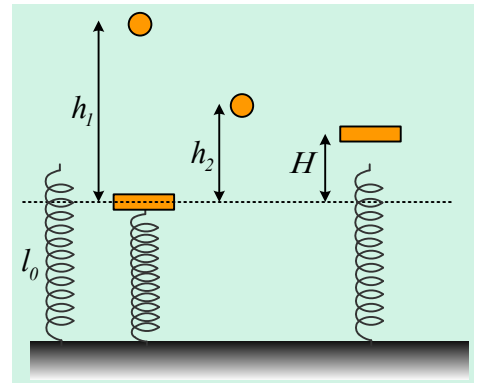


Μια ελαστική κρούση και τα ύψη πριν και μετά

Μια σφαίρα μάζας m αφήνεται από ύψος h_1 να πέσει και να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά, με μια πλάκα μάζας M η οποία ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο έχει συμπίεσει, όπως φαίνεται στο σχήμα, χωρίς να είναι δεμένη με αυτό. Μετά την κρούση η σφαίρα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και φτάνει σε μέγιστο ύψος h_2 . Η πλάκα ενώ κινείται αρχικά προς τα κάτω, τελικά κινείται προς τα πάνω και αφού εγκαταλείψει το ελατήριο φτάνει σε μέγιστο ύψος H , όπου όλα τα ύψη μετρούνται από την αρχική θέση ισορροπίας της πλάκας.



- i) Να αποδείξετε ότι η πλάκα έχει μεγαλύτερη μάζα από την σφαίρα ($M > m$).
- ii) Αν p_1 το μέγιστο **μέτρο** της ορμής της σφαίρας κατά την παραπάνω κίνηση, ενώ το αντίστοιχο μέτρο της ορμής της πλάκας, αμέσως μετά την κρούση, είναι p_2 θα ισχύει:
 - α) $p_2 = 2p_1$, β) $2p_1 < p_2 < p_1$, γ) $p_2 = p_1$.
- iii) Αν $M = 2m$, τότε για τα προαναφερόμενα ύψη ισχύει:
 - α) $h_1 - h_2 > 2H$, β) $h_1 - h_2 = 2H$, γ) $h_1 - h_2 < 2H$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

- i) Θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική, τότε η σφαίρα φτάνει στην πλάκα με μια θετική ταχύτητα v_1 , ενώ αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα v'_1 με φορά προς τα πάνω, άρα αρνητικής αλγεβρικής τιμής, για την οποία ισχύει:

$$v'_1 = \frac{m - M}{m + M} v_1 < 0 \rightarrow m - M \rightarrow m < M$$

- ii) Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την πτώση της σφαίρας, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση ισορροπίας της πλάκας ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau \rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow |v_1| = \sqrt{2gh_1}$$

Όμοια και για την κίνηση της σφαίρας μετά την κρούση μέχρι να φτάσει σε μέγιστο ύψος h_2 , βρίσκουμε:

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau \rightarrow \frac{1}{2}mv_1'^2 = mgh_2 \rightarrow |v'_1| = \sqrt{2gh_2}$$

Από την σύγκριση των **μέτρων** των δύο παραπάνω ταχυτήτων προκύπτει ότι η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση, έχει μικρότερο μέτρο από την ταχύτητα v_1 . Στη συνέχεια βέβαια η σφαίρα επιβραδύνεται οπότε τελικά βλέπουμε ότι η ορμή της σφαίρας γίνεται μέγιστη ελάχιστα πριν την κρούση οπότε $p_1 = mv_1$.

Εφαρμόζοντας τώρα την ΑΔΟ για την κρούση παίρνουμε:

$$\vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu \rightarrow mv_l + 0 = -m|v_l'| + Mv_2' \rightarrow p_2 = mv_l + m|v_l'| \quad (1)$$

Από την παραπάνω εξίσωση (1) προκύπτει ότι η ορμή που αποκτά η πλάκα, έχει μέτρο από την μια μεγαλύτερο από $p_1 = mv_1$, αλλά ταυτόχρονα είναι μικρότερο από $2p_1 = 2mv_1$, αφού $v_l > |v_l'|$. Σωστό το β).

- iii) Αν πάρουμε ως σύστημα τα δύο σώματα και το ελατήριο, τότε η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Έτσι αν πάρουμε για αρχική κατάσταση τη στιγμή που αφήνεται η σφαίρα να πέσει και τελική τις θέσεις που τα δυο σώματα βρίσκονται στο μέγιστο ύψος h_2 και H αντίστοιχα, με $U=0$ στην θέση ισορροπίας της πλάκας, θα έχουμε:

$$K_a + U_a = K_\tau + U_\tau \rightarrow 0 + mgh_1 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 0 + mgh_2 + MgH \rightarrow$$

$$mg(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 2mgH \rightarrow$$

$$h_1 - h_2 + \frac{k(\Delta l)^2}{2g} = 2H \rightarrow$$

$$h_1 - h_2 < 2H$$

Σωστό το γ).

dmargaris@gmail.com