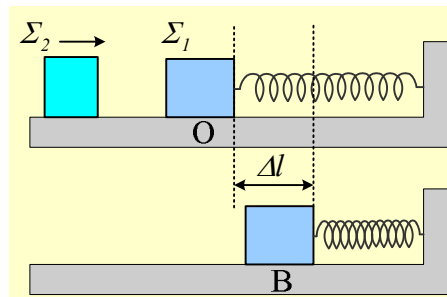


Μια ελαστική κρούση και οι μετέπειτα κινήσεις

Πάνω σε ένα μη λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$, στη θέση O , δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1\text{kg}$ κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με κατεύθυνση προς το σώμα Σ_1 , με το οποίο μετά από λίγο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά. Τα δυο σώματα παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο $\mu=0,25$. Μετά την κρούση το Σ_1 αφού συμπιέσει το ελατήριο κατά $\Delta l=0,4\text{m}$ όταν μηδενίζεται η ταχύτητά του στη θέση B , επιστρέφει και σταματά στην αρχική του θέση O .



- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Σ_1 καθώς και η επιτάχυνσή του, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος στη θέση της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου B , ελάχιστα πριν τον μηδενισμό της ταχύτητάς του και ελάχιστα μετά όταν αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά.
- iii) Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_1 κατά την κρούση;
- iv) Να βρεθεί η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, όταν πάψει η κίνησή τους.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Εφαρμόζουμε για το σώμα Σ_1 το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) ανάμεσα στη θέση O , αμέσως μετά την κρούση και στην ίδια θέση, μόλις επιστρέψει και σταματήσει:

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = W_{w_l} + W_{N_l} + W_{F_{ελ}} + W_{T_l} \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_l'^2 = 0 + 0 + 0 - T_{s_{ολ}} \quad (1)$$

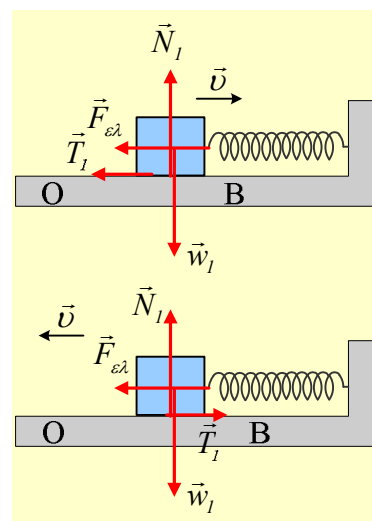
Όπου οι δυνάμεις βάρος και κάθετη αντίδραση δεν παράγουν έργο, αφού είναι κάθετες στην μετατόπιση, ενώ η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική δύναμη και το έργο της είναι μηδενικό για κλειστή διαδρομή. Αντίθετα η τριβή ολίσθησης δεν είναι δύναμη συντηρητική, έχει κατεύθυνση πάντα αντίθετη της ταχύτητας και το έργο της θα είναι ίσο:

$$W_{T_l} = W_{OB} + W_{BO} = -T_l \cdot (OB) - T_l \cdot (OB) = -T_l \cdot 2\Delta l = -2\mu m_l g \Delta l$$

Έτσι επιστρέφοντας στην εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$v_l' = \sqrt{4\mu g \cdot \Delta l} = \sqrt{4 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot 0,4\text{m}} / \text{s} = 2\text{m/s}$$

Η παραπάνω ταχύτητα είναι η ταχύτητα του Σ_1 , αμέσως μετά την κρούση, με φορά προς τα δεξιά. Αλλά τότε ασκείται πάνω η δύναμη τριβής, ενώ η δύναμη του ελατηρίου έχει μηδενικό μέτρο, με αποτέλεσμα να αποκτά επιτάχυνση προς τα αριστερά (βλέπε πρώτο σχήμα παραπάνω), αντίθετης φοράς και **μέτρου**:



$$\Sigma F_{l,0} = m_l a_{l,0} \rightarrow T_l = m_l a_{l,0} \rightarrow \mu m_l g = m_l a_{l,0} \rightarrow$$

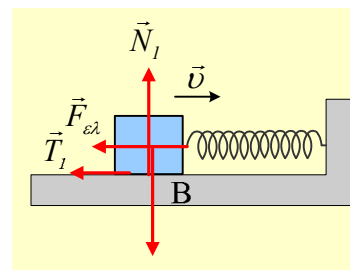
$$a_{l,0} = \mu g = 0,25 \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$$

