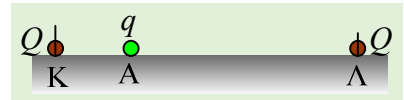


Μήπως το σφαιρίδιο επιστρέφει;

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο και μονωτικό δάπεδο, στα σημεία Κ και Λ, όπου (ΚΛ)=0,8m, έχουν στερεωθεί ακλόνητα δυο μικρά φορτισμένα σφαιρίδια με ίσα φορτία $Q=10^{-5}\text{C}$. Σε ένα σημείο Α, του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, όπου (ΚΑ)=d=0,2m, αφήνεται ένα τρίτο φορτισμένο σφαιρίδιο Σ, μάζας $m=0,3\text{g}$ και φορτίου $q=10^{-7}\text{C}$.



- Να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου Σ, λόγω της τοποθέτησής του μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο των δύο άλλων φορτίων, καθώς και η επιτάχυνση που θα αποκτήσει.
- Μετά από λίγο, το σφαιρίδιο φτάνει στη θέση Β, όπου (ΑΒ)=0,1m. Υποστηρίζεται ότι στη θέση Β το σφαιρίδιο έχει μικρότερη επιτάχυνση και μικρότερη δυναμική ενέργεια, από τις αντίστοιχες τιμές στην αρχική θέση Α. Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή πρόκειται για μια λανθασμένη πρόβλεψη.
- Ποια είναι η θέση Γ στην οποία το σφαιρίδιο Σ θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα, κατά την κίνησή του; Να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου στη θέση Γ, καθώς και την ταχύτητά του στη θέση αυτή.
- Ποια είναι η μικρότερη απόσταση στην οποία το Σ, θα πλησιάσει το ακίνητο σφαιρίδιο στην θέση Λ; Πόση θα είναι η δυναμική ενέργεια του Σ, στην μικρότερη αυτή απόσταση από το Λ;
- Μπορείτε να περιγράψετε την εξέλιξη της κίνησης το σφαιριδίου Σ;

Δίνεται $k_c = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$.

Απάντηση:

- Το δυναμικό στο σημείο Α, το οποίο απέχει $r_1=d=0,2\text{m}$ από το 1° σφαιρίδιο στο Κ και $r_2=3d=0,6\text{m}$ από το 2° φορτισμένο σφαιρίδιο στο Λ, είναι ίσο:

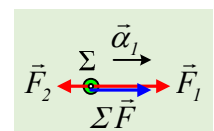
$$V_A = V_1 + V_2 = K_c \frac{Q}{r_1} + K_c \frac{Q}{r_2} = K_c Q \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,6} \right) V = 6 \cdot 10^5 V$$

Αλλά τότε η δυναμική ενέργεια του Σ, εξαιτίας της τοποθέτησής του στο σημείο Α, θα είναι:

$$U_A = qV_A = 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^5 V = 0,06 J$$

Εξάλλου το σφαιρίδιο θα δεχτεί απωστικές δυνάμεις από τα δυο άλλα σφαιρίδια, όπως στο σχήμα, οπότε για το μέτρο της συνισταμένης, η οποία κατευθύνεται προς το σημείο Λ (γιατί;) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F_1 - F_2 = K_c \frac{Qq}{r_1^2} - K_c \frac{Qq}{r_2^2} = K_c Qq \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \rightarrow \\ \Sigma F &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{0,2^2} - \frac{1}{0,6^2} \right) N = 0,2 N \end{aligned}$$



Αλλά τότε το σφαιρίδιο Σ, αποκτά επιτάχυνση προς τα δεξιά με μέτρο:

$$\Sigma F = ma_l \rightarrow a_l = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{0,2N}{3 \cdot 10^{-4} kg} = \frac{2}{3} \cdot 10^3 m/s^2$$

- ii) Στη θέση B, το σωματίδιο απέχει αποστάσεις 0,3m και 0,5m από τα δυο ακλόνητα φορτία, οπότε για το δυναμικό στην θέση αυτή, θα έχουμε:

$$V_B = K_c \frac{Q}{r'_1} + K_c \frac{Q}{r'_2} = K_c Q \left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5} \right) V = 4,8 \cdot 10^5 V$$

Οπότε η δυναμική του ενέργεια, είναι ίση:

$$U_B = qV_B = 10^{-7} \cdot 4,8 \cdot 10^5 V = 0,048 J$$

Αν συγκρίνουμε τις δυναμικές ενέργειες στις θέσεις A και B, βλέπουμε ότι $U_A > U_B$, πράγμα που θα έπρεπε να το περιμένουμε αφού η συνισταμένη δύναμη παράγει θετικό έργο, αυξάνοντας την κινητική ενέργεια του σφαιριδίου Σ. Ενέργεια από το μηδέν δεν μπορούμε να έχουμε. Αυξάνεται η κινητική ενέργεια, ενώ ταυτόχρονα έχουμε ισόποση μείωση της δυναμικής ενέργειας.

Όσον αφορά την επιτάχυνση:

$$\Sigma F_B = K_c \frac{Qq}{r'^2_1} - K_c \frac{Qq}{r'^2_2} = K_c Qq \left(\frac{1}{r'^2_1} - \frac{1}{r'^2_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{0,3^2} - \frac{1}{0,5^2} \right) N = 0,064 N$$

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma F_B}{m} = \frac{0,064 N}{3 \cdot 10^{-4} kg} \approx 0,21 \cdot 10^3 m/s^2$$

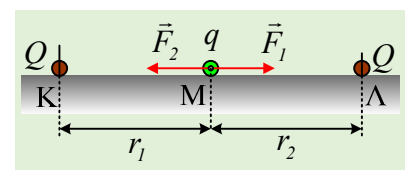
Βλέπουμε να έχει ελαττωθεί αρκετά η επιτάχυνση του σφαιριδίου, καθώς κινήθηκε προς τα δεξιά. Θα έπρεπε να το είχαμε προβλέψει; Ναι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι καθώς το σφαιρίδιο κινείται προς τα δεξιά η δύναμη F_1 μειώνεται ενώ αυξάνεται η δύναμη F_2 , πράγμα που έχει σαν αποτέλεσμα να μειώνεται η επιτάχυνση του σφαιριδίου Σ.

