁸. Ο Jordan πρότεινε κάποτε ότι θα μπορούσε κάποιος να περάσει από το μη μεταθετικό στο μη προσεταιριστικό πολλαπλασιασμό και στον Dirac “μάλλον άρεσε η ιδέα, αλλά δεν έβλεπε πώς να την αναπτύξει

¹⁹¹ W. Heisenberg and W. Pauli, Z. Phys. 56, 1, 59, 168 (1929).

¹⁹² Βλέπε “Relativistic Quantum Mechanics”, p. 454.

¹⁹³ L. Rosenfeld, Z. Phys. 76, 729 (1932). Οι Dirac, Fock και Podolsky βελτίωσαν την απόδειξη στο κοινό άρθρο τους “On Quantum Electrodynamics”. Σε ένα κατοπινό άρθρο ο Dirac αποσαφήνισε περεταίρω την έννοια μιας θεωρίας Lagrange, παρέχοντας μια συνεπή μελέτη της κλασικής δυναμικής. (“Homogeneous Variables in Classical Dynamics”, Proc. Camb. Phil. Soc. 29, 389-401 (1933), (παρελήφθη 16 Μαΐου 1933).

¹⁹⁴ Αυτή η ιδέα προτάθηκε από τον Dirac κατά τη διάλεξή του στη Royal Society, που πραγματοποιήθηκε στις 19 Ιουνίου 1941 (Proc. Roy. Soc. (London) A180, 1-40 (1942)). Βλέπε τη συνεισφορά του Heisenberg σε αυτό τον τόμο.

¹⁹⁵ Βλέπε P.A.M. Dirac, “Is there an Aether?”, Nature 168, 906 (1951), 169, 146, 702 (1952) και “The Lorentz Transformation and Absolute Time”, Physica 19, 888-896 (1953). Ο στόχος του ήταν να επιστρέψει σε ένα Χαμιλτονιανό σχήμα για τη σχετικιστική φυσική και μέσω αυτού να θεραπεύσει τις δυσκολίες που προέκυπταν από αποκλίσεις στην κβαντική θεωρία πεδίου.

¹⁹⁶ P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A160, 48-59 (1937), A165, 199-208 (1938).

¹⁹⁷ P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A246, 333-343 (1958), Phys. Rev. 114, 924-930 (1959), Phys. Rev. Letters, 2, 368-371 (1959).

¹⁹⁸ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

Για παράδειγμα, ο Dirac ήταν πρόθυμος να δεχτεί την ιδέα των Bohr-Kramers-Slater για τη στατιστική διατήρηση της ενέργειας (Bohr, Kramers, Slater, Phil. Mag. 47, 785-802 (1924)). Απαντώντας στο συγχαρητήριο μήνυμα του Bohr για τη βράβευσή του με το Νόμπελ, ο Dirac μίλησε με ευγνωμοσύνη για την επίδραση που του ασκήθηκε από την ευφάνταστη και μη δογματική προσωπικότητα του Bohr.

μαθηματικά”¹⁹⁹. Το 1968, σε μία συζήτηση για τη ζωή του στη φυσική, συνόψισε τη στάση του σχετικά με τα νέα προβλήματα φυσικής αναφερόμενος στις δυσκολίες που προκύπτουν στην κβαντική ηλεκτροδυναμική: “Η φύση σίγουρα δεν έχει εκφρασμένες τις βασικές ιδέες της με τόσο θολό και άσχημο τρόπο. Υπάρχει πιθανά κάποια πολύ καθαρή λύση, η οποία μένει να ανακαλυφθεί”²⁰⁰. Ειδικότερα, πρόσθεσε, “θα μπορούσαν κάλλιστα να εμφανιστούν νέες αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz και με την κατάλληλη κατασκευή εξισώσεων που θα εισάγουν αυτές τις αναπαραστάσεις θα οδηγηθούμε σε μια νέα ηλεκτροδυναμική”²⁰¹. Πίστευε πάντοτε ότι “θα πρέπει να έχουμε ένα εντελώς ανοικτό πνεύμα για το μέλλον... Δεν θα έπρεπε κάποιος να κατασκευάζει τη φιλοσοφία του με το σκεπτικό ότι η σημερινή κβαντομηχανική αποτελεί την τελευταία λέξη. Αν συμβεί αυτό, τότε θα βρίσκεται σε πολύ αβέβαιο έδαφος και κάποια στιγμή στο μέλλον θα χρειαστεί να αλλάξει εντελώς τη στάση του”²⁰².

Στην προσέγγιση του Dirac για την περιγραφή της Φύσης, η χρήση “αναπαραστατικών μοντέλων” ήταν πάντοτε κυρίαρχη²⁰³. Αυτή η μέθοδος γινόταν πάντα ιδιαίτερα σημαντική γι

¹⁹⁹ Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

²⁰⁰ Ο Dirac έχει εκφράσει συχνά την ανάγκη μαθηματικής ομορφιάς στη θεωρία της φυσικής. “Νιώθω ότι μια θεωρία, αν είναι σωστή, θα είναι μια όμορφη θεωρία, διότι χρειάζεσαι την αρχή της ομορφιάς όταν καθιερώνεις θεμελιώδεις νόμους. Εφόσον κάποιος εργάζεται σε μαθηματική βάση, καθοδηγείται εν πολλοίς από την απαίτηση για μαθηματική ομορφιά. Αν οι εξισώσεις της φυσικής δεν είναι μαθηματικά όμορφες, αυτό δηλώνει μια ατέλεια και σημαίνει ότι η θεωρία έχει σφάλμα και χρειάζεται βελτίωση. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η μαθηματική ομορφιά θα έπρεπε να έχει προτεραιότητα έναντι της (πρόσκαιρης) συμφωνίας με το πείραμα. Η μαθηματική ομορφιά προκαλεί τα συναισθήματα και η ανάγκη για αυτή είναι αποδεκτή ως σύμβολο πίστης - δεν υπάρχει λογική πίσω από αυτό. Φαίνεται απλά ότι ο Θεός έφτιαξε το σύμπαν στη βάση όμορφων μαθηματικών και έχουμε δει πως η υπόθεση ότι οι βασικές ιδέες πρέπει να μπορούν να εκφραστούν με όρους όμορφων μαθηματικών είναι μια επικερδής αξίωση”.

“Σε μια προσεγγιστική θεωρία τα μαθηματικά μπορεί να μην είναι όμορφα. Η θεωρία του Newton έχει κάποια ομορφιά, αλλά η θεωρία του Einstein για τη βαρύτητα έχει μεγαλύτερη. Οι καθαροί μαθηματικοί, ακόμη κι αν δεν είναι φυσικοί και δεν ενδιαφέρονται καθόλου για τη βαρύτητα, ενδιαφέρονται για τις εξισώσεις του Einstein, διότι τις βρίσκουν όμορφες. Η όλη ιδέα του χώρου Minkowski και οι εξισώσεις του είναι ένα όμορφο πράγμα, διότι συνδέεται με την ομάδα Lorentz. Η μη σχετικιστική κβαντομηχανική επίσης είναι μια όμορφη θεωρία διότι είναι πλήρης”.

“Θα θεωρούσα τη θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών πολύ όμορφη θεωρία, διότι τα ολοκληρώματα Cauchy αποτελούν τεράστιο εφόδιο. Το ίδιο αισθάνομαι για την προβολική γεωμετρία, αλλά όχι για κάποιους άλλους κλάδους των μαθηματικών, όπως η θεωρία ομάδων και η τοπολογία”.

“Μια όμορφη θεωρία έχει παγκοσμιότητα, προγνωστική και ερμηνευτική ικανότητα και μπορεί να κατασκευάζει παραδείγματα και να εργάζεται με αυτά. Άπαξ και διαθέτεις τους θεμελιώδεις νόμους και θέλεις να τους εφαρμόσεις, δεν χρειάζεσαι πλέον την αρχή της ομορφιάς, διότι κατά την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων χρειάζεται να λάβεις υπόψη πολλές λεπτομέρειες και τα πράγματα γίνονται πολύπλοκα ούτως ή άλλως”.

(Συζητήσεις με τον Dirac στην Τεργέστη και το Μαϊάμι).

²⁰¹ Ομιλία του Dirac στο “Από μια ζωή Φυσικής”.

²⁰² Ομιλία του Dirac με θέμα “Σχετικότητα και Κβαντομηχανική” στο πανεπιστήμιο του Τέξας, 14 Απριλίου 1970.