- ii) Εφαρμόζουμε ξανά για το σώμα Σ_1 το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) ανάμεσα στη θέση Ο, αμέσως μετά την κρούση και στην θέση Β, όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του:

$$\begin{aligned} K_\tau - K_\alpha &= W_{w_l} + W_{N_l} + W_{F_{ελ}} + W_{T_l} \rightarrow \\ 0 - \frac{1}{2} m_l v_l'^2 &= 0 + 0 - \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 - T_l \Delta l \rightarrow \\ k &= \frac{m_l v_l'^2 - 2 \mu m_l g \cdot \Delta l}{(\Delta l)^2} \rightarrow \\ k &= \frac{2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot 0,4}{0,4^2} \text{ N/m} = 37,5 \text{ N/m} \end{aligned}$$

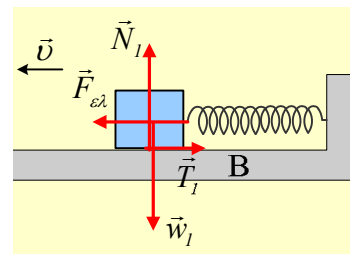
Αλλά τότε για την επιτάχυνση του Σ_1 , ελάχιστα πριν το μηδενισμό της ταχύτητάς του στη θέση Β, αυτή θα έχει φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{l,1} &= m_l a_{l,1} \rightarrow F_{ελ} + T_l = m_l a_{l,1} \rightarrow k \cdot \Delta l + \mu m_l g = m_l a_{l,1} \rightarrow \\ a_{l,1} &= \mu g + \frac{k \cdot \Delta l}{m_l} \rightarrow \\ a_{l,1} &= 0,25 \cdot 10 \text{ m/s}^2 + \frac{37,5 \cdot 0,4}{2} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



Ενώ μόλις μηδενιστεί η ταχύτητά του και αρχίσει την επιστροφή του προς το Ο, θα έχουμε, επιτάχυνση προς τα αριστερά, μέτρον:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{l,2} &= m_l a_{l,2} \rightarrow F_{ελ} - T_l = m_l a_{l,2} \rightarrow k \cdot \Delta l - \mu m_l g = m_l a_{l,2} \rightarrow \\ a_{l,2} &= \frac{k \cdot \Delta l}{m_l} - \mu g = \frac{37,5 \cdot 0,4}{2} \text{ m/s}^2 - 0,25 \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 5 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



- iii) Αν v_2 η ταχύτητα του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση, τότε μετά την κρούση τα σώματα έχουν ταχύτητες (η προς τα δεξιά κατεύθυνση λαμβάνεται ως θετική):

$$v_l' = \frac{2m_2}{m_l + m_2} v_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{m_2 - m_l}{m_l + m_2} v_2 \quad (3)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2) ως προς v_2 βρίσκουμε:

$$v_2 = \frac{m_l + m_2}{2m_2} v_l' = \frac{2+1}{2 \cdot 1} 2 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

Και με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

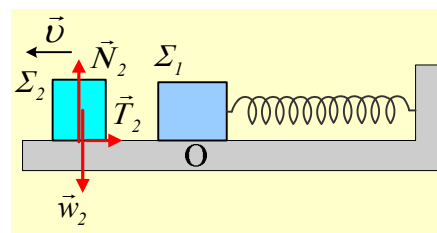
$$v_2' = \frac{m_2 - m_l}{m_l + m_2} v_2 = \frac{1-2}{2+1} 3 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s}$$

Το σώμα δηλαδή Σ_2 μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.

Οπότε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 που μεταφέρεται στο σώμα Σ_1 , είναι ίσο:

$$\pi = \frac{K'_1}{K_2} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} 100\% = \frac{2 \cdot 2^2}{1 \cdot 3^2} 100\% = \frac{800}{9} \% = 88,9\%$$

iv) Σύμφωνα με την εκφώνηση το σώμα Σ_1 θα ηρεμήσει τελικά στη θέση O, που έγινε και η κρούση. Εφαρμόζουμε για το σώμα Σ_2 το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνησή του μετά την κρούση, αφού σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, όπως στο διπλανό σχήμα:



$$K_\tau - K_\alpha = W_{w_2} + W_{N_2} + W_{T_2} \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 0 + 0 - T_2 d \rightarrow$$

Όπου d η απόσταση που θα διανύσει το Σ_2 μέχρι να σταματήσει, όπου προφανώς θα είναι και η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων. Λαμβάνοντας δε υπόψη ότι $T_2 = \mu m_2 g$ βρίσκουμε με αντικατάσταση:

$$d = \frac{m_2 v_2'^2}{2 \mu m_2 g} = \frac{v_2'^2}{2 \mu g} = \frac{l^2}{2 \cdot 0,25 \cdot 10} m = 0,2m$$

dmargaris@gmail.com