- iii) Με βάση την προηγούμενη απάντηση, για όσο διάστημα το μέτρο της δύναμης F_1 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της F_2 , το σφαιρίδιο Σ επιταχύνεται προς τα δεξιά. Όταν αντιστραφεί η σχέση και $F_2 > F_1$, το σφαιρίδιο θα επιβραδύνεται. Συνεπώς η μέγιστη ταχύτητα θα είναι στην θέση μηδενισμού της επιτάχυνσης ή ισοδύναμα στη θέση όπου οι δυο δυνάμεις αποκτούν το ίδιο μέτρο:

$$F_1 = F_2 \rightarrow K_c \frac{Qq}{r^2_1} = K_c \frac{Qq}{r^2_2} \rightarrow r^2_1 = r^2_2 \quad \text{ή} \quad r_1 = r_2$$

Βλέπουμε ότι το σφαιρίδιο αποκτά μέγιστη ταχύτητα στο μέσον Μ της ΚΛ. Για την δυναμική ενέργεια στην θέση Μ, έχουμε:

$$U_M = qV_M = q \left(K_c \frac{Q}{r_1} + K_c \frac{Q}{r_2} \right) = 2K_c \frac{Qq}{r_1} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 10^{-7}}{0,4} J = 0,045 J$$



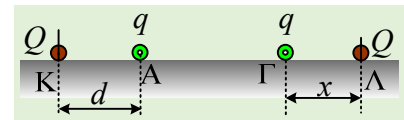
Αλλά η δύναμη από ένα ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητική, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή και αφού τα δύο φορτισμένα σωματίδια στα άκρα Κ και Λ μένουν ακίνητα, τελικά μπορούμε να αποδώσουμε την μηχανική ενέργεια στο σφαιρίδιο Σ, γράφοντας:

$$K_A + U_A = K_M + U_M \rightarrow$$

$$0 + U_A = \frac{1}{2} m v_M^2 + U_M \rightarrow$$

$$v_M = \sqrt{\frac{2(U_A - U_M)}{m}} = \sqrt{\frac{2(0,6 - 0,045)}{3 \cdot 10^{-4}}} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

- iv) Αφού μετά το μέσον Μ της ΚΛ το σφαιρίδιο επιβραδύνεται, κάποια στιγμή θα μηδενιστεί η ταχύτητά του σε ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει κατά x από το Λ. Εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΜΕ, μεταξύ των θέσεων Α και Γ:



$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow 0 + U_A = 0 + U_M \rightarrow K_c \frac{Qq}{d} + K_c \frac{Qq}{3d} = K_c \frac{Qq}{x} + K_c \frac{Qq}{4d-x} \rightarrow$$

$$\frac{4}{3d} = \frac{4d}{x(4d-x)} \rightarrow x^2 - 4dx + 3d^2 = 0 \rightarrow$$

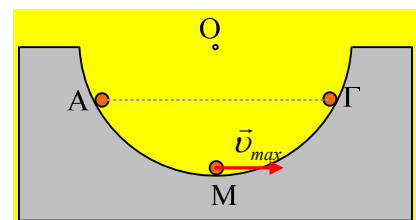
$$x_{1,2} = \frac{4d \pm \sqrt{16d^2 - 12d^2}}{2} \rightarrow x_1 = d = 0,2\text{m} \quad \text{ή} \quad x_2 = 3d = 0,6\text{m}$$

Η πρώτη λύση αναφέρεται στην θέση Γ (δεκτή λύση), ενώ η δεύτερη στο σημείο Α, την αρχική θέση...

- v) Με βάση τα παραπάνω, η θέση Γ είναι η συμμετρική της αρχικής θέσης, ως προς το μέσον Μ της ΚΛ. Τώρα έχουμε το σφαιρίδιο στην θέση Γ, με μηδενική ταχύτητα και δυναμική ενέργεια $U_\Gamma = U_A = 0,06\text{J}$, το οποίο θα δεχθεί συνισταμένη δύναμη μέτρου $0,2\text{N}$, με φορά προς τα αριστερά, θα κινηθεί και θα φτάσει στο Μ, με μέγιστη ταχύτητα μέτρου 10m/s , ενώ θα συνεχίσει και θα φτάσει ξανά στην θέση Α, με μηδενική ταχύτητα. Θα έχουμε δηλαδή μια επανάληψη του φαινομένου και μια περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων Α και Γ. Θα έχουμε μια ταλάντωση...

Σχόλιο:

Ας δούμε ένα μηχανικό ανάλογο: Ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα κοίλο λείο ημισφαίριο, στο εσωτερικό σημείο Α του οποίου αφήνουμε να κινηθεί μια μικρή σφαίρα. Τι θα ακολουθήσει; Η σφαίρα θα φτάσει στο σημείο Μ, όπου θα έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια (άρα την μέγιστη κινητική ενέργεια) και θα συνεχίσει φτάνοντας στην θέση Γ, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το Α (αποκτώντας ίση δυναμική ενέργεια) και θα επιστρέψει, εκτελώντας μια ταλάντωση. Τα δύο φαινόμενα είναι απολύτως όμοια...



dmargaris@gmail.com