²⁰³ Βλέπε P.A.M. Dirac, “Evolution of the Physicist’s Picture of Nature”, Scientific American 208, No. 5, 45-53 (1963). Ο Dirac δεν πιστεύει ότι ήταν ποτέ πολύ καλός στο να εκτελεί αλγεβρικούς υπολογισμούς χωρίς να απεικονίσει τη σημασία των εξισώσεων. Μου είπε (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969) ότι βρίσκει δύσκολο το να παρακολουθήσει τη μοντέρνα έρευνα στη θεωρητική φυσική, που χρησιμοποιεί καθαρά αλγεβρικές μεθόδους. Παραδέχτηκε πάντως ότι οι χειρισμοί του με τους αριθμούς q ήταν περισσότερο αλγεβρικοί παρά “γεωμετρικοί”. Έχουμε αναφέρει προηγουμένως την προτίμησή του για τη γεωμετρία.

αυτόν, όταν προσπαθούσε να βελτιώσει συγκεκριμένες ιδέες. Στην περίπτωση του άρθρου του “Quantized Singularities in the Electromagnetic Field”, για παράδειγμα, είχε κάνει λόγο για γραμμές οι οποίες συνέδεαν τους μαγνητικούς πόλους. “Δεν είχα την ίδια ιδέα τότε, ότι όλες οι δυναμικές γραμμές Faraday θα έπρεπε να είναι διακριτές”²⁰⁴. Επίσης, όταν ανέπτυξε την εξίσωσή του για το ηλεκτρόνιο μέσω της εξίσωσης Schrödinger ή τη σχετικιστική εξίσωση Klein-Gordon, σκεφτόταν τις κυματοσυναρτήσεις “να σχηματίζουν κάποιο είδος πυκνότητας που θα μπορούσε να απεικονιστεί σαν να απλώνεται στο χώρο”²⁰⁵. Αυτή η εικόνα τον βοήθησε να τροποποιήσει την εξίσωση και τα μαθηματικά, εισάγοντας την τετραδιάστατη κυματοσυνάρτηση και τις αντίστοιχες μήτρες - τα μαθηματικά βελτίωσαν έτσι την προηγούμενη εικόνα. Δεν έχει ασχοληθεί ποτέ, για παράδειγμα, με την επανακανονικοποιημένη θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, διότι δεν έχει “βρει την αντίστοιχη εικόνα για την επανακανονικοποίηση του φορτίου”²⁰⁶.

Με τον όρο “εικόνες” ο Dirac εννοεί ένα οπτικό τρόπο κατανόησης των εξισώσεων ανεξάρτητα από τις προσεγγιστικές μεθόδους λύσης των εξισώσεων. Στην εικόνα οι ασαφείς ιδέες γίνονται σύμβολα και τα σύμβολα αποκτούν μια δική τους υπόσταση, μέχρι να μπορούν να γραφτούν καλά καθορισμένες εξισώσεις. Οι αριθμοί q , τους οποίους ο Dirac εισήγαγε στην κβαντομηχανική, είναι μια τέτοια περίπτωση. “Υποθέτω ότι απεικόνισα τους αριθμούς q ως ένα είδος μυστήριων αριθμών που αντιπροσώπευαν φυσικά αντικείμενα. Πέρασε αρκετός χρόνος πριν εκτιμήσω ότι ήταν απλά τελεστές στο χώρο Hilbert. Όταν πράγματι το συνειδητοποίησα, απέρριψα την ορολογία των αριθμών q - ήταν κάποιες ατελώς κατανοήσιμες φυσικές μεταβλητές που ικανοποιούσαν τη μη μεταθετική άλγεβρα”²⁰⁷. Οι εικόνες καθοδηγούσαν επίσης τον Dirac στο χειρισμό εννοιών, πέρα από τις τυπικές μαθηματικές ιδιότητές τους. Για παράδειγμα, όταν εμφανιζόταν ένα άπειρο στις εξισώσεις, πίστευε ότι μπορούσε να το αναπαραστήσει με μια πεπερασμένη ποσότητα, η οποία θα το προσέγγιζε. “Φανταζόμουν συχνά ότι μια σειρά είναι αποκομμένη με τέτοιο τρόπο, ώστε οι όροι που αμελούνται να αντιστοιχούν σε μια κατάσταση φυσικώς ασήμαντη. Αυτός είναι ένας τρόπος να καταστρώσεις μια εικόνα, η οποία θα είναι απαλλαγμένη από τους απειρισμούς. Στη συνέχεια πρέπει να εκτιμηθεί αν μια τέτοια εικόνα είναι σχετικιστική ή όχι. Αυτό μπορεί να γίνει ευκολότερα από το να εργάζεται κανείς με μαθηματικά άπειρα”²⁰⁸.

Ο Dirac διαφέρει αξιοσημείωτα από άλλους φυσικούς στο πώς προσεγγίζει τα προβλήματα φυσικής. Ο Heisenberg θυμάται μια συζήτηση τις πρώτες μέρες της κβαντομηχανικής, στην οποία ο Dirac εξέφρασε την πεποίθηση ότι κάποιος πρέπει να αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα τη

²⁰⁴ ΑΗΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968).

²⁰⁵ Συζήτηση με τον Dirac (Τεργέστη, Ιούνιος 1968, Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

²⁰⁶ Επισήμανε ότι για την επανακανονικοποίηση της μάζας θα μπορούσε κανείς να εργαστεί με το πεδίο Wentzel.

²⁰⁷ ΑΗΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

²⁰⁸ ΑΗΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969).

φορά ενώ ο Heisenberg πίστευε ότι πρέπει να αντιμετωπίζεται ταυτόχρονα ένα σύνολο προβλημάτων ή να μην αντιμετωπίζεται κανένα²⁰⁹. “Πολλοί άνθρωποι έχουν την ίδια άποψη με τον Heisenberg, αλλά είναι απλά πολύ δύσκολο να λύσεις πολλά προβλήματα ταυτόχρονα. Από νωρίς (ήδη από το Μπρίστολ) είχα την άποψη ότι τα πάντα στη Φύση ήταν απλά προσεγγίσεις και ότι η επιστήμη θα αναπτυσσόταν μέσω όλο και ακριβέστερων προσεγγίσεων, αλλά ποτέ δεν θα επιτύγχανε την πλήρη ακρίβεια. Απέκτησα αυτή την άποψη μέσω των σπουδών μου ως μηχανικός, οι οποίες πιστεύω ότι με επηρέασαν πάρα πολύ. Η σημερινή κβαντική θεωρία είναι πιθανά μόνο μια προσέγγιση σε σχέση με τη μελλοντική πρόοδο. Πιστεύω ότι θα χρειαστούν αρκετές νέες ιδέες ώστε να ξεφύγουμε από τις δυσκολίες της σημερινής φυσικής και ότι αυτές οι ιδέες θα εμφανίζονται μεμονωμένα κάθε φορά με διαλείμματα αρκετών χρόνων μεταξύ τους”²¹⁰.

Οι συνεισφορές του Dirac στη θεωρητική και μαθηματική φυσική είναι αξιοσημείωτες, κρίνοντάς τις με τον πιο αυστηρό τρόπο. Τον Οκτώβριο του 1932, διαδέχτηκε τον Sir Joseph Larmor ως Λουकाσιανός Καθηγητής Μαθηματικών στο Cambridge. Το 1933, μόλις δέκα χρόνια μετά την έναρξη έρευνας στη θεωρητική φυσική, ο Dirac βραβεύτηκε, μαζί με τον E. Schrödinger, με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για την “ανακάλυψη νέων γόνιμων μορφών της θεωρίας του ατόμου και τις εφαρμογές της”²¹¹. Το πρωτοπόρο έργο του Dirac στην κβαντική θεωρία του πρόσφερε όλες τις διακρίσεις, τις οποίες θα μπορούσε ένας επιστήμονας να επιτύχει: Fellow στο St. John’s College 1927, Fellow της Royal Society το 1930, βραβείο Hopkins της Cambridge Philosophical Society για την περίοδο 1927-30, βραβείο Νόμπελ το 1933, Royal Medal το 1939 και Copley Medal της Royal Society το 1952.

Στο μικρό τμήμα της επιστημονικής ζωής του που συζητήθηκε σε αυτό το άρθρο, τη χρυσή περίοδο μεταξύ 1924 και 1933, ο P.A.M. Dirac δημιούργησε τη γλώσσα της θεωρητικής φυσικής και έγινε η προσωποποίηση εκείνης της εποχής.

²⁰⁹ W. Heisenberg, “Physics and Beyond”, 101-102.

²¹⁰ ΑΗQΡ, Συζήτηση με τον Dirac (Μαϊάμι, 28 Μαρτίου 1969), Ομιλία του Dirac με θέμα “Σχετικότητα και Κβαντομηχανική” στο πανεπιστήμιο του Τέξας, 14 Απριλίου 1970.

²¹¹ Από την παρουσίαση του H. Pleijel, προέδρου της Επιτροπής Νόμπελ για τη Φυσική (Nobel Lectures in Physics, 1922-41, Amsterdam, 1965, p. 289): “Η θεωρία της κυματομηχανικής που έχετε αναπτύξει χαρακτηρίζεται από την παγκοσμιότητά της, αφού από την αρχή απαιτήσατε να ικανοποιηθεί το αξίωμα της θεωρίας της σχετικότητας. Με αυτό τον τρόπο δείξατε ότι η ύπαρξη του σπιν των ηλεκτρονίων και οι ιδιότητές του είναι συνέπεια της θεωρίας αυτής και όχι απλά μια υπόθεση. Επιπλέον καταφέρατε να διαιρέσετε την κυματοσυνάρτηση σε δύο, οι οποίες οδηγούν σε δύο συστήματα λύσεων, το ένα εκ των οποίων απαιτεί την ύπαρξη ενός θετικά φορτισμένου ηλεκτρονίου του ίδιου μεγέθους και φορτίου με το αρνητικό ηλεκτρόνιο. Η πειραματική ανακάλυψη της ύπαρξης του ποζιτρονίου επιβεβαίωσε τη θεωρία σας με θαυμαστό τρόπο. Για την ανακάλυψή σας νέων γόνιμων μορφών της θεωρίας των ατόμων και για τις εφαρμογές της η Βασιλική Ακαδημία Επιστημών σας απονέμει το βραβείο Νόμπελ”.

Ευχαριστίες

Κατά τη διάρκεια των προηγούμενων αρκετών ετών, είχα την τεράστια ευτυχία να συζητήσω με τον Paul Dirac σε διάφορα μέρη - στην Τεργέστη, στη Νέα Υόρκη, στο Μαϊάμι και στο Austin - από τις οποίες έμαθα πολλά για το έργο του και την ανάπτυξη της κβαντομηχανικής και της πρόσφατης φυσικής. Ο Dirac μου επέτρεψε ευγενικά να χρησιμοποιήσω παραθέματα από αυτές τις συζητήσεις και από άλλες συνεντεύξεις του και επιθυμώ να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στο πρόσωπό του.

Ο S. Chandrasekhar μου μίλησε για τα χρόνια που ο Dirac πέρασε στο Cambridge και τις προσωπικότητες που γνώρισε εκεί. Συζητήσαμε συχνά το έργο του Dirac και του είμαι ευγνώμων για αυτές τις συζητήσεις.

Είμαι ιδιαίτερα υποχρεωμένος στον Eugene Wigner, ο οποίος μου έδωσε κάθε ευκαιρία να ακολουθήσω μαζί του τα επιστημονικά, ιστορικά και φιλοσοφικά ερωτήματα, συμπεριλαμβανομένου του έργου και της προσωπικότητας του “διάσημου κουνιάδου του”²¹².

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον Helmut Rechenberg, που με βοήθησε στην έρευνά μου για το επιστημονικό έργο του Dirac και στην οργάνωση του άρθρου αυτού.

Τέλος, θα ήθελα μαζί με όλους τους άλλους που συνεισέφεραν σε αυτό τον τόμο να ευχηθώ χρόνια πολλά στον Paul Dirac.

²¹² Το 1937 ο Dirac παντρεύτηκε την Margit Wigner, αδερφή του Eugene Wigner. Η Margit είπε στον George Gamow τη δεκαετία του 1960, ότι ο Dirac είχε πει σε κάποιον επισκέπτη τους: “Επιτρέψτε μου να σας συστήσω την αδερφή του Wigner, η οποία είναι τώρα η σύζυγός μου” (ΣτΜ).

P.A.M. Dirac

Βιβλιογραφία 1924 – 1933

1. "Dissociation under a Temperature Gradient", Proc. Camb. Phil. Soc. 22, 132-137, (1924). (Rec. March 3, 1924).
2. "Note on the Relativity Dynamics of a Particle", Phil. Mag. 47, 1158-1159 (1924) (Rec. April 1924).
3. "Note on the Doppler Principle and Bohr's Frequency Condition", Proc. Camb. Phil. Soc. 22, 432-433, (1924). (Rec. May 19, 1924).
4. "The Conditions for Statistical Equilibrium between Atoms, Electrons and Radiation", Proc. Roy. Soc. (London) A106, 581-596 (1924). (Rec. July 8, 1924).
5. "The Adiabatic Invariants of the Quantum Integrals", Proc. Roy. Soc. (London) A107, 725-734 (1925). (Rec. December 19, 1924).
6. "The Effect of Compton Scattering by Free Electrons in a Stellar Atmosphere", Monthly Notices Roy. Astron. Soc. (London) 85, 825-832 (1925) (Submitted in May 1925).
7. "The Adiabatic Hypothesis for Magnetic Fields", Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 69-72 (1925) (Rec. December 19, 1924).
8. "The Fundamental Equations of Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. (London) A109, 642-653 (Rec. November 7, 1925).
9. "Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom", Proc. Roy. Soc. (London) A110, 561-579 (1926) (Rec. January 22, 1926).
10. "The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. (London) A111, 281-305 (1926) (Rec. March 27, 1926).
11. "Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering", Proc. Roy. Soc. (London) A111, 405-423 (1926) (Rec. April 29, 1926).
12. "Quantum Mechanics", Cambridge University dissertation, May 1926.
13. "On Quantum Algebra", Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 412-418 (1926). (Rec. July 26, 1926).
14. "On the Theory of Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. (London) A112, 661-677 (1926). (Rec. August 26, 1926).
15. "The Compton Effect in Wave Mechanics", Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 500-507 (1926) (Rec. November 22, 1926).

16. "The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. (London) A113, 621-641 (1927), (Rec. December 2, 1926).
17. "The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation", Proc. Roy. Soc. (London), A114, 243-265, 1927 (Rec. February 2, 1927).
18. "The Quantum Theory of Dispersion", Proc. Roy. Soc. (London), A114, 710-728 (1927) (Rec. April 4, 1927).
19. "Über die Quantenmechanik der Stoßvorgänge", Z. Phys. 44, 585-595 (1927) (Rec. June 28, 1927).
20. "The Quantum Theory of the Electron" Part I, Proc. Roy. Soc. (London), A117, 610-624 (1928) (Rec. January 2, 1928).
21. "The Quantum Theory of the Electron" Part II, Proc. Roy. Soc. (London), A118, 351-361 (1928) (Rec. February 2, 1928).
22. "Über die Quantentheorie des Elektrons", Phys. Zeitschr. 29, 561-563 (1928). (Report by H. Falkenhagen on the lecture of Dirac at the "Leipziger Universitätswochen", June 18-23, 1928, approved by Dirac).
23. "The Basis of Statistical Mechanics" (Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 62-66 (1929) (Rec. October 17, 1928).
24. "Quantum Mechanics of Many Electron Systems" (Proc. Roy. Soc. (London) A123, 714-733 (1929) (Rec. March 12, 1929).
25. "A Theory of Electrons and Protons", Proc. Roy. Soc. (London) A126, 360-365 (1930), (Rec. December 6, 1929).
26. "On the Annihilation of Electrons and Protons", Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 361-375 (1930), (Rec. March 26, 1930).
27. "Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom", Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 376-385, (1930), (Read May 19, 1930).
28. "The Proton", Nature 126, 605 (1930). (Paper read before Section A of the British Association at Bristol on September 1930).
29. "The Principles of Quantum Mechanics", Oxford 1930, pp. X and 257.
30. "Note on the Interpretation of the Density Matrix in the Many Electron Problem", Proc. Camb. Phil. Soc. 27, 240-243 (1931). (Read December 8, 1930).

31. "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field", Proc. Roy. Soc. (London) A133, 60-72 (1931), (Rec. May 29, 1931).
32. "Photo-Electric Absorption in Hydrogen-Like Atoms", (with J.W. Harding), Proc. Camb. Phil. Soc. 28, 209-218 (1932). (Rec. January 15, 1932).
33. "Relativistic Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. (London) A136, 453-464 (1932), (Rec. March 24, 1932).
34. "On Quantum Electrodynamics", with V.A. Fock and B. Podolsky, Phys. Zeitschr. der SU 2, 468-479 (1932), (Rec. October 25, 1932).
35. "The Lagrangian in Quantum Mechanics", Phys. Zeitschr. der SU 3, 64-72 (1933), (Rec. November 19, 1932).
36. "The Reflection of Electrons from Standing Light Waves", with P.L. Kapitza, Proc. Camb. Phil. Soc. 29, 297-300 (1933) (Rec. March 24, 1933).
37. "Homogeneous Variables in Classical Dynamics", Proc. Camb. Phil. Soc. 29, 389-401 (1933), (Rec. May 16, 1933).
38. "Théorie du Positron", Septième Conseil de Physique Solvay (Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques), 22-29 October 1933, Gauthier-Villars, Paris, 1934.
39. "Theory of Electrons and Positrons", Nobel Lectures – Physics 1922-41, Amsterdam 1965, pp. 320-325 (Nobel Lecture, December 12, 1933).