



Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας
Φυσικός

Κλασικές και Κβαντικές Αρχές Αβεβαιότητας

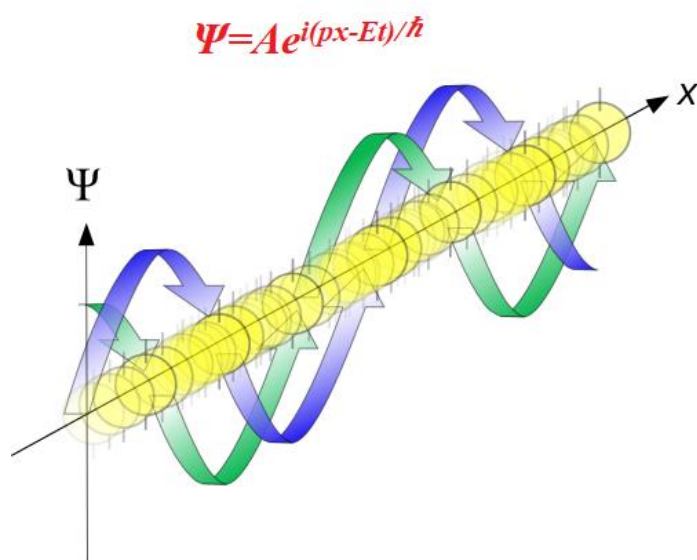
Μια διαδρομή από το θεώρημα bandwidth
και τη θεωρία του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού
στις πανίσχυρες κβαντομηχανικές αβεβαιότητες της δομής του Κόσμου

Γενικό Λύκειο Αγριάς Μαγνησίας
Φθινόπωρο 2022

Θρασύβουλος Κων. Μαχαίρας

Φυσικός

Κλασικές και Κβαντικές Αρχές Αβεβαιότητας



Γενικό Λύκειο Αγριάς Μαγνησίας

Φθινόπωρο 2022

Οι κυματικές εξισώσεις τροφοδοτούν με αρχές αβεβαιότητας
την πραγματικότητα που φιλοδοξούν να περιγράψουν
και στα «υπόγεια» του Κόσμου ανασταίνουν «*Φαντάσματα της Όπερας*»
για να ελέγχουν τη σκηνή.

... στην Γιο

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	ix
Σκοπός του βιβλίου	xii
Προτάσεις για τον Δάσκαλο	xiv
Τιμές θεμελιωδών σταθερών και άλλων μεγεθών	xv

Ενότητα 1: Σχόλια πάνω στη φυσική των κυμάτων

1.1 Κύματα και σωματίδια, δύο διαφορετικές παρουσίες	1
1.2 Η κυματική εξίσωση	2
1.3 Τα κύματα ως υπερθέσεις μονοχρωματικών κυμάτων	3
1.4 Θεώρημα bandwidth - Σχέσεις κλασικής αβεβαιότητας	7

Ενότητα 2: Σχόλια πάνω στη θεωρία των υλικών κυμάτων και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης

2.1 Παράξενα φαινόμενα στις αρχές του 20ου αιώνα	11
2.2 Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης	12
2.3 Το θεώρημα bandwidth στα υλικά κύματα	15
2.4 Οι σχέσεις bandwidth δεν είναι οι σχέσεις Heisenberg	19

**Ενότητα 3: Το μοντάρισμα και η ερμηνευτική απογείωση
της εξίσωσης Schrödinger**

3.1	Το μοντάρισμα της εξίσωσης Schrödinger	23
3.2	«Ομοιότητες» κυματικής εξίσωσης και εξίσωσης Schrödinger	26
3.3	Η ξεχωριστή αξία της εξίσωσης Schrödinger και των σχέσεων αβεβαιότητας του Heisenberg	28
3.4	Ο κβαντικός ορισμός της μέσης τιμής φυσικού μεγέθους	30
3.5	Η εξίσωση Schrödinger, πρώτη ύλη για την εξίσωση Dirac	35

Ενότητα 4: Σχόλια πάνω στις (κβαντικές) αρχές αβεβαιότητας

4.1	Ο ορισμός της αβεβαιότητας	37
4.2	Οι σχέσεις αβεβαιότητας	39
4.3	Τροχιακή στροφορμή, ένα καταπληκτικό κβαντικό μέγεθος	41
4.4	Κβαντικός ορισμός του χρόνου στις σχέσεις αβεβαιότητας	43
4.5	Σχετικιστική απόδοση των σχέσεων αβεβαιότητας	45
4.6	Η διαφοροποίηση της χωρικής από τη χρονική σχέση αβεβαιότητας ...	46
4.7	Η «μετουσίωση» των σχέσεων bandwidth σε κβαντικές σχέσεις αβεβαιότητας	47
4.8	Η Φυσική δίνει ξεχωριστή αξία στις μαθηματικές σχέσεις	51
4.9	Μήκος κύματος ηλεκτρονίου ή αρχή αβεβαιότητας;	52
4.10	Η αξία των προσεγγιστικών ισοτήτων αβεβαιότητας	53
4.11	Κβαντική αναθεώρηση της έννοιας «αιτιότητα»	53
4.12	Η διαδικασία της μέτρησης	54
4.13	Ο «λεπτός» τρόπος διδασκαλίας των αρχών αβεβαιότητας	56

**Ενότητα 5: Η φύση του φωτός,
ένα μάθημα σε παιδιά και μια κουβέντα με ένα λουλούδι**

5.1	Μια πραγματική διδασκαλία για το φως	59
5.2	Κωδικοποίηση και επισημάνσεις	65
5.3	Όπως πάντα, το φως μας βάζει σε άξιες σκέψεις	66

5.4	Λίγες ερωτήσεις για τα φωτόνια	69
5.5	Μια κουβέντα με ένα λουλούδι	76
5.6	Η ιερή διαδρομή προς μια καινούρια λογική	79

Ενότητα 6: **Εφαρμογές των αρχών αβεβαιότητας**

6.1	Η αβεβαιότητα στα ασταθή συστήματα	81
6.2	Πλάτος ενεργειακών σταθμών	82
6.3	Σχέσεις αβεβαιότητας στα φωτόνια	82
6.4	«Σφάλμα μέτρησης» της ενέργειας διηγεμένης κατάστασης ατόμου. Η αρχή αβεβαιότητας στο πείραμα Frank-Hertz	83
6.5	Η υπέρθεση κβαντικών καταστάσεων προκαλεί εξέλιξη	84
6.6	Η αβεβαιότητα συνοδεύεται από φαινόμενα περίθλασης	86
6.7	Τα οπτικά όργανα έχουν διακριτικό όριο	88
6.8	Οι μετρητικές συσκευές είναι κβαντικά συστήματα	91
6.9	Η αρχή αβεβαιότητας στο πείραμα Stern-Gerlach	93
6.10	Ο εγκλωβισμός δημιουργεί «νευρικόττες»	96
6.11	Το άτομο είναι Άτλας. Κρατά στους ώμους του τη Γη	97
6.12	Η πυρηνική ενέργεια είναι εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη της χημικής	100
6.13	Άσπροι νάνοι και αστέρες νετρονίων	101
6.14	Φορτισμένο σωματίδιο σε μαγνητικό πεδίο	103
6.15	«Ανακαλύπτοντας» σωματίδια αλληλεπιδράσεων	107
6.16	Διαλύοντας την έννοια της τροχιάς	109
6.17	Η αποτυχία του ατομικού μοντέλου Rutherford	110
6.18	Βγάζοντας καθαρές αναμνηστικές φωτογραφίες με τα κουάρκ	112
6.19	Ακτίνα ατόμου υδρογόνου και ενέργεια ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση	116
6.20	Ακτίνα ατόμων ή ιόντων με 2 ηλεκτρόνια και ενέργεια θεμελιώδους κατάστασης	117
6.21	Τα ίχνη των «τροχιών» σε καταγραφικά συστήματα	119
6.22	Οι αρχές αβεβαιότητας εξασφαλίζουν τη δημιουργία	119

6.23	Οι αρχές αβεβαιότητας επιτρέπουν «παρανομίες» και «εξωφρενικούς» μηχανισμούς	121
6.24	Κάποιος πρέπει να βάλει όρια στις αρχές της αβεβαιότητας	126
6.25	Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι άπειρης εμβέλειας	127
6.26	Ακτινοβολία Hawking	128

Ενότητα 7: **Ιστορικά βαρίδια:**

Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός και υλικά κύματα

7.1	1ο βαρίδι: Οι υποατομικές οντότητες έχουν διπλή φύση	131
7.2	2ο βαρίδι: Όλα είναι κυματοπακέτα μονοχρωματικών υλικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	132
7.3	3ο βαρίδι: Τα υλικά κύματα είναι κύματα πιθανότητας;	135

Ενότητα 8: **Το φαινόμενο Compton**

8.1	Θεωρητική ανάλυση	139
8.2	Doppler στο φαινόμενο Compton και προβληματισμοί με την κλασική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	150
8.3	Η αρχή της αβεβαιότητας στο φαινόμενο Compton	156
8.4	Προβληματισμοί πάνω στη διδασκαλία του φαινομένου Compton	158

	Επίλογος	165
	Μια ευχή	166

Εισαγωγή

Η Φυσική έχει μια συγκλονιστική ιδιομορφία που δε διαθέτει καμιά άλλη ανθρώπινη δραστηριότητα. Ένα και μόνο πείραμα, μία και μόνη παρατήρηση μπορεί να την αναγκάσει να θυσιάσει, «μέσα σε μια νύχτα», τη λογική των θεωριών της και να αλλάξει συθέμελα τη δομή των συλλογισμών της, αλλάζοντας παράλληλα και την λογική των ανθρώπων.

Αυτό δε σημαίνει ότι καταργεί τις ήδη υπάρχουσες πετυχημένες και πολλαπλά ελεγμένες θεωρίες της, αλλά ότι βάζει όρια σε αυτές πέρα των οποίων αρχίζει μια διαφορετική σκέψη και μια πιο ισχυρή λογική, ικανή να διακρίνει τα μακρινά και τα βαθύτερα των δομών της Φύσης.

Η Φυσική ξεκίνησε ουσιαστικά με τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα προκαλώντας **την πρώτη σαρωτική αλλαγή στη λογική** των ανθρώπων.

Η πτώση του μήλου έγινε ίδια με την κίνηση της Σελήνης και των πλανητών. Η εμφάνιση των κομητών δεν ήταν πλέον θυμός υπερφυσικών όντων, αλλά νομοτέλεια. Η τελειότητα του κύκλου και οι αρμονίες των σφαιρών των Ουρανών όπου «ζούσαν» οι Θεοί έδωσαν τη θέση τους στις «ατελείς», «γήινες» κωνικές τομές· ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές. Οι Ουρανοί των αθανάτων υποχρεώθηκαν να χαμηλώσουν για να δεχτούν μέσα τους τη Γη των θνητών. Το πείραμα απέκτησε καθοριστικό λόγο και ανυπέρβλητη αξία μετατρέποντας σε ασήμαντες σκιές τις θρησκοληψίες και τις άβουλες υποταγές σε αυθεντίες.

Η δεύτερη σαρωτική αλλαγή στη λογική των ανθρώπων ήρθε με την ειδική και γενική σχετικότητα, δηλαδή με τη θεωρία ουσιαστικά ενός μόνο Φυσικού, του Αϊνστάιν.

Ο χώρος και ο χρόνος παύουν πλέον να υφίστανται ως ανεξάρτητοι μεταξύ τους, κοκάλινοι, αμέτοχοι θεατές ενός φυσικού γίνεσθαι και εμφανίζονται ως ενιαίος χωρόχρονος με ελαστικότητα και δυναμική στα φαινόμενα και στη γεωμετρία του Κόσμου.

Το φως βάζει όριο στις ταχύτητες που κινούνται τα σώματα και συνεπώς στην αιτιότητα, η οποία τώρα αποκτά σαφέστατο μαθηματικό ορισμό. Η χρονική διαδοχή των γεγονότων παύει να είναι απόλυτη, τα μήκη συστέλλονται και ο χρόνος μπορεί να κυλά πιο αργά, ακόμη και να σταματά.

Η ύλη (μάζα και ενέργεια) επηρεάζει τον χωρόχρονο καμπυλώνοντάς τον και ο χωρόχρονος με την σειρά του επιβάλλει στην ύλη τον τρόπο που θα κινηθεί. Το μήλο πέφτει στη Γη και οι πλανήτες γυρίζουν γύρω από τον Ήλιο, όχι γιατί υπάρχουν έλξεις, αλλά γιατί είναι

υποχρεωμένοι να κινηθούν πάνω στις γεωδαισιακές γραμμές που τους επιβάλλει ο παραμορφωμένος από τον Ήλιο και τους άλλους πλανήτες χωρόχρονος.

Η τρίτη σαρωτική αλλαγή στη λογική των ανθρώπων, πιο μεγάλη από τις δύο προηγούμενες, ήρθε με την κβαντομηχανική. Η αιτιότητα ξεριζώνεται συθέμελα και γίνεται αιτιότητα μιας συνάρτησης (κυματοσυνάρτησης) που δεν εκφράζει τίποτε πραγματικό ή παρατηρήσιμο. Οι πιθανότητες προβάλλουν ως δομικά στοιχεία της Φύσης και τα ίδια αίτια δεν δίνουν πια τα ίδια αποτελέσματα. Ο Θεός όχι μόνο «παίζει ζάρια», αλλά δεν ξέρει ούτε πότε θα τα ρίξει, ούτε πού θα τα ρίξει, ούτε τι θα φέρει.

Το παλιό τίποτε, το απόλυτο κενό γίνεται ξαφνικά ο τεράστιος, απέραντος, παράξενος Ωκεανός του πλανήτη «Σολάρις»^(*) στην ταινία του Αντρέι Ταρκόφσκι.

Κβαντικά πλάσματα αναδύονται από το πουθενά και ταχύτατα, πριν οι νόμοι «ανακαλύψουν» την παρανομία τους, εξαφανίζονται για να εμφανιστούν άλλα στην ίδια θέση ή σε άλλες θέσεις, ακόμη κι εκεί όπου «φυσιολογικά» ήταν αδύνατο να υπάρξουν. Φευγαλέες δημιουργίες ενός απέραντου κενού κρατούν στα «χέρια» τους τις παρτιτούρες της παρουσίας μας, των πλασμάτων γύρω μας, της ύπαρξης του Ήλιου, της δημιουργίας του Σύμπαντος, της ομορφιάς που γεμίζει τη ματιά μας κάνοντας τη Γη παράδεισό μας.

Η τέταρτη σαρωτική αλλαγή στη λογική των ανθρώπων θα έρθει όταν γεννηθεί ή αν γεννήθηκε η μεγαλοφυΐα που θα «παντρέψει» τη Βαρύτητα του Αϊνστάιν με την Κβαντική Φυσική^(**). Νομίζω ότι η Κβαντική Βαρύτητα δε θα γκρεμίσει απλώς συθέμελα όλες τις ανθρώπινες εμπειρίες και τους κλασικούς συλλογισμούς μας, αλλά σε βάθος «χιλιομέτρων» θα σηκώσει όλο το χώμα όπου «πατούσε» η μέχρι τότε ανθρώπινη σκέψη. Αλλά αυτά είναι ακόμη υποψίες ή έστω ελπίδες. Ας περιμένουμε λοιπόν...

.....

Κάποιος διάσημος είπε κάποτε να μην απελπιζόμαστε αν δεν καταλαβαίνουμε την κβαντομηχανική, γιατί κανείς δεν την καταλαβαίνει. Ούτε κι ίδιος την καταλάβαινε, όπως μας εξομολογήθηκε, κι ας ήταν κορυφαίος Φυσικός, κι ας είχε ανακαλύψει καταπληκτικά πράγματα κβαντομηχανικής, κι ας είχε πάρει Νόμπελ Φυσικής γι' αυτά.

Συμφωνώ ότι κανείς δεν καταλαβαίνει την κβαντομηχανική. Διαφωνώ όμως με το να κάνουμε παρηγοριά μας αυτή την συνολική αδυναμία. Είναι βέβαιο ότι κανείς δεν την καταλαβαίνει, γιατί αν την καταλαβαίναμε θα ήταν μια λογική ίδιας ποιότητας με αυτή που ήδη κατέχουμε.

Η κβαντομηχανική δεν «ήρθε» για να την καταλάβουμε χωμένη στα παλιά λογικά μας καλούπια. «Ήρθε» για να την καταλάβουμε, αλλάζοντας ολόκληρο τον τρόπο σκέψης μας, αλλάζοντας την ποιότητα των συλλογισμών μας και απαιτώντας να επανεξετάσουμε το αδύνατο, το απίθανο και το εξωφρενικό. «Ήρθε» ως απαίτηση μιας άλλης εμπειρίας που απορρίπτοντας όλες τις παλιές κλασικές μας εικόνες θα μας κάνει ικανούς να δούμε τις δομές της Φύσης με καινούρια ματιά.

Αλίμονο αν καταλαβαίναμε την κβαντομηχανική με τα παλιά μας δεδομένα, τη στιγμή που κανένα φαινόμενό της δε μοιάζει με κανένα από τα φαινόμενα που συνηθίσαμε να συμβαίνουν γύρω μας. Αλίμονο αν η εξίσωση του Schrödinger ήταν μια απλή κυματική εξίσωση προορισμένη να εξηγήσει το άτομο του υδρογόνου και μια δύο συμπεριφορές. Αλίμονο αν

(*) Το σενάριο της ταινίας βασίστηκε στο βιβλίο «Σολάρις» του Πολωνού συγγραφέα Γιαροσλάβ Λεμ

(**) Ο όρος κβαντική φυσική είναι πολύ πιο γενικός από τον όρο κβαντομηχανική. Περιλαμβάνει σχετικιστική κβαντομηχανική, θεωρία κβαντικών πεδίων, καθιερωμένο πρότυπο κ.λπ.

η κβαντομηχανική των αβεβαιοτήτων και των στατιστικών κατανομών ήταν κατανοητή.

Αν πρέπει λοιπόν να απαντήσω, όσο πιο γρήγορα, στο ερώτημα «**τι είναι η Κβαντική Φυσική**» θα περιοριστώ σε τούτο:

Είναι η τρίτη σαρωτική αλλαγή της λογικής των ανθρώπων που όμοιά της δεν ξαναυπήρξε ούτε καν στη φαντασία όλων των ανθρώπων, όλων των εποχών. Είναι η καινούρια μας, η συγκλονιστική λογική, η οποία ξεκινά από τη βαθιά γνώση ότι δομικό στοιχείο της Φύσης είναι οι απόλυτα ανεξέλεγκτες πιθανότητες.

Τα γεγονότα στον κόσμο των ατόμων έχουν πιθανότητα, αλλά όχι ανάγκη να συμβούν. Στο Σύμπαν, η τύχη είναι κάτι πολύ πιο βαθύ και πολύ πιο συγκλονιστικό από απλές ζαριές. Είναι η ίδια η δομή του. Το κενό δεν είναι η βαρετή ηρεμία του τίποτε, αλλά η θεατρική σκηνή μιας μόνιμης και συγκλονιστικής δημιουργίας.

Με τη Φυσική είσαι μόνιμα σε μια συγκλονιστική πορεία ολοένα και βαθύτερης κοσμικής συνείδησης· ο απόλυτος θαυμασμός για την ομορφιά των εικόνων που σου δίνει απλόχερα η Φύση ενισχύεται και από την απίστευτη ομορφιά των μηχανισμών τους.

Έτσι τα ερωτήματα αποκτούν άλλη αξιοπρέπεια και διαφορετική δυναμική. Απομακρύνονται από τη φιλοσοφική χαλαρότητα της προσωπικής επιλογής και της ανέμελης ποιητικής ενατένισης του Κόσμου και γίνονται αντικειμενικά δύσκολα. Η απλή προσωπική θέση και η επιφανειακή ματιά αντικαθίσταται από την επιστημονική απαίτηση μαθηματικής και πειραματικής απόδειξης:

- Γιατί η σκέψη μας είναι ικανή να βλέπει όλο και καλύτερα, όλο και πιο βαθιά τις δομές της Φύσης;
- Γιατί τα Μαθηματικά είναι η αποκλειστική γλώσσα της Φύσης; Γιατί οι συλλογισμοί μας είναι ικανοί να προβλέπουν τη συμπεριφορά της Φύσης; Γιατί η Φύση «καταδέχεται» να είναι κατανοητή; Αφού δεν έχει καμιά υποχρέωση να το κάνει, γιατί το έκανε;
- Γιατί «*το πιο ακατανόητο πράγμα στον κόσμο είναι ότι ο κόσμος είναι κατανοητός*»; (Αϊνστάιν)

Σκοπός του βιβλίου

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με την ελπίδα να φανεί χρήσιμο στον καθηγητή που θα διδάξει το κεφάλαιο «Στοιχεία Κβαντομηχανικής» στη Γ' τάξη του Γενικού Λυκείου. Ένα κεφάλαιο δηλαδή το οποίο, επειδή είναι εντελώς έξω από κάθε εμπειρία μας και πολύ μακριά από την «καθιερωμένη» λογική μας, επιβάλλεται να διδαχτεί ως μάθημα μιας καινούριας λογικής και μιας διαφορετικής ποιότητας συλλογισμών.

Με αυτή την έννοια λοιπόν το βιβλίο μου απευθύνεται συγχρόνως και στο παιδί, στο οποίο όμως πρέπει να το «παραδώσει» ο Δάσκαλός του.

Το «Κλασικές και Κβαντικές Αρχές Αβεβαιότητας» είναι ένα σύνολο σχολίων τα οποία, ξεκινώντας από την κλασική κυματική θεωρία και φτάνοντας μέχρι τις κβαντομηχανικές αρχές αβεβαιότητας, συνθέτουν σιγά σιγά μία από τις εικόνες του κβαντικού μας Σύμπαντος. Συνεπώς είναι ένας πολύ σύντομος οδηγός με αρκετά από τα απαραίτητα γνωστικά εφόδια που πρέπει να διαθέτει ο Δάσκαλος, επιπλέον του σχολικού βιβλίου, προκειμένου να σταθεί με δύναμη και αξία μπροστά στις απορίες ακόμη και των πιο ικανών μαθητών και μαθητριών του.

Το βιβλίο αυτό λοιπόν δεν είναι ένα βοήθημα φυσικής για τα παιδιά που θα δώσουν πανελλήνιες εξετάσεις, αλλά μια προσπάθεια να διδαχθεί το μάθημα από Δασκάλους που θα έχουν ξεχωριστή λάμψη στα μάτια τους, την ιερή εκείνη στιγμή που θα ανατρέπουν τη συνηθισμένη λογική των παιδιών για να τους δείξουν την καινούρια λογική των ανθρώπων... Τη λογική της κβαντομηχανικής.

Προσπάθησα να διευκολύνω τη μελέτη των σχολίων

- εστιάζοντας σε μερικά μόνο ποιοτικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών σχέσεων και σε ένα γενικό πλαίσιο πορείας μέχρι τις αρχές της απροσδιοριστίας
- δίνοντας όσο το δυνατό λιγότερες αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις και χρησιμοποιώντας σχέσεις και εξισώσεις μονοδιάστατες, δηλαδή μια ευκολία γραφής που όμως δεν επηρεάζει τη γενικότητα των συμπερασμάτων
- αναφέροντας με συντομία πειράματα και θεωρίες ή υπενθυμίζοντας έμμεσα τις γνώσεις τις οποίες πρέπει να έχει ο Δάσκαλος
- εκλαϊκεύοντας σε κάποια σημεία το κείμενο ώστε να είναι έτοιμο να μεταφερθεί αυτούσιο σε παιδιά και όχι μόνο

Σημαντική διευκρίνιση

Επειδή

- i. στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει καθιερωμένος ορισμός της λέξης «σωματίδιο»
- ii. η διαδρομή που καταγράφεται στο βιβλίο αυτό περιλαμβάνει και κάποιο χρονικό διάστημα κατά το οποίο η κλασική φυσική είχε αρχίσει να δείχνει τις αδυναμίες της μπροστά στην κβαντική φυσική

η λέξη «σωματίδιο» χρησιμοποιείται και για το «κλασικό σωματίδιο» (που συνοδεύεται από κλασικές έννοιες όπως τροχιά, συγκεκριμένη θέση, ταχύτητα, νόμοι Νεύτωνα κλπ) και για το «κβαντικό σωματίδιο» (όπως είναι τα κβάντα των πεδίων και τα υποατομικά σωματίδια, που συνοδεύονται από έννοιες όπως αβεβαιότητες, κυματοσυναρτήσεις, έλλειψη τροχιάς κλπ).

Με άλλα λόγια η λέξη «σωματίδιο» χρησιμοποιείται και για το κλασικό υλικό σημείο και για τα ηλεκτρόνια, πρωτόνια, φωτόνια, μποζόνια, μεσόνια κλπ

Σε αρκετές περιπτώσεις η έννοια με την οποία χρησιμοποιείται η λέξη διευκρινίζεται. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις η έννοια της λέξης γίνεται αντιληπτή από τα συμφραζόμενα.

Στις δύο πρώτες ενότητες η λέξη «σωματίδιο» αφορά σχεδόν αποκλειστικά στο «κλασικό σωματίδιο».

Προτάσεις για τον Δάσκαλο

Τα παρακάτω βιβλία μου αναφέρονται σε κεφάλαια Φυσικής Προσανατολισμού που διδασκονται στη Γ' τάξη του Γενικού Λυκείου. Δεν προορίζονται για μαθητές και μαθήτριες, αλλά για τον Καθηγητή ή την Καθηγήτρια.

Μπορείτε να τα βρείτε στις διευθύνσεις που τα συνοδεύουν και να τα χρησιμοποιήσετε όπως νομίζετε

Θέματα Φυσικής α' τόμος «Ταλαντώσεις»

<https://maherasthrasivoulos.blogspot.com/2024/02/blog-post.html>

Θέματα Φυσικής β' τόμος «Κύματα»

https://maherasthrasivoulos.blogspot.com/2024/01/blog-post_30.html

Το σχολικό βιβλίο στο οποίο αναφέρονται τα βιβλία είναι το «Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' τάξης Γενικού Λυκείου» των Αλέκου Ιωάννου, Γιάννη Ντάνου, Άγγελου Πήττα και Σταύρου Ράπτη (έκδοση 2008), που βρίσκεται στη διεύθυνση

<https://drive.google.com/file/d/1E1cDs2hud02o8TdnIzw5ZSkD89wnTwzI/view?usp=sharing>

Το σχολικό αυτό βιβλίο γράφτηκε το 1999 για τα Γενικά Λύκεια της Ελλάδας και διδάσκεται έως και ... σήμερα, σχολική χρονιά 2023-2024, αλλάζοντας απλώς τα... εξώφυλλά του!!!

.....

Σημείωση

Τα βιβλία μου καθώς και διάφορα άλλα κείμενά μου μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση

<https://maherasthrasivoulos.blogspot.com/>

Ευχαριστίες

Τα σχήματα του βιβλίου είναι δουλειά του Φυσικού **Λέτη Σταύρου**, τον οποίο ευχαριστώ πάρα πολύ και από αυτή τη θέση.

Η σύνδεση της αρχής αβεβαιότητας με «φαντάσματα» που ελέγχουν τον Κόσμο έχει τις πηγές της στο θαυμάσιο βιβλίο του κ. **Στέφανου Τραχανά** «Το Φάντασμα της Όπερας».

Τιμές θεμελιωδών σταθερών και άλλων μεγεθών

Ακτίνα ατόμου (τάξη μεγέθους)	$\sim 10^{-10}m = 1\text{\AA}$
Ακτίνα πυρήνα (τάξη μεγέθους)	$\sim 10^{-15}m = 1fm$
Ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N \cdot A^{-2}$
Μάζα ατόμου αργύρου	$1,79 \cdot 10^{-25}Kg$
Μάζα ηλεκτρονίου	$9,11 \cdot 10^{-31}Kg$
Μάζα νετρονίου	$1,675 \cdot 10^{-27}Kg$
Μάζα πρωτονίου	$1,673 \cdot 10^{-27}Kg$
Σταθερά Boltzmann	$k = 1,38 \cdot 10^{-23}J \cdot K$
Σταθερά Planck	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}J \cdot s$ $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}J \cdot s$
Στοιχειώδες φορτίο	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$
Ταχύτητα του φωτός στο κενό	$c = 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$

Ισχύει $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

Ενότητα 1

Σχόλια πάνω στη φυσική των κυμάτων

1.1 Κύματα και σωματίδια, δύο διαφορετικές παρουσίες

Στην κλασική Φυσική οι έννοιες «κύμα» και «σωματίδιο» θεωρούνται σχεδόν αυτονόητες. Προσδιορίζονται περισσότερο μέσω της χρήσης τους παρά από κάποιο αυστηρό ορισμό.

- Η έννοια «κύμα» συνοδεύεται από ειδικούς όρους, όπως η συχνότητα, το μήκος κύματος, η φασική ταχύτητα, το πλάτος ταλάντωσης, η ένταση, η πυκνότητα ορμής κ.λπ., που αρκετές φορές συνδέονται μεταξύ τους. Τα κύματα είναι διαταραχές διάχυτες στο χώρο, των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί να ληφθεί υποχρεωτικά υπόψη η **έκταση**. Άρα χαρακτηριστικό των κυμάτων θεωρείται η παρουσία τους σε περιοχή (μη εντοπισμός) και όχι σε συγκεκριμένο σημείο.
- Η έννοια «σωματίδιο» συνοδεύεται από ειδικούς όρους, όπως η μάζα, η τροχιά, η ταχύτητα, η ορμή, η στροφορμή κ.λπ. που αρκετές φορές συνδέονται μεταξύ τους. Τα σωματίδια θεωρούνται «μονάδες», των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί να βρίσκονται σε συγκεκριμένη θέση κάποια συγκεκριμένη στιγμή. Άρα χαρακτηριστικό των σωματιδίων θεωρείται ο **εντοπισμός** και όχι η έκταση.

Καθεμιά από τις έννοιες «κύμα» και «σωματίδιο» περιλαμβάνει φαινόμενα, τα οποία είναι χαρακτηριστικά δικά της. Για παράδειγμα η περίθλαση και η συμβολή είναι φαινόμενα που παρατηρούνται αποκλειστικά και μόνο στα κύματα, ενώ η αίσθηση της «μονάδας» και του εντοπισμού της πάνω σε μια ορισμένη τροχιά κινούμενη με ορισμένη ταχύτητα αφορά στα σωματίδια (υλικά σημεία).

Επομένως στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής οι έννοιες «κύμα» (μη εντοπισμός) και «σωματίδιο» (εντοπισμός) είναι αδύνατο να συνδυαστούν μεταξύ τους σε κάτι ενιαίο. Είναι δηλαδή **έννοιες αλληλοαποκλειόμενες**.

1.2 Η κυματική εξίσωση

Η κλασική κυματική εξίσωση είναι η

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad v > 0 \quad (*) \quad (1.1)$$

Είναι η πιο σημαντική, αλλά όχι η μοναδική κυματική εξίσωση.

Αποδεικνύεται ότι η γενική της λύση

$$\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

είναι μοναδική.

Μια ειδική λύση της (1.1) είναι το τρέχον προς τα θετικά (αρμονικό) **μονοχρωματικό κύμα**

$$\psi_k(x,t) = A_k \cos[(kx - \omega t) + \theta_k] \quad k > 0, \quad \omega > 0 \quad (1.2)$$

όπου

$(kx - \omega t) + \theta_k$	η φάση του κύματος στην εξίσωση (1.2)	
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	ο κυματαριθμός	(1.3)
λ	το μήκος κύματος	
$\omega = 2\pi f$	η κυκλική συχνότητα του κύματος	
f	η συχνότητα του κύματος	
θ	η σταθερά φάσης του κύματος στην εξίσωση (1.2)	
A_k	το πλάτος του κύματος	

Ταχύτητα διάδοσης ενός μονοχρωματικού κύματος είναι η ταχύτητα διάδοσης v της φάσης του. Ονομάζεται **φασική ταχύτητα του μονοχρωματικού κύματος**.

Αποδεικνύεται ότι

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v \cdot k \quad (**) \quad (1.4)$$

από όπου

$$2\pi f = v \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow v = \lambda \cdot f$$

(*) Στα επόμενα θα παραλείπουμε τον προσδιορισμό «κλασική». Γράφοντας «κυματική εξίσωση» θα εννοούμε αποκλειστικά τη διαφορική εξίσωση (1.1). Σε περίπτωση διαφορετικής κυματικής εξίσωσης αυτό θα δηλώνεται ή θα γίνεται εμφανές από το κείμενο.

(**) Οι λόγοι που, κατά τη γραφή των k και ω , διατηρούμε την ανεξαρτησία τους είναι:

α) Στη θεωρία των υλικών κυμάτων θα συνδεθούν αντίστοιχα με την ορμή (p) και την ενέργεια (E) των σωματιδίων, μεγέθη τα οποία δε συνδέονται μεταξύ τους με την ίδια πάντοτε σχέση.

β) Η σχέση μεταξύ p και E δε μεταφράζεται πάντα σε αντίστοιχη σχέση μεταξύ k και ω και το αντίστροφο.

Επειδή οι εκθετικές συναρτήσεις είναι πιο εύκολες στη χρήση τους από τις τριγωνομετρικές, ειδικά όταν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε γενικές σχέσεις, πολλές φορές γράφουμε τις εξισώσεις των μονοχρωματικών κυμάτων σε μιγαδική μορφή.

Για παράδειγμα το μονοχρωματικό κύμα (1.2) γράφεται

$$\psi_k(x, t) = A(k, \theta) \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.5)$$

όπου

$$A(k, \theta) = A_k \cdot e^{i\theta_k} \quad (1.6)$$

Η μιγαδική μορφή (1.5) αποτελεί επίσης μερική λύση της κυματικής εξίσωσης. Στο τέλος όμως των υπολογισμών μας πρέπει υποχρεωτικά να επιλέξουμε το πραγματικό μέρος της $\psi_k(x, t)$ ή οποιασδήποτε άλλης μιγαδικής συνάρτησης αναζητούμε ή προκύψει, διότι

- η πραγματικότητα αποδίδεται με πραγματικά μαθηματικά «αντικείμενα», δηλαδή με πραγματικές συναρτήσεις, με πραγματικούς αριθμούς, με πραγματικές παραστάσεις κ.λπ.
- τα κύματα που περιγράφει η κυματική εξίσωση είναι πραγματικά, υπάρχουν δηλαδή, και συνεπώς πρέπει να χρησιμοποιηθεί το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης (1.5)

1.3 Τα κύματα (ή αλλιώς τα κυματοπακέτα, οι παλμοί), (*) ως υπερθέσεις μονοχρωματικών κυμάτων

Αν στην (1.5) επιτρέψουμε στον κυματαριθμό k να πάρει κι αρνητικές τιμές τότε όλα τα μονοχρωματικά κύματα αποδίδονται με ενιαία μορφή

$$\psi_k(x, t) = A(k, \theta) \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.5a)$$

όπου

$$A(k, \theta) = A_k \cdot e^{i\theta_k} \quad \text{το μιγαδικό πλάτος του κύματος} \quad (1.6a)$$

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{ο κυματαριθμός}$$

$$\omega = 2\pi f = v|k| \quad \text{η κυκλική συχνότητα}$$

$$k > 0 \quad \text{μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά}$$

$$k < 0 \quad \text{μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται προς τα αρνητικά}$$

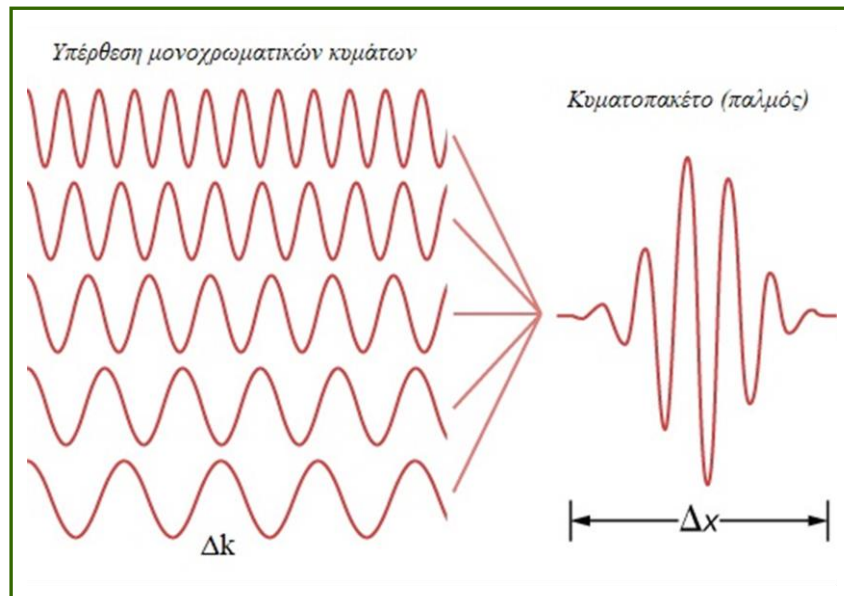
Η κυματική εξίσωση (1.1) είναι μερική διαφορική εξίσωση, γραμμική κι ομογενής και το μονοχρωματικό κύμα (1.5) είναι λύση της. Άρα οποιοδήποτε άθροισμα μονοχρωματικών κυμάτων είναι επίσης λύση της και συνεπώς είναι κύμα.

(*) Στα επόμενα οι όροι κύμα, κυματοπακέτο, παλμός θα χρησιμοποιούνται ισοδύναμοι. Σε αντίθεση με το μονοχρωματικό κύμα το οποίο θα δηλώνεται έτσι.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση $\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ της κυματικής εξίσωσης και συνεπώς η εξίσωση οποιουδήποτε κύματος (τρέχοντος ή στάσιμου), μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση (επαλληλία) εξισώσεων μονοχρωματικών κυμάτων (1.5) (*) (σχήμα 1.1)

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(x, t) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, \theta) \cdot e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (**) \quad (1.7)$$

Τα πλάτη $A(k, \theta)$ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\psi(x, 0)$ και $\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$ με ανάλυση Fourier (***)



Σχήμα 1.1: Υπέρθεση μονοχρωματικών κυμάτων προς δημιουργία πραγματικού κύματος (παλμού) έκτασης Δx

Οι κυματαριθμοί των υπερτιθέμενων μονοχρωματικών κυμάτων, συνήθως κατανέμονται γύρω από κάποιον «κεντρικό» κυματαριθμό k_0 .

Στο σχήμα 1.2α βλέπουμε μια κατανομή κυκλικών συχνοτήτων $\omega(k)$, αρκετά συνηθισμένη σε πολλές φυσικές καταστάσεις, η οποία είναι συμμετρική γύρω από μια κεντρική κυκλική συχνότητα ω_0 και συνεπώς γύρω από έναν κεντρικό κυματαριθμό k_0 .

Αν η κατανομή δεν είναι συμμετρική τότε ως ω_0 και k_0 λαμβάνουμε τις μέσες τιμές της κατανομής.

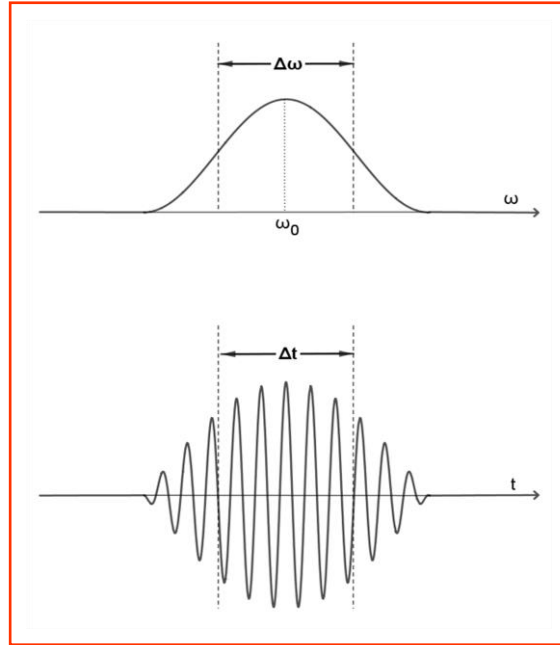
(*) Αν το φάσμα των k που συνθέτουν ένα κύμα είναι διακριτό, αντί για ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται σειρά

(**) Σε όλο το υπόλοιπο βιβλίο το k θα θεωρείται θετικό.

(***) Γενικά κάθε συνηθισμένη συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί κατά Fourier και άρα να γραφεί σε μορφή ανάλογη της (1.7). Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως η ανάλυση Fourier (1.7) αποκτά ιδιαίτερη αξία, γιατί αφορά στη γενική λύση της κυματικής εξίσωσης και άρα δείχνει ότι η εξίσωση κάθε κύματος μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός εξισώσεων μονοχρωματικών (αρμονικών) κυμάτων.

Επομένως η μελέτη της συμπεριφοράς (ανάκλαση, διάθλαση κλπ) των μονοχρωματικών κυμάτων μας οδηγεί σε κάποια κατ' αρχήν συμπεράσματα για την συμπεριφορά οποιουδήποτε κύματος.

Στο σχήμα 1.2β βλέπουμε το κύμα (κυματοπακέτο, παλμό) που αποτελεί υπέρθεση των μονοχρωματικών κυμάτων της κατανομής 1.2α. Είναι εντοπισμένο στο χρόνο, με την έννοια ότι έχει πεπερασμένη χρονική διάρκεια Δt , εκτός της οποίας η διαταραχή μηδενίζεται. Προφανώς ένα τέτοιο κύμα έχει πεπερασμένη έκταση Δx .



Σχήμα 1.2: (α) Μια συμμετρική κατανομή συχνοτήτων μονοχρωματικών κυμάτων. (β) Η υπέρθεση τους δίνει κύμα αρκετά καλά εντοπισμένο στο χρόνο.

Φασική ταχύτητα u ενός κύματος θεωρείται συνήθως η φασική ταχύτητα του μονοχρωματικού κύματος με κυματαριθμό k_0 , δηλαδή η ταχύτητα διάδοσης φάσης του «κεντρικού» μονοχρωματικού κύματος k_0 (ή αλλιώς της «κεντρικής» κυκλικής συχνότητας ω_0).

$$u = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (1.8)$$

Ομαδική ταχύτητα ή ταχύτητα ομάδας u_g ενός κύματος είναι η ταχύτητα με την οποία «κινείται» η περιβάλλουσα (διαμόρφωσης) του κύματος (σχήμα 1.3)

Αποδεικνύεται ότι

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

Προφανώς η ταχύτητα u με την οποία κινείται το κύμα είναι η ομαδική του ταχύτητα. Δηλαδή

$$u = v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (1.9)$$

Η φασική και η ομαδική ταχύτητα ενός κύματος είναι γενικά διαφορετικές.

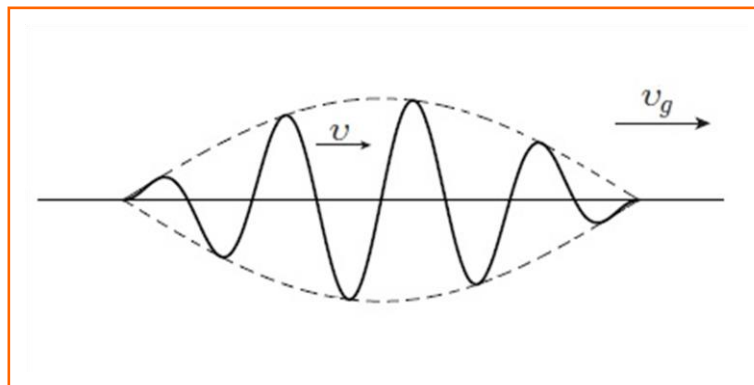
Αν σε ένα μέσο (ή στο κενό) οι φασικές ταχύτητες v όλων των μονοχρωματικών κυμάτων είναι ίσες, τότε η ταχύτητα v θεωρείται χαρακτηριστικό του μέσου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το μέσο δεν παρουσιάζει **διασκεδασμό**.

Όταν δεν υπάρχει διασκεδασμός

- Οι φάσεις όλων των μονοχρωματικών κυμάτων που συνθέτουν το κύμα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα v . Συνεπώς η διαφορά φάσης μεταξύ των μονοχρωματικών κυμάτων διατηρείται σταθερή με αποτέλεσμα **το κύμα**, κατά τη διάδοσή του, να **διατηρεί αναλλοίωτο το σχήμα του**.
- Φασική ταχύτητα του κύματος θεωρείται η κοινή φασική ταχύτητα v όλων των μονοχρωματικών κυμάτων που συνθέτουν το κύμα. Προφανώς είναι ίση με την ομαδική του ταχύτητα

$$v = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$$

Όταν υπάρχει διασκεδασμός οι φασικές ταχύτητες των μονοχρωματικών κυμάτων που συνθέτουν το κύμα είναι διαφορετικές μεταξύ τους και διαφορετικές γενικά από την ομαδική ταχύτητα του κύματος. Προφανώς στην περίπτωση αυτή **το κύμα, αργά ή γρήγορα, χάνει τη μορφή του και διαλύεται**.



Σχήμα 1.3: Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι η ομαδική του ταχύτητα v_g , δηλαδή η ταχύτητα με την οποία κινείται η περιβάλλουσα του κύματος (διακεκομμένη γραμμή). Ως φασική ταχύτητα v ενός κύματος συνήθως θεωρούμε τη φασική ταχύτητα του «κεντρικού» μονοχρωματικού κύματος k_0 . Γενικά ισχύει $v \neq v_g$

Παρατηρήσεις

α) Λόγω της σχέσης (1.7), η γενική εξίσωση κύματος $\psi(x, t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση εξισώσεων μονοχρωματικών κυμάτων, δηλαδή κυμάτων που το καθένα έχει συγκεκριμένο πλάτος $A(k, \theta)$, συγκεκριμένο κυματαριθμό k και συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα ω . Συνεπώς έχει συγκεκριμένο πλάτος A , μήκος κύματος λ και συχνότητα f .

β) Το φάσμα των συχνοτήτων των μονοχρωματικών κυμάτων, που συνθέτουν ένα κύμα, μπορεί να είναι γραμμικό (διακριτές συχνότητες) ή συνεχές. Το λευκό φως είναι παρά-

δειγμα συνεχούς κατανομής συχνοτήτων ηλεκτρομαγνητικών μονοχρωματικών κυμάτων από το κόκκινο ως το μωβ.

γ) Η ενέργεια και κάθε πληροφορία που μεταφέρει ένα κύμα, είναι συγκεντρωμένη γύρω από το μέγιστό του και ταξιδεύει με την ομαδική ταχύτητα v_g και όχι με τη φασική v .

1.4 Θεώρημα bandwidth - Σχέσεις κλασικής αβεβαιότητας

1η μορφή του θεωρήματος bandwidth

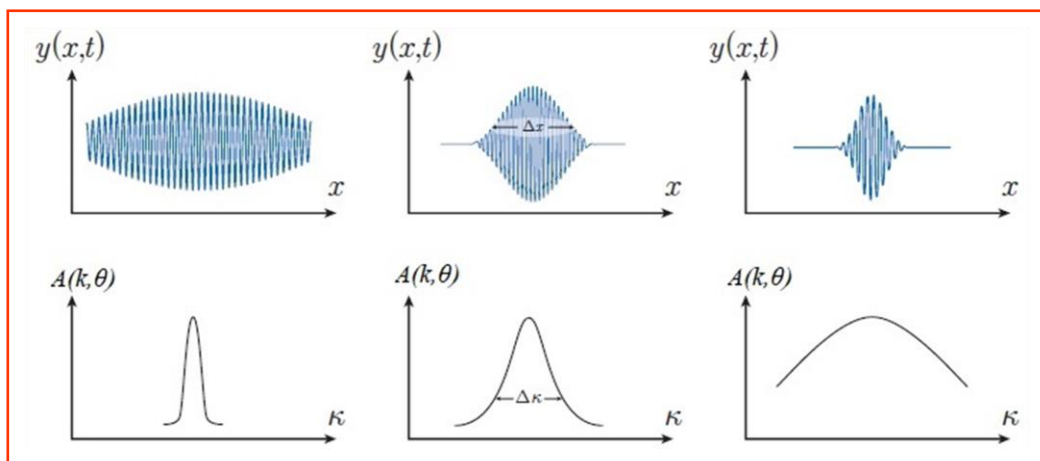
Αποδεικνύεται ότι η έκταση Δx οποιουδήποτε κύματος $\psi(x,t)$ συνδέεται με το εύρος Δk του φάσματος των κυματαριθμών των μονοχρωματικών κυμάτων, που υπερτίθενται για να το περιγράψουν (για να δώσουν την εξίσωσή του), με την προσεγγιστική ισότητα

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \quad (1.10)$$

(1η σχέση κλασικής αβεβαιότητας)

Από την παραπάνω μορφή του θεωρήματος προκύπτουν (σχήμα 1.4)

- 1) Όσο μικραίνει η έκταση Δx ενός κύματος $\psi(x,t)$, τόσο μεγαλώνει το εύρος Δk , δηλαδή τόσο πιο πολλοί κυματαριθμοί (τόσο πιο πολλά μήκη κύματος, τόσο πιο πολλά μονοχρωματικά κύματα) απαιτούνται για να αποδώσουν με την υπέρθεσή τους το κύμα.



Σχήμα 1.4: Όταν η έκταση Δx (*) ενός κύματος ελαττώνεται, το εύρος Δk (*) του φάσματος των περιεχόμενων κυματαριθμών αυξάνεται. Συνεπώς αυξάνεται και το πλήθος των μονοχρωματικών κυμάτων που απαιτούνται για να συνθέσουν το κύμα.

(*) Οι «ορισμοί» εύρος Δx και Δk ποικίλουν στη βιβλιογραφία. Χωρίς να μπορούμε σε λεπτομέρειες, γενικά προσδιορίζονται έτσι ώστε μέσα στην έκταση Δx να περιέχεται, αν όχι όλο το κύμα, τουλάχιστον το πιο μεγάλο και σημαντικό τμήμα του (ουσιαστικά εκείνο που αντιστοιχεί στα πιο μεγάλα «πλάτη»).

Άρα και στο εύρος Δk περιέχεται το πιο μεγάλο και σημαντικό τμήμα του φάσματος των κυματαριθμών k που απαιτούνται για την περιγραφή του κύματος, βάσει της σχέσης (1.7).

- 2) Τα μονοχρωματικά κύματα, όπως π.χ. εκείνο της εξίσωσης (1.2) ή το γνωστό μας $y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ ή το γενικό (1.5), έχουν ένα μόνο μήκος κύματος λ και επομένως ένα μόνο κυματαριθμό $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Συνεπώς ισχύει $\Delta k = 0$ και άρα $\Delta x \rightarrow \infty$.

Επομένως τα **μονοχρωματικά κύματα**,

- Καταλαμβάνουν άπειρη έκταση και άρα δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος. Η συνολική τους ενέργεια είναι προφανώς άπειρη.
- Είναι εξιδανικεύσεις. Δεν υπάρχουν στη Φύση, αλλά χρησιμοποιούνται ευρέως στη Φυσική. Η υπέρθεση των εξισώσεών τους παράγει τις εξισώσεις των πραγματικών κυμάτων και η μελέτη τους δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά των πραγματικών κυμάτων (σχέση 1.7 και υποσημ. σελ.4)

2η μορφή του θεωρήματος bandwidth

Ένα κύμα $\psi(x,t)$ που έχει έκταση Δx και ταξιδεύει με ταχύτητα v_g χρειάζεται χρόνο Δt για να περάσει από κάποιο σημείο.

Με καλή προσέγγιση, αλλά και ακρίβεια σε αρκετές περιπτώσεις όπως για παράδειγμα όταν δεν έχουμε διασκεδασμό, ισχύει

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{\Delta x}{d\omega/dk}$$

ή

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \Delta x \cdot \Delta k$$

και συνεπώς, λόγω της (1.10)

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi \quad (1.11)$$

(2η σχέση κλασικής αβεβαιότητας)

Η σχέση (1.11) είναι γενική και ισχύει για κάθε διαταραχή της μορφής $\psi(t)$ που έχει χρονικά χαρακτηριστικά παλμού, δηλαδή είναι καλά εντοπισμένη στο χρόνο με την έννοια ότι είναι διαφορετική από το μηδέν σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα Δt και ουσιαστικά μηδέν τις άλλες χρονικές στιγμές.

Από την παραπάνω μορφή του θεωρήματος *bandwidth* προκύπτουν

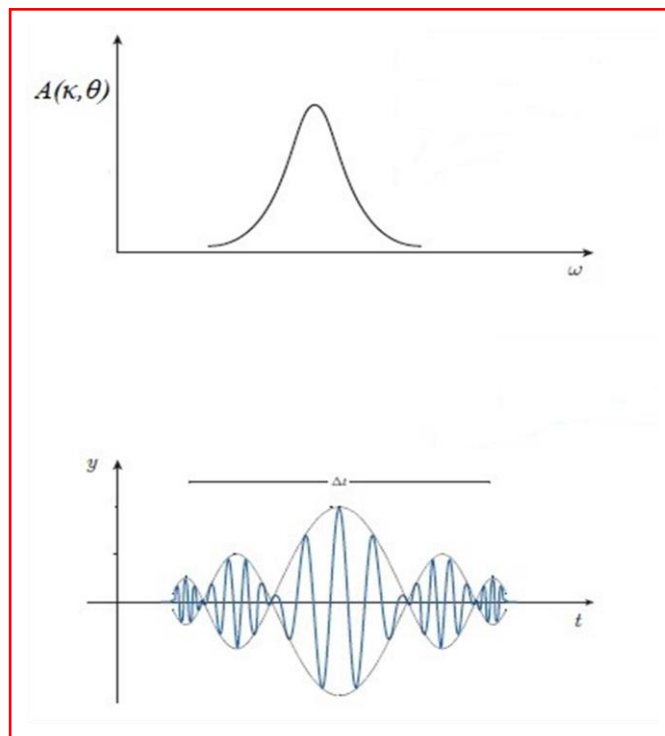
- 1) Ένα κύμα $\psi(x,t)$, με χρονικό εντοπισμό Δt , αποδίδεται ουσιαστικά με μια υπέρθεση μονοχρωματικών κυμάτων, των οποίων το φάσμα των κυκλικών τους συχνοτήτων έχει εύρος $\Delta \omega$.
- 2) Όσο μικρότερο σε χρονική διάρκεια Δt είναι ένα κύμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το εύρος $\Delta \omega$ του φάσματος των κυκλικών συχνοτήτων (τόσο πιο πολλές συχνότητες, τόσο πιο πολλά μονοχρωματικά κύματα) που απαιτούνται για να αποδώσουν την εξίσωση του κύματος.

- 3) Τα μονοχρωματικά κύματα, όπως π.χ. εκείνο της εξίσωσης (1.2) ή το γνωστό μας $y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ ή το γενικό (1.5), έχουν μια μόνο συχνότητα f (ένα μόνο «χρώμα») και επομένως μία μόνο κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Συνεπώς ισχύει $\Delta\omega=0$ και άρα $\Delta t \rightarrow \infty$.

Άρα τα μονοχρωματικά κύματα

- **Δεν είναι** χρονικά εντοπισμένα και συνεπώς χρειάζονται άπειρο χρόνο για να διέλθουν από συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Επομένως δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος.
- Είναι χρήσιμες εξιδανικεύσεις οι οποίες δεν αποσβένονται στο άπειρο (όπως κάνουν τα πραγματικά κύματα), απαιτώντας έτσι άπειρο χώρο η έκτασή τους και άπειρη συνολική ενέργεια η δημιουργία τους.



Σχήμα 1.5: Όταν η χρονική διάρκεια Δt ενός κύματος αυξάνεται, το εύρος $\Delta\omega$ των (κυκλικών) συχνοτήτων που ουσιαστικά απαιτούνται για να το συνθέσουν ελαττώνεται.

Παρατήρηση

Θεωρητικά σε ένα τυχαίο άπειρο μέσο, π.χ. σε μια χορδή απείρου μήκους, **ένα μονοχρωματικό κύμα δημιουργείται ακαριαία** σε όλο το άπειρο μήκος της χορδής, ως προϊόν των αρχικών συνθηκών που θα επιβληθούν στη χορδή. Δηλαδή ως αποτέλεσμα του κατάλληλου αρχικού σχήματος που θα δώσουμε στη χορδή και της κατάλληλης αρχικής κατανομής ταχυτήτων που θα επιβάλουμε στα σημεία της.

Όμοια, **το μονοχρωματικό κύμα καταργείται ακαριαία** από όλη τη χορδή.

Συνεπώς **δεν είναι σωστό** να παριστάνουμε το μονοχρωματικό κύμα με ένα «σκουλήκι» που βγαίνει από το άκρο ενός νήματος που κουνάμε. **Ούτε είναι σωστό** να λέμε ότι το μονοχρωματικό κύμα μεγαλώνει σιγά σιγά σε μήκος και ότι αυτό το «μεγάλωμα» (η αύξηση δηλαδή της έκτασής του) είναι η διάδοσή του.

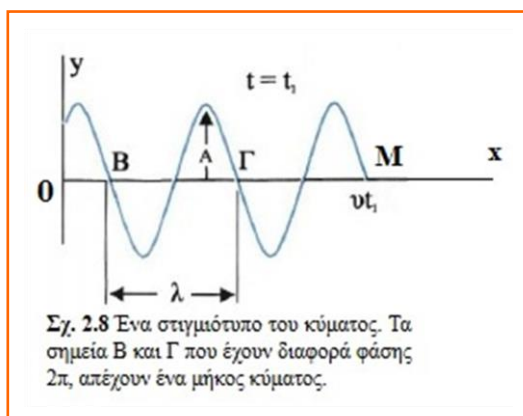
Το μονοχρωματικό κύμα δεν είναι μια διαταραχή η οποία βρίσκεται κάπου και η οποία μετά από κάποιο χρονικό διάστημα φτάνει και κάπου αλλού. **Ένα μονοχρωματικό κύμα ή υπάρχει με μιας σε όλο τον άπειρο χώρο ή δεν υπάρχει.** Κι εκείνο που διαδίδεται από σημείο σε σημείο δεν είναι η διαταραχή, η οποία έτσι κι αλλιώς καταλαμβάνει όλο τον χώρο, αλλά η φάση της εξίσωσης του μονοχρωματικού κύματος, η ενέργεια, η ορμή κλπ.

Τα ίδια ισχύουν για τα μονοχρωματικά κύματα όλων των διαστάσεων.

Από τα προηγούμενα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι μια γραφική παράσταση, όπως αυτή του μονοχρωματικού κύματος $y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ στο παρακάτω σχήμα 2.8 του σχολικού βιβλίου, δεν δικαιολογείται από καμιά κυματική εξίσωση. Είναι μια λανθασμένη εικόνα που δημιουργεί άτοπα και συνεπώς χαλά τη σκέψη.

Τα στιγμιότυπα των μονοχρωματικών κυμάτων πρέπει να δίνουν την αίσθηση της άπειρης έκτασης και οι ασκήσεις που τα αφορούν να μην ασχολούνται ούτε με τα άκρα τους (που έτσι κι αλλιώς δεν υπάρχουν), ούτε με την έκτασή τους (που είναι άπειρη).

Η δε ταχύτητα διάδοσής τους $v = \lambda f$ **δεν είναι η ταχύτητα** με την οποία μεγαλώνει η έκτασή του μονοχρωματικού κύματος, αλλά η ταχύτητα διάδοσης της φάσης της εξίσωσής του.



Σχήμα 1.6: Ένα λανθασμένο σχήμα.

Καμιά κυματική εξίσωση δεν προβλέπει τέτοιο στιγμιότυπο κύματος. Τα μονοχρωματικά κύματα έχουν άπειρη έκταση.

Τέλος ας μην ξεχνάμε ότι τα όλα κύματα της κυματικής εξίσωσης 1.1 (υπαρκτά ή εξιδανικεύσεις) διατηρούν τη μορφή τους κατά τη διάδοσή τους.

Συνεπώς το κάθε μονοχρωματικό κύμα, όπως για παράδειγμα το 1.5 ή πιο απλά το

$$y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

δε μπορεί να αλλάξει τη μορφή του. Δε μπορεί να μεγαλώνει σε έκταση. Αντίθετα η άπειρη έκταση τού μονοχρωματικού κύματος τού εξασφαλίζει αυτή την απαίτηση της 1.1. Το ότι δηλαδή το μονοχρωματικό κύμα, κατά τη διάδοση της φάσης του, διατηρεί τη μορφή του.

Ενότητα 2

Σχόλια πάνω στη θεωρία των υλικών κυμάτων και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης

2.1 Παράξενα φαινόμενα στις αρχές του 20ου αιώνα

Στις αρχές του 20ου αιώνα υπήρχε αρκετή ανησυχία στη Φυσική. Στην έλλειψη συνεπούς ατομικού μοντέλου, στην εντελώς παράξενη και αδικαιολόγητη σταθερότητα των ατόμων, στην ανεξήγητη ραδιενέργεια, στις ακτίνες-Χ κ.λπ. είχαν προστεθεί και φαινόμενα όπου το φως, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία δηλαδή, επιδείκνυε εκτός της κυματικής και σωματιδιακή συμπεριφορά.

Συγχρόνως πολλά πειραματικά δεδομένα, ειδικά εκείνα στα οποία διάφορα φυσικά μεγέθη έπαιρναν διακριτές και όχι συνεχείς τιμές, δε μπορούσαν να ερμηνευτούν με την κλασική θεωρία (Νεύτωνα, Μάξγουελ) ούτε καν στοιχειωδώς.

Η κατάσταση ήταν κάτι σαν ένα παράξενο τρελοκομείο.

Για παράδειγμα

- ❖ η συμβολή,
η περίθλαση
έδειχναν ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει κυματική συμπεριφορά
- ❖ το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος,
το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο,
το φαινόμενο Κόμπτον,
η συνδυαστική αρχή Balmer, Ritz, Rydberg
έδειχναν ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει σωματιδιακή συμπεριφορά

❖ **το πείραμα Davisson-Germer**

έδειχνε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν κυματική συμπεριφορά

❖ **η συνδυαστική αρχή Balmer, Ritz, Rydberg** πάνω στα φάσματα,

οι θεωρίες Einstein και Debye πάνω στις ειδικές θερμότητες των στερεών και δη των χαμηλών θερμοκρασιών,

το πείραμα Franck-Hertz, όπου οι απώλειες ενέργειας των ηλεκτρονίων, καθώς αυτά συγκρούονταν με άτομα, έπαιρναν διακριτές τιμές,

το πείραμα Stern-Gerlach, όπου η συνιστώσα της μαγνητικής ροπής του ατόμου κατά τη διεύθυνση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου έπαιρνε διακριτές τιμές,

έδειχναν ότι πολλά φυσικά μεγέθη παίρνουν διακριτές τιμές

Άρα στις αρχές του 20ου αιώνα η θεωρητική φυσική, όχι μόνο δεν διέθετε ικανοποιητικό ατομικό μοντέλο, αλλά είχε να αντιμετωπίσει και δύο σημαντικότερες κατηγορίες πειραματικών δεδομένων

1. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συμπεριφερόταν παράξενα. Άλλοτε επιδείκνυε κυματική συμπεριφορά κι άλλοτε ανιχνευόταν με εντοπισμένη την παρουσία της ως σωματίδια. Παράλληλα, διάφορα υποατομικά σωματίδια επιδείκνυαν κυματική συμπεριφορά.
2. Αρκετά φυσικά μεγέθη δεν έπαιρναν συνεχείς, αλλά διακριτές τιμές.

2.2 Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης

Πολλά λοιπόν πίεζαν για εξήγηση και άλλα τόσα είχαν αρχίσει να διατυπώνονται, μεταξύ των οποίων οι δύο κβαντικές συνθήκες της θεωρίας του Bohr και κάποιες αξιολογες παρεμβάσεις του Sommerfeld.

Και τότε, κάπου το 1923, μια ιδέα, που έτσι κι αλλιώς υπήρχε διάχυτη, απέκτησε συγκεκριμένη μορφή με μια εργασία του de Broglie.

Ο Φυσικός αυτός, επηρεασμένος από την εμπνευσμένη δουλειά του Planck πάνω στο μέλαν σώμα και από την εργασία του Einstein με την οποία εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο χρησιμοποιώντας πακέτα ενέργειας (φωτόνια), εισήγαγε την έννοια **των υλικών κυμάτων και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης**:

Η ύλη έχει διπλή συμπεριφορά. Τα κύματα (π.χ. ηλεκτρομαγνητικά) είναι συγχρόνως και σωματίδια. Τα σωματίδια (π.χ. ηλεκτρόνιο, νετρόνιο κ.λπ.) είναι συγχρόνως και κύματα τα οποία λέγονται υλικά κύματα.

Άρα στα κύματα πρέπει να αποδοθούν σωματιδιακές συμπεριφορές (εντοπισμός) και σωματιδιακά χαρακτηριστικά (ορμή, ενέργεια), ενώ στα σωματίδια πρέπει να αποδοθούν κυματικές συμπεριφορές (περίθλαση, συμβολή) και κυματικά χαρακτηριστικά (μήκος κύματος, συχνότητα).

Έτσι λοιπόν ένα μονοχρωματικό κύμα, ένα κύμα δηλαδή που έχει απόλυτα καθορισμένη συχνότητα f και απόλυτα καθορισμένο μήκος κύματος λ , αντιστοιχεί σε σωματίδιο με απόλυτα καθορισμένη ενέργεια E και απόλυτα καθορισμένη ορμή p .

Παράλληλα ένα σωματίδιο που έχει απόλυτα καθορισμένη ενέργεια E και απόλυτα καθορισμένη ορμή p αντιστοιχεί σε ένα **μονοχρωματικό υλικό κύμα** με απόλυτα καθορισμένη συχνότητα f και απόλυτα καθορισμένο μήκος κύματος λ .

Σε κάθε περίπτωση πάντως (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και σωματίδια) οι σχέσεις που συνδέουν τα κυματικά με τα σωματιδιακά τους χαρακτηριστικά είναι

$$\left. \begin{array}{l} f = \frac{E}{h} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad h \text{ σταθερά του Planck} \\ E = \hbar\omega \quad \text{και} \quad p = \hbar k \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi f$

Με τη θεωρία του de Broglie όλα στο μικρόκοσμο του ατόμου, αλλά και σε όλο το Σύμπαν, φάνηκαν σα να «απέκτησαν» ξαφνικά **διπλή φύση!!!** Όλα έγιναν συγχρόνως κύματα και σωματίδια! Το δε είδος της φύσης που θα επιδείκνυαν κάθε φορά, αν δηλαδή θα εμφάνιζαν κυματική ή σωματιδιακή συμπεριφορά, εξαρτιόταν από το πείραμα και γενικότερα από το φαινόμενο στο οποίο συμμετείχαν!

Όμως η εισαγωγή των υλικών κυμάτων έγινε με τρόπο εντελώς κλασικό, μιας και τα κλασικά κύματα «έγιναν» συγχρόνως και κλασικά σωματίδια και τα κλασικά σωματίδια «έγιναν» συγχρόνως και κλασικά κύματα. Αυτό είχε επιπτώσεις.

Ας δούμε:

Σημαντικά σημεία στην **(κλασική) θεωρία των κυμάτων**, η οποία σημειωτέον διαθέτει κυματικές εξισώσεις, είναι και τα εξής:

- 1) Το (αρμονικό κλασικό) μονοχρωματικό κύμα (1.5)

$$e^{i(kx - \omega t)}$$

δηλαδή το κύμα με **συγκεκριμένο μήκος κύματος** $\lambda (=2\pi/k)$ και **συγκεκριμένη συχνότητα** $f (= \omega/2\pi)$, είναι εξιδανίκευση, αλλά έχει μεγάλη θεωρητική αξία, διότι η υπέρθεση (πρόσθεση) εξισώσεων τέτοιων κυμάτων με κατάλληλα πλάτη δίνει τις εξισώσεις $\psi(x,t)$ των πραγματικών κυμάτων. Με τις εξισώσεις αυτές $\psi(x,t)$ μπορούν να περιγραφούν εύκολα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης.

- 2) Το τυχαίο πραγματικό κύμα $\psi(x,t)$ της κυματικής εξίσωσης (1.1) έχει πεπερασμένη έκταση Δx και πεπερασμένη χρονική διάρκεια Δt οι οποίες πληρούν τις κλασικές σχέσεις αβεβαιότητας (1.10) και (1.11) του θεωρήματος bandwidth

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \quad (1.10) \quad \Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi \quad (1.11)$$

- 3) Αρκετές φορές η συνθήκη «**περιορισμένος χώρος**» επιβάλλει στα κύματα «**κβάντωση**», δηλαδή διακριτές τιμές σε φυσικά τους μεγέθη

Παραδείγματα

- α) Η συχνότητα και το μήκος κύματος των στάσιμων κυμάτων που μπορούν να σχηματιστούν πάνω σε μια χορδή πεπερασμένου μήκους είναι «**κβαντισμένα**». Δηλαδή μπορούν να πάρουν μόνο συγκεκριμένες **διακριτές** τιμές.

β) Σε χορδή πεπερασμένου μήκους, της οποίας τα άκρα είναι ακίνητα (συνοριακή συνθήκη), επιβάλουμε τυχαίες αρχικές συνθήκες. Δίνουμε δηλαδή στη χορδή ένα τυχαίο αρχικό σχήμα $h(x)$ και επιβάλλουμε στα σημεία της τυχαία κατανομή αρχικών ταχυτήτων $m(x)$.

Η τυχαία (ακατάστατη) κίνηση της χορδής (διαταραχή) αποδίδεται με μια συνάρτηση $\psi(x,t)$, η οποία πληροί την κυματική εξίσωση (1.1) κι έχει ως αρχικές συνθήκες τις

$$\psi(x, 0) = h(x)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = m(x)$$

Συνοριακές συνθήκες της $\psi(x,t)$ είναι να μηδενίζεται στα άκρα της χορδής.

Αποδεικνύεται ότι η $\psi(x,t)$ μπορεί να περιγραφεί ως υπέρθεση εξισώσεων στάσιμων κυμάτων (κανονικών τρόπων ταλάντωσης) **διακριτών** συχνοτήτων και άρα διακριτών μηκών κύματος. Το «ποσοστό συμμετοχής» στην $\psi(x,t)$ του κάθε στάσιμου κύματος, εξαρτάται από το πλάτος του.

Άρα οι έννοιες «κβάντωση» και «διακριτές τιμές» υφίστανται, κατά κάποιο τρόπο, στην κλασική κυματική θεωρία.

Με το βλέμμα στραμμένο σε κυματικά χαρακτηριστικά, όπως η συμβολή, η περίθλαση, οι επαλληλίες και οι διακριτές τιμές κάποιων φυσικών μεγεθών, **η θεωρία των υλικών κυμάτων**, η οποία σημειωτέον δεν διέθετε (και δεν απέκτησε ποτέ) καμιά δικιά της κυματική εξίσωση, προχώρησε πάνω στα κλασικά κυματικά χνάρια που μόλις αναφέραμε:

- 1) Κατ' αναλογία με το κλασικό κύμα $e^{i(kx-\omega t)}$ και παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.1) που συνδέουν κυματικά με σωματιδιακά χαρακτηριστικά, πρόβαλε το δικό της (αρμονικό) **μονοχρωματικό υλικό κύμα** (κυματο-σωματίδιο) ^(*)

$$e^{i(px-Et)/\hbar}$$

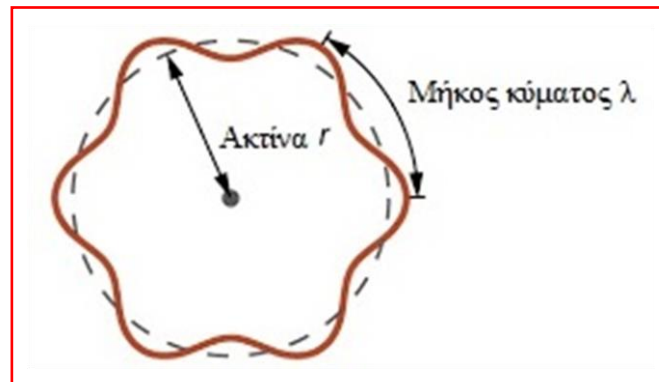
- 2) Με τον τρόπο αυτό σωματίδια ύλης και φως (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) «μετουσιώθηκαν» σε **υλικούς κυματοσωματιδιακούς παλμούς** έκτασης Δx , των οποίων η εξίσωση μπορούσε να αποδοθεί με την υπέρθεση εξισώσεων υλικών μονοχρωματικών κυμάτων, όπως το παραπάνω.
Κυματικά φαινόμενα όπως είναι η συμβολή και η περίθλαση «εξηγήθηκαν» θεωρητικά επειδή όλα απέκτησαν ξαφνικά διπλή φύση. Τα ηλεκτρόνια έγιναν συγχρόνως και υλικά κυματοπακέτα και το φως από ηλεκτρομαγνητικά κυματοπακέτα έγινε συγχρόνως και σωματίδια (φωτόνια).
- 3) «Αυτεπάγγελτα» ενεργοποιήθηκε ο μαθηματικός φορμαλισμός της κλασικής θεωρίας των κυμάτων. Το θεώρημα bandwidth επέβαλε στο οποιοδήποτε υλικό κύ-

^(*) Μπορεί να μην ήταν συνηθισμένη η γραφή της αναλυτικής μορφής ενός μονοχρωματικού **υλικού** κύματος, αλλά ήταν διάχυτη η ομοιότητά του και οι φορμαλιστικές αναλογίες του με τα αντίστοιχα μονοχρωματικά κύματα της κυματικής εξίσωσης.

μα $\psi(x,t)$ έκτασης Δx και χρονικής διάρκειας Δt τις κλασικές σχέσεις αβεβαιότητας (1.10) και (1.11), οι οποίες λόγω των σχέσεων (2.1) πήραν καινούρια μορφή (βλέπε αμέσως παρακάτω)

- 4) Τα σωματίδια πάνω σε κλειστές τροχιές (π.χ. ηλεκτρόνια σε τροχιά γύρω από τον πυρήνα) μετατρέπονται σε στάσιμα υλικά κύματα με συγκεκριμένες συχνότητες. Αυτή η «κβάντωση» των συχνοτήτων φιλοδοξεί να βοηθήσει στην κατασκευή ενός μοντέλου για το άτομο και άρα στην εξήγηση των διακριτών τιμών που παρατηρούνται στα φάσματα και στις τιμές κάποιων φυσικών μεγεθών (σχήμα 2.1).

Τελικά η κβάντωση ενέργειας και ορμής, που επέβαλαν μέσω των σχέσεων (2.1)^(*) σε κάθε συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος αρχικά ο Planck (μέλαν σώμα) και εν συνεχεία ο Einstein (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο), θεωρητικοποιούνται από τον de Broglie και γενικεύονται ως κυματοσωματιδιακός дуϊσμός.



Σχήμα 2.1: Σύμφωνα με τη θεωρία του κυματοσωματιδιακού дуϊσμού ένα σωματίδιο σε κλειστή τροχιά μπορεί να σχηματίσει στάσιμα υλικά κύματα ορισμένων μόνο συχνοτήτων.

2.3 Το θεώρημα bandwidth στα υλικά κύματα

1η μορφή bandwidth στα υλικά κύματα

Η πρώτη κλασική σχέση αβεβαιότητας (1.10) $\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi$ του θεωρήματος bandwidth υποχρεωτικά μεταφέρεται στα υλικά κύματα ως $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$

Απόδειξη

Ο κυματαριθμός k ενός **μονοχρωματικού υλικού κύματος** (μονοχρωματικού κυματοσωματιδίου), λόγω των (2.1), γίνεται

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{h} p$$

^(*) Η εισαγωγή της σταθεράς Planck h αποτελεί κβάντο δράσης με το οποίο κβαντώθηκε η ενέργεια και η ορμή της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κάθε συχνότητας. Η κβαντομηχανική αρχίζει με αυτή τη σταθερά.

Όμως το τυχαίο σωματίδιο αποδίδεται γενικά από υπέρθεση πολλών εξισώσεων μονοχρωματικών υλικών κυμάτων διαφόρων k και συνεπώς ισχύει

$$\Delta k = \frac{2\pi}{h} \Delta p$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση της κλασικής αβεβαιότητας $\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi$ οπότε προκύπτει

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h \quad (2.2)$$

(1η σχέση κλασικής αβεβαιότητας στα υλικά κύματα)

Από την παραπάνω σχέση, η οποία ουσιαστικά είναι η σχέση (1.10) του θεωρήματος *bandwidth* προσαρμοσμένη στα υλικά κύματα, προκύπτουν συμπεράσματα αντίστοιχα με εκείνα της σελίδας 7:

- 1) Γενικά ένα σωματίδιο (δηλαδή ένα υλικό κύμα, υλικός παλμός) καταλαμβάνει έκταση Δx και αποδίδεται (περιγράφεται) με μια υπέρθεση εξισώσεων μονοχρωματικών **υλικών** κυμάτων της μορφής $e^{i(px-Et)/\hbar}$ τα οποία έχουν κατάλληλα πλάτη και των οποίων το φάσμα των ορμών έχει εύρος Δp (σχήμα 2.2).
- 2) Όσο μικρότερη είναι η έκταση Δx την οποία καταλαμβάνει ένα σωματίδιο, τόσο μεγαλύτερο είναι το εύρος Δp του φάσματος των ορμών των μονοχρωματικών υλικών κυμάτων, που απαιτούνται για να αποδώσουν την έκτασή του και γενικότερα την παρουσία του σωματιδίου.
- 3) Για ένα **μονοχρωματικό υλικό κύμα**, δηλαδή για ένα σωματίδιο που έχει απόλυτα καθορισμένη ορμή p , ισχύει $\Delta p=0$ και συνεπώς $\Delta x \rightarrow \infty$. Άρα το (μονοχρωματικό) αυτό σωματίδιο δεν έχει συγκεκριμένη θέση, αλλά καταλαμβάνει άπειρο χώρο (*).

Αυτό εξάλλου το περιμέναμε:

Από τη στιγμή που ένα σωματίδιο με απόλυτα καθορισμένη ορμή p αντιστοιχεί σε μονοχρωματικό υλικό κύμα με μήκος κύματος $\lambda = h/p$, θα καταλαμβάνει άπειρο χώρο ($\Delta x \rightarrow \infty$), όπως κάνουν όλα τα μονοχρωματικά κύματα.

Προσέξτε!

- Δε λέμε ότι το μονοχρωματικό σωματίδιο έχει ίδια πιθανότητα να βρεθεί παντού στο χώρο, αλλά ότι ήδη βρίσκεται παντού σε όλο τον χώρο.
Είναι ήδη πανταχού παρόν!

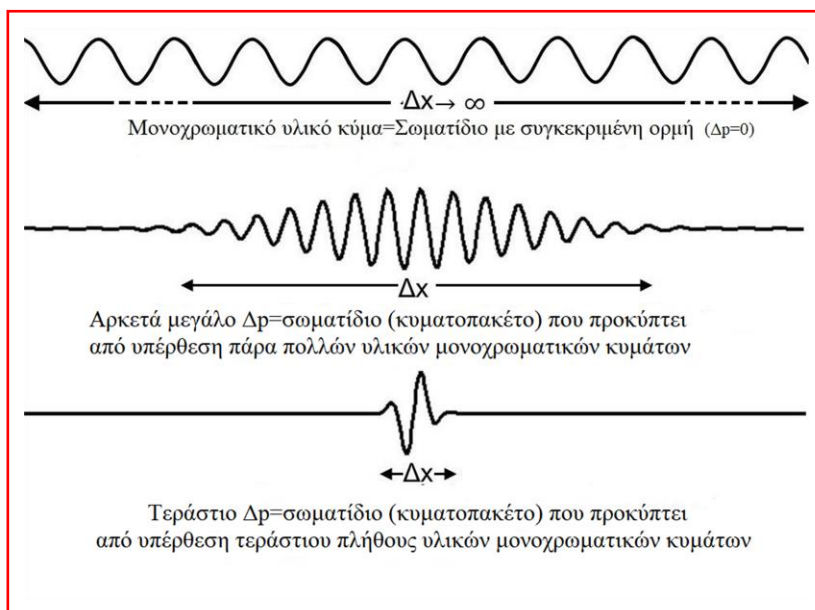
Η ιδέα της πιθανότητας δεν έχει εισαχθεί, τουλάχιστον ακόμη, στη θεωρία των υλικών κυμάτων. Κάτι ψελλίσματα περί πιθανοτήτων «ακούστηκαν» αργότερα, αλλά ήταν χωρίς καμιά ουσία και χωρίς την απαιτούμενη από τη Φυσική συνέπεια. Ακούγονται και σήμερα, αλλά είναι σίγουρα ανεπιθύμητος θόρυβος.

(*) Αυτό όμως προϋποθέτει ότι το σωματίδιο πρέπει να έχει και άπειρη μάζα προκειμένου να την «ξαπλώσει» σε όλο τον άπειρο χώρο. Πεπερασμένη ορμή και άπειρη μάζα λοιπόν!

- Προφανώς, μέχρι αυτό το σημείο του κειμένου, **η σχέση (2.2) δεν είναι η** (κβαντομηχανική) **αρχή αβεβαιότητας** του Heisenberg, αλλά η παλιά 1η κλασική αρχή αβεβαιότητας του θεωρήματος bandwidth προσαρμοσμένη στα υλικά κύματα.

Άρα η πορεία που αναφέραμε δεν αποτελεί απόδειξη της κβαντομηχανικής αρχής της απροσδιοριστίας, αλλά περιγραφή του κλασικού πλαισίου μέσα στο οποίο κινήθηκε η θεωρία των υλικών κυμάτων.

Η ουσία και συνεπώς η ισχύς των αρχών του Heisenberg, που ελέγχουν τη δομή του Κόσμου, θα αναζητηθούν αλλού.



Σχήμα 2.2: Κυματοπακέτα υλικών κυμάτων, δηλαδή σωματίδια κατά de Broglie. Όσο μικρότερη είναι η έκταση ενός σωματιδίου, τόσο περισσότερα υλικά μονοχρωματικά κύματα υπερτίθενται για να το σχηματίσουν.

2η μορφή bandwidth στα υλικά κύματα

Η δεύτερη κλασική σχέση αβεβαιότητας (1.11) $\Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi$ του θεωρήματος bandwidth υποχρεωτικά μεταφέρεται στα υλικά κύματα ως

$$\Delta t \cdot \Delta E \approx h$$

Απόδειξη

Για ένα μονοχρωματικό σωματίδιο ισχύει

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{και} \quad f = \frac{E}{h}$$

Η ταχύτητα u με την οποία «διαδίδεται» το μονοχρωματικό αυτό σωματίδιο-υλικό κύμα, δηλαδή η φασική του ταχύτητα ^(*), είναι

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h}$$

από όπου

$$E = v \cdot p \quad (2.3)$$

Όμως το τυχαίο σωματίδιο είναι υλικό κυματοπακέτο και περιγράφεται γενικά ως επαλληλία πλήθους εξισώσεων μονοχρωματικών υλικών κυμάτων.

Συνεπώς η (2.3) δίνει

$$\Delta E = v \cdot \Delta p \Rightarrow \Delta E = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta p$$

και τελικά λόγω της (2.2)

$$\Delta t \cdot \Delta E \approx h \quad (2.4)$$

(2η σχέση κλασικής αβεβαιότητας στα υλικά κύματα)

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι

1) Ένα υλικό κύμα $\psi(x,t)$ (ένα σωματίδιο δηλαδή) με χρονικό εντοπισμό Δt αποδίδεται ουσιαστικά με μια υπέρθεση υλικών μονοχρωματικών κυμάτων, των οποίων το φάσμα των ενεργειών τους έχει εύρος ΔE . Όσο μικρότερο σε χρονική διάρκεια Δt είναι ένα υλικό κύμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το εύρος ΔE του φάσματος των ενεργειών (δηλαδή τόσο πιο πολλά είναι τα υλικά μονοχρωματικά κύματα) που απαιτούνται για να το αποδώσουν.

2) Η σχέση (2.3) $E = v \cdot p$ των υλικών κυμάτων

- Είναι η σωματιδιακή μετάφραση της κλασικής κυματικής σχέσης (1.4)

$$\omega = v \cdot k$$

- Είναι μια σχέση ανάμεσα στην ενέργεια και την ορμή ελεύθερου σωματιδίου, όπου εμπλέκεται όμως και η φασική ταχύτητα v των υλικών κυμάτων. Επειδή είναι μια σχέση επιπλέον των γνωστών σίγουρα θα δημιουργήσει προβλήματα.

Ας δούμε μερικά:

Αν η ταχύτητα u με την οποία κινείται ένα ελεύθερο σωματίδιο είναι μη σχετικιστική, τότε η ενέργειά του είναι νευτώνεια και άρα η σχέση (2.3) δίνει

$$\frac{p^2}{2m} = v \cdot p \Rightarrow v = \frac{p}{2m} \Rightarrow v = \frac{u}{2}$$

^(*) Σε οποιοδήποτε μονοχρωματικό κύμα (είτε υλικό είτε κλασικό) η φασική ταχύτητα είναι $u = \lambda f$ και συμπίπτει πάντα με την ταχύτητα ομάδας u_g , δηλαδή $v = u_g = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Η σχέση αυτή ισχύει γενικότερα και για τα άλλα κύματα στην περίπτωση που στο μέσο διάδοσης δεν υπάρχει διασκεδασμός. Τα υλικά κύματα-σωματίδια δεν πρέπει να υφίστανται διασκεδασμό, προκειμένου τα σωματίδια να διατηρούν τη μορφή τους. Αλλιώς θα διαλύονταν.

Το πρόβλημα:

Η φάση όλων των υλικών μονοχρωματικών κυμάτων που «συνθέτουν» το κλασικό σωματίδιο τρέχει με την ίδια ταχύτητα u , η οποία όμως είναι διαφορετική από την ταχύτητα ομάδας u με την οποία τρέχει το σωματίδιο.

Αν η ταχύτητα u με την οποία κινείται ένα ελεύθερο σωματίδιο είναι συγκρίσιμη με εκείνη του φωτός, τότε η ενέργεια και ορμή του είναι σχετικιστικές και συνεπώς

$$v = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mu} = \frac{c^2}{u} \quad (2.5)$$

όπου m είναι η (σχετικιστική) μάζα του σωματιδίου.

- Αν το σωματίδιο είναι φωτόνιο τότε η ταχύτητά του είναι $u=c$ και συνεπώς η παραπάνω σχέση δίνει $v = u = c$. Δηλαδή η κοινή φασική ταχύτητα v συμπίπτει με την ομαδική ταχύτητα u . Λογικό. Το κάθε φωτόνιο, αλλά και τα μονοχρωματικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα από τα οποία συνίσταται κατά τη θεωρία των υλικών κυμάτων, «κινούνται» (διαδίδονται) όλα με την ίδια ταχύτητα, την ταχύτητα του φωτός c .
- Αν όμως το σωματίδιο είναι σωματίδιο ύλης, π.χ. ηλεκτρόνιο, τότε $u < c$ και συνεπώς $v > c$. Το ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα u μικρότερη του φωτός, αλλά η κοινή φασική ταχύτητα των μονοχρωματικών υλικών κυμάτων που το συνθέτουν είναι μεγαλύτερη του φωτός.
Αυτό γενικά δεν έρχεται σε αντίθεση με τη σχετικότητα, γιατί σε όλα τα κύματα, άρα και στο εν λόγω σωματίδιο, οι πληροφορίες (ενέργεια π.χ.) δε διαδίδονται με τη φασική ταχύτητα v , αλλά με την ομαδική ταχύτητα του κυματοπακέτου-ηλεκτρονίου η οποία είναι $v_g = u$ (βλέπε σελ.7).
Το γεγονός όμως ότι η φασική ταχύτητα των μονοχρωματικών κυμάτων που υπερτίθενται για να συνθέσουν το σχετικιστικό υλικό κύμα (σωματίδιο) είναι μεν κοινή, αλλά δεν συμπίπτει με την ταχύτητα u του σωματιδίου, σημαίνει ότι αυτό χάνει τη μορφή του λόγω ... διασκεδασμού.

3) Η φασική ταχύτητα v και η συχνότητα των υλικών κυμάτων δε μπορούν να μετρηθούν, σε αντίθεση με την ορμή και την ενέργειά τους.

2.4 Οι σχέσεις bandwidth δεν είναι οι σχέσεις Heisenberg

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι σχέσεις

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h \quad (2.2) \quad \text{και} \quad \Delta t \cdot \Delta E \approx h \quad (2.4)$$

δεν είναι οι σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg, αλλά οι κλασικές σχέσεις αβεβαιότητας που επιβάλλει στα υλικά κύματα το θεώρημα bandwidth. Επομένως το σύμβολο Δ δηλώνει έκταση μεγεθών και οι παραπάνω σχέσεις είναι ουσιαστικά οι υποχρεωτικοί περιορισμοί αυτών των εκτάσεων.

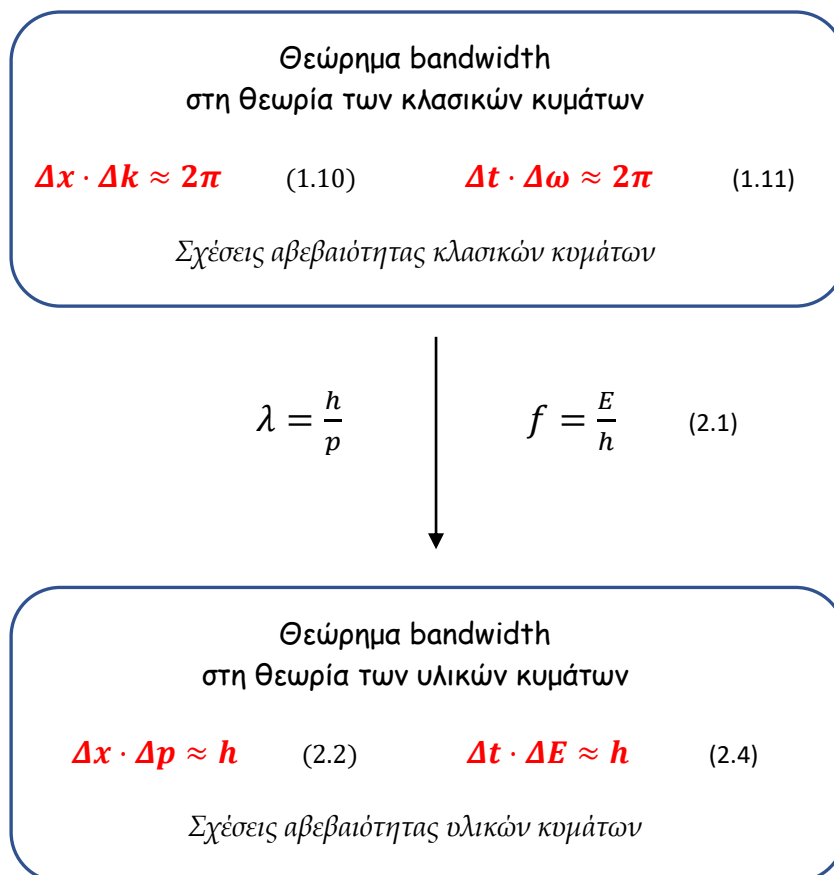
Από τα προηγούμενα λοιπόν είναι προφανές ότι η θεωρία του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού δεν ξέφυγε καθόλου μα καθόλου από την κλασική λογική. Απλά στους περιορισμούς

που έθεταν στα σωματίδια οι (κλασικοί) νόμοι του Νεύτωνα, προστέθηκαν τώρα και οι κλασικοί κυματικοί περιορισμοί του θεωρήματος bandwidth.

Έτσι λοιπόν στις παραπάνω σχέσεις (2.2) και (2.4)

- 1) Το Δx είναι η έκταση του υλικού κύματος (ή σωματιδίου ή σωματιδιοκυματοπακέτου ή σωματιδιοκυματοπαλμού ή υλικού κυματοπαλμού ή όπως αλλιώς θέλετε πείτε το). Είναι η έκταση που προσδίδει στο σωματίδιο η υπέρθεση των μονοχρωματικών υλικών κυμάτων που το συνθέτουν. Πάντως το Δx είναι έκταση. Είναι η έκταση π.χ. του ηλεκτρονίου, του φωτονίου κ.λπ. σύμφωνα με τη θεωρία του de Broglie (σχήμα 2.2)
- 2) Τα Δp και ΔE είναι το εύρος του φάσματος των ορμών και των ενεργειών αντίστοιχα των μονοχρωματικών υλικών κυμάτων που συνθέτουν το σωματίδιο
- 3) Το Δt είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο να περάσει από κάποιο σημείο του χώρου, κινούμενο με την ταχύτητα ομάδας u_g η οποία, όπως ήδη αναφέραμε, συμπίπτει με την ταχύτητα u με την οποία κινείται το σωματίδιο

Σχηματικά



Επισημάνση

Πιθανώς στα προηγούμενα περί υλικών κυμάτων να έχετε εντοπίσει εννοιολογικά προβλήματα, συλλογιστικά αδιέξοδα και μη πειστικά επιχειρήματα. Είναι εντελώς φυσιολογικό γιατί τα υλικά κύματα και ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός δεν είναι κβαντομηχανική, αλλά μια προσπάθεια του de Broglie^(*) κυρίως, να εξηγηθούν φαινόμενα του υποατομικού κόσμου αναμειγνύοντας κλασικές θεωρίες.

Από το μίγμα Νεύτωνα, Μάξγουελ και (κλασικής) κυματικής, που χρησιμοποίησε η θεωρία των υλικών κυμάτων, προέκυψαν περιγραφές με περίεργα κλασικά κατασκευάσματα. Όλα έγιναν θλιβερά «εκτρώματα» που είχαν δύο κλασικές φύσεις συγχρόνως (διπλή φύση). Αλλά δεν κατάφεραν ποτέ να γίνουν τα (σύγχρονα) κβαντικά πλάσματα που απαιτούν συνεπείς έννοιες και ορολογία, πεντακάθαρους συλλογισμούς, πιθανότητες, αβεβαιότητες και ... αλληλεπίδραση για να υπάρχουν.

Ας προτρέξουμε λίγο:

Η εξίσωση του Schrödinger και οι αρχές αβεβαιότητας του Heisenberg δεν ασχολούνται ούτε με δυϊσμούς, ούτε θεωρούν κάτι σοβαρό τις χωροχρονικές εκτάσεις των υλικών κυματοπακέτων κλασικής συμπεριφοράς, τα οποία ως υλικοπαλμοί περνάνε από συγκεκριμένα σημεία ακολουθώντας συγκεκριμένες τροχιές.

Αντίθετα έχουν μέσα τους τις δομικές πιθανότητες της Φύσης προκειμένου να ερμηνεύσουν τις πρωτόγνωρες συμπεριφορές των κβαντικών οντοτήτων όπως είναι το φωτόνιο, ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο κλπ.

Οι σχέσεις (2.2) και (2.4) λοιπόν, καθώς και οι έννοιες που κουβαλάνε μαζί τους, είναι απελπιστικά γαντζωμένες σε κλασικές θεωρίες και συνεπώς είναι μια ... ξεπερασμένη ιστορικότητα, αλλά όχι οι αρχές του Heisenberg. Μοιάζουν, αλλά δεν είναι ισοδύναμες με αυτές, γιατί τους λείπει η αυστηρότητα και το βάθος της ερμηνείας της κβαντομηχανικής αβεβαιότητας.

^(*) Η μόνη ουσιαστική προσφορά στη Φυσική του πρίγκιπα de Broglie είναι ότι συγκεκριμενοποίησε ως θεωρία υλικών κυμάτων και δυϊσμού μια ιδέα η οποία έτσι κι αλλιώς υπήρχε από πριν διάχυτη. Με μια εξαιρετικά σύντομη διδακτορική διατριβή, η οποία ουσιαστικά ήταν μια αδιέξοδη εννοιολογική επέκταση των μεγαλοφυιών σχέσεων των Planck και Einstein, ο de Broglie πήρε **μόνος του** ένα ολόκληρο βραβείο Νόμπελ. Αντιθέτως οι πανίσχυρες και αξεπέραστες καταθέσεις του ευέλκτου Schrödinger και ειδικά του κορυφαίου Φυσικού Dirac **μοιράστηκαν** το Νόμπελ. Ίσως πρέπει πάντα να υπάρχει αδικία.

Ενότητα 3

Το μοντάρισμα και η ερμηνευτική απογείωση της εξίσωσης Schrödinger

3.1 Το μοντάρισμα της εξίσωσης Schrödinger

Τότε λοιπόν που πολύς κόσμος απορούσε και που τα ατομικά πρότυπα είχαν καταρρεύσει γεμάτα αντιφάσεις και που αντικαταστάτης τους δεν υπήρχε, τότε που ο καταπληκτικός Φυσικός Μπορ με τις δύο συνθήκες του είχε αρχίσει να σηκώνει την κουρτίνα για να δούμε ότι το Σύμπαν είναι κβαντικό,

Ο De Broglie, όπως είδαμε,

- **έδωσε** την ιδέα των υλικών κυμάτων και του δυϊσμού της ύλης ενισχύοντάς την με τις σχέσεις

$$p = \hbar k \quad \text{και} \quad E = \hbar \omega \quad (3.1)$$

όπου

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi f \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Οι σχέσεις αυτές ουσιαστικά τέθηκαν αυθαίρετα, αλλά επειδή «λειτουργήσαν» σε κάποιες περιπτώσεις, ειδικά με το φως, έγιναν καθολικά δεκτές, εκτός από τη βαρύτητα η οποία από τότε αντιδρούσε στις ομαδικές «καλουπώσεις».

Η βαρύτητα το 1924 δεν ήταν ούτε κύμα ούτε σωματίδιο, αλλά νευτώνεια δύναμη ή έστω αϊνστάνια χωροχρονική καμπύλωση. Οπότε δε μπορούσε (ευτυχώς) να γίνει κυματοσωματιδιακό πακέτο υλικών μονοχρωματικών κυμάτων.

- **προσπάθησε** με ηλεκτρόνια, που «μετουσιώθηκαν» σε στάσιμα υλικά κύματα και κατέλαβαν τα μήκη κλειστών τροχιών γύρω από τον πυρήνα

- Να εξηγήσει τις αυθαίρετες συνθήκες του Bohr, μετατοπίζοντας όμως την αυθαίρεσία των συνθηκών στις σχέσεις (3.1) και στα υποατομικά στάσιμα υλικά κύματα.
- Να γλιτώσει το ατομικό πρότυπο του Ράδερφορντ, κβαντώνοντας τις τροχιές των ηλεκτρονίων και τα μέτρα των ταχυτήτων τους.

Ο Debye, που ήταν καλός μαθητής του Sommerfeld και μπολιασμένος με τις ιδέες του Δασκάλου του πάνω στα κύματα, έβλεπε ότι οι απόψεις του De Broglie και όλα αυτά τα περί υλικών κυμάτων και διπλής φύσης ήταν εντελώς παιδιακίστικα πράγματα και επέμενε σε κάτι πάρα πολύ σοφό:

Για να μιλήσει κάποιος σωστά για κύματα (όπως π.χ. τα υλικά κύματα) έπρεπε να διαθέτει οπωσδήποτε μια κυματική εξίσωση, ικανή να επιβάλει σε αυτά την ξεχωριστή δυναμική που απαιτεί το εκάστοτε συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ουσιαστικά έπρεπε

- Να βρεθεί μια κυματική εξίσωση και να αναπτυχθεί γύρω της ένας συνεπής και πλήρης μαθηματικός φορμαλισμός που θα στηρίξει το επιχείρημα.
- Να ερμηνευτούν κατάλληλα οι καινούριες σχέσεις, έννοιες, τεχνικές κ.λπ. που θα εισάγει η κυματική εξίσωση.
- Να αποφασίσει το πείραμα για τη μοίρα του εγχειρήματος.

Τις απόψεις αυτές ο Debye, και ειδικότερα την ανάγκη εύρεσης κυματικής εξίσωσης, μετέφερε στον Schrödinger και τον σκούνησε να τις πάρει σοβαρά υπόψη του.

Ο Schrödinger συνειδητοποίησε το δίκιο στην επιμονή του Debye, είδε το μήκος κύματος και τη συχνότητα στις σχέσεις (3.1) και άρχισε να θέτει τις **προδιαγραφές της νέας κυματικής εξίσωσης** που έπρεπε να κατασκευαστεί: (*)

- Η εξίσωση θα είναι στραμμένη κυρίως προς την κυματική συμπεριφορά των σωματιδίων και όχι προς τη σωματιδιακή συμπεριφορά των κυμάτων. Άρα θα αναδεικνύει κυρίως την κβαντική συμπεριφορά των υποατομικών σωματιδίων (ηλεκτρονίων, πρωτονίων κλπ) και όχι την κβαντική συμπεριφορά του φωτός, κάτι που έκανε αργότερα η κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED).
- Οι σχέσεις $p = \hbar k$ και $E = \hbar \omega$ θα ισχύουν και για τα σωματίδια και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
- Όταν η ζητούμενη εξίσωση αναφέρεται σε ελεύθερο σωματίδιο, θα δέχεται ως λύση μια συνάρτηση που θα μοιάζει με τα κλασικά μονοχρωματικά κύματα

$$e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.2)$$

Όμως στη θέση των καθαρά κυματικών μεγεθών k και ω θα μπουν τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά ορμή p και ενέργεια E του σωματιδίου, βάσει των σχέσεων (3.1)

(*) Ο περιορισμός σε μονοδιάστατες εξισώσεις και σχέσεις δεν επηρεάζει την ποιότητα των συμπερασμάτων

Άρα μια μερική λύση της εξίσωσης που αναζητείτο έπρεπε να είναι η

$$e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (3.3)$$

- Μεταξύ της κινητικής ενέργειας E και της ορμής p του ελεύθερου (κυματο-) σωματιδίου πρέπει να διατηρηθεί η νευτώνεια σχέση

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Στη γενική περίπτωση που το σωματίδιο βρεθεί σε πεδίο πρέπει η ζητούμενη κυματική εξίσωση να εξασφαλίζει ότι η συνολική του ενέργεια E θα είναι το άθροισμα της κινητικής $p^2/2m$ και της δυναμικής του ενέργειας $V(x)$.

Γενικά πρέπει να εξασφαλίζεται τόσο η «λειτουργία» της κλασικής Χαμιλτονιανής

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (3.4)$$

όσο και τα πολυελεγμένα πειραματικώς κλασικά νευτώνεια όρια

- Η ζητούμενη εξίσωση πρέπει να είναι γραμμική και ομογενής, ώστε η επαλληλία των λύσεων της να είναι επίσης λύση της. Αυτό θα εξασφαλίσει την ερμηνεία φαινομένων, όπως είναι η «περίθλαση» και η «συμβολή» των σωματιδίων.
- Οι συντελεστές της εξίσωσης πρέπει να είναι σταθεροί. Μπορούν να περιέχουν σταθερές, όπως το c , το $\hbar$, τη μάζα του σωματιδίου, το φορτίο του κ.λπ., αλλά όχι δυναμικές μεταβλητές του προβλήματος, όπως είναι η ενέργεια, η ορμή, ο κυμαριθμός κ.λπ.
Με τον τρόπο αυτό, και δεδομένης της γραμμικότητας της εξίσωσης, θα εξασφαλίζονται τόσο η υπέρθεση λύσεων με διαφορετικές τιμές δυναμικών μεταβλητών, όσο και οι συμμετρίες χώρου και χρόνου.
- Διάφορα πραγματικά φυσικά μεγέθη θα αντιστοιχηθούν σε μιγαδικούς τελεστές, ώστε να μπου πρωταγωνιστικά στη σκηνή οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοτιμές (διακριτές τιμές) σε πολλά φυσικά μεγέθη και να αποφευχθούν διαχύσεις της μάζας και του φορτίου στο χώρο. Επίσης τα τετράγωνα των λύσεων της εξίσωσης δεν θα πρέπει να εμπλέκονται σε πραγματικές πυκνότητες ενέργειας όπως π.χ. κάνουν οι ενέργειες των πεδίων κλπ
- Μια κλασική πορεία προς την κατάστρωση της εξίσωσης είναι προτιμητέα από άλλες πορείες, γιατί θα εξασφαλίσει καλύτερα ότι στα όρια της κλασικής Φυσικής η αναζητούμενη κυματική εξίσωση δε θα συγκρουστεί με αυτήν.

κ.λπ. κ.λπ. κ.λπ. (*)

(ποιος ξέρει άραγε ποιους ακριβώς συλλογισμούς έκανε ο Schrödinger;)

(*) Ο τρόπος και οι λεπτομέρειες της **πιθανής** πορείας προς την κατάστρωση της εξίσωσης του Schrödinger μπορούν να βρεθούν εύκολα σε αρκετά βιβλία εισαγωγής στην Κβαντομηχανική

Με τέτοιου είδους σκέψεις-μαγειρέματα και κλασικές «αλχημείες» φτάνουμε στην **χρονο-εξαρτώμενη εξίσωση** του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση προέκυψε ουσιαστικά από το μυαλό του Schrödinger χωρίς καμιά αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Αλλά τι να πούμε; Μήπως έτσι δεν κάνουν όλες οι βασικές εξισώσεις της Φυσικής (όπως π.χ η νευτώνεια θεμελιώδης εξίσωση $\vec{F} = m\vec{a}$), αφήνοντας το πείραμα να αποφασίσει αν το μέλλον τους θα είναι στη δόξα ή στα σκουπίδια;

3.2 «Ομοιότητες» κυματικής εξίσωσης και εξίσωσης Schrödinger

Η χρονοεξαρτώμενη εξίσωση (3.5), έχοντας ενσωματώσει αρκετές φορμαλιστικές ιδέες της θεωρίας των κλασικών κυμάτων, βρέθηκε σε πολλά σημεία κοντά στην (κλασική) κυματική εξίσωση (1.1).

Παρακάμπτοντας επιμέρους σχολαστικότητες και σκεπτόμενος ότι κάποιοι μαθηματικοί συλλογισμοί παρουσιάζουν δομικές ομοιότητες, πιστεύω ότι αξίζει να αποκτήσουμε μια αίσθηση της «προσέγγισης» των δύο εξισώσεων, αναφέροντας δύο φορμαλιστικά παραδείγματα.

1ο παράδειγμα

Οι χρονοανεξάρτητες μορφές των εξισώσεων (3.5) και (1.1) μπορούν να «μοιάσουν» φορμαλιστικά

Αποδεικνύεται ότι μια λύση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης του Schrödinger, η οποία μάλιστα αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή ενέργειας E του σωματιδίου, είναι η μιγαδική συνάρτηση

$$\psi(x,t) = u(x) \cdot e^{-iEt/\hbar} \quad (3.6)$$

Για να βρούμε τη σχέση που πληροί η $u(x)$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.5) οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))u(x) = 0 \quad (3.7)$$

(χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger)

και τελικά

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + k^2 u(x) = 0 \quad (3.8)$$

με

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))} \quad (3.9)$$

Αποδεικνύεται ότι μια λύση της (χρονοεξαρτώμενης) κλασικής κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

η οποία μάλιστα αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή κυκλικής συχνότητας ω του κύματος είναι η μιγαδική συνάρτηση

$$\psi(x, t) = u(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

Για να βρούμε τη σχέση που πληροί η $u(x)$ αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.1) οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} u(x) = 0 \quad (3.11)$$

(χρονοανεξάρτητη κλασική κυματική εξίσωση)

και τελικά

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + k^2 u(x) = 0 \quad (3.12)$$

με

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (3.13)$$

Το k στην εξίσωση (3.8) θα είναι ανεξάρτητο από τη θέση x αν η δυναμική ενέργεια V δεν εξαρτάται από την θέση x .

Το k στην εξίσωση (3.12) θα είναι ανεξάρτητο από τη θέση x αν η φασική ταχύτητα v δεν εξαρτάται από την θέση x .

Με δεδομένη λοιπόν την απλή εξάρτηση από το χρόνο των λύσεων (3.6) και (3.10), μετατοπίσαμε τη λύση δύο βασικών διαφορικών εξισώσεων της Φυσικής από τις διαφορετικές χρονοεξαρτώμενες μορφές στις «όμοιες» μεταξύ τους χρονοανεξάρτητες μορφές.

2ο παράδειγμα

Ο τρόπος που οι μερικές λύσεις δίνουν τη γενική λύση είναι κάποιες φορές αποκαλυπτικός

Αποδεικνύεται ότι η απλότητα στην εξάρτηση της λύσης (3.6) από τον χρόνο επιβάλλει κβάντωση στην ενέργεια E , οπότε η (3.6) γράφεται πιο ανάγλυφα

$$\psi_n(x, t) = u_n(x) \cdot e^{-i E_n t / \hbar} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (3.14)$$

Η γραμμικότητα και η ομογένεια της εξίσωσης (3.5) μας επιτρέπει να γράψουμε μια πιο «ισχυρή» λύση της, χρησιμοποιώντας τις κβαντωμένες ενέργειες

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \cdot e^{-i E_n t / \hbar} \quad (3.15)$$

Ο άπειρος αριθμός των κβαντωμένων ενεργειών, άρα και των σταθερών συντελεστών c_n στην παραπάνω σχέση, αποδεικνύεται ότι εξασφαλίζει τη μοναδικότητά της $\psi(x, t)$ ως γενικής λύσης της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης του Schrödinger.

Από τη σχέση (3.15) φαίνεται ότι η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος περιγράφεται ως υπέρθεση ενός άπειρου πλήθους καταστάσεων $\psi_n(x, t)$ η καθεμιά από τις οποίες χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένη ενέργεια E_n .

.....

Αν επιδιώξουμε από την κυματική εξίσωση (1.1) αντίστοιχη εικόνα με «κβαντώσεις», μπορούμε να πάμε για παράδειγμα σε μια χορδή, που να έχει ως συνοριακές συνθήκες τα ακίνητα τα άκρα της, και να της επιβάλλουμε τυχαίες αρχικές συνθήκες (σελ. 14).

Αποδεικνύεται ότι η απλότητα στην εξάρτηση της λύσης (3.10) από τον χρόνο επιβάλλει «κβάντωση» στην κυκλική συχνότητα ω , οπότε η λύση πιο ανάγλυφα γράφεται

$$\psi_n(x, t) = u_n(x) \cdot e^{i\omega_n t} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (3.16)$$

Η γραμμικότητα και η ομογένεια της κυματικής εξίσωσης μας δίνει το δικαίωμα να γράψουμε μια πιο «ισχυρή» λύση της, χρησιμοποιώντας τις κβαντωμένες κυκλικές συχνότητες

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.17)$$

Η παρουσία του συνημίτονου, κι όχι κάποιας μιγαδικής παράστασης, οφείλεται σε δικιά μας παρέμβαση-επιλογή, ώστε η συνάρτηση (3.17) να περιγράφει πραγματική κίνηση, πραγματικού αντικειμένου (χορδή), σε πραγματικό κόσμο.

Ο άπειρος αριθμός των κβαντωμένων συχνοτήτων, άρα και των σταθερών c_n στην παραπάνω σχέση, αποδεικνύεται ότι εξασφαλίζει τη μοναδικότητά της $\psi(x, t)$ ως γενικής λύσης της τυχαίας κίνησης μιας χορδής που έχει ακίνητα τα άκρα της.

Από τη σχέση (3.17) φαίνεται ότι η τυχαία κίνηση της χορδής περιγράφεται από έναν άπειρο αριθμό προσθετών κβαντωμένων κυκλικών συχνοτήτων ω_n , οι οποίοι δεν είναι τίποτε άλλο από τα άπειρα στάσιμα κύματα των οποίων η υπέρθεση αποδίδουν την τυχαία κίνηση $\psi(x, t)$ της χορδής.

Στις σχέσεις (3.8) και (3.12) μπορούν λοιπόν να αναζητηθούν αρκετές φορμαλιστικές ομοιότητες (σε φόρμες, σε κβαντώσεις, σε ορθογωνιότητες ιδιοσυναρτήσεων κλπ). Όμως οι εννοιολογικές και ερμηνευτικές τους διαφορές είναι τεράστιες. Μπορεί δηλαδή να υπάρχει μαθηματική «ομοιότητα», αλλά η Φυσική των εξισώσεων είναι εντελώς διαφορετική.

3.3 Η ξεχωριστή αξία της εξίσωσης Schrödinger και των σχέσεων αβεβαιότητας του Heisenberg

Αν τα πράγματα παρέμεναν στο επίπεδο των υλικών κυμάτων και του δυϊσμού η εξίσωση Schrödinger θα ήταν μια ακόμη κυματική εξίσωση πολύ δεμένη με τις κλασικές κυματικές θεωρίες. Οι δε σχέσεις αβεβαιότητας, που σίγουρα (*) περιέχει, θα ήταν εκείνες οι απλές

(*) Τον λόγο της τόσης «σιγουριάς» θα αναλύσουμε στην υποενότητα 4.7 στη σελίδα 47

και «άσημες» του θεωρήματος bandwidth.

Όμως **τρία πράγματα απογείωσαν την εξίσωση Schrödinger** επιτρέποντας στις σχέσεις αβεβαιότητάς της να ξεφύγουν από τις κλασικές καταβολές τους και να γίνουν ισχυρότατες, σημείο αναφοράς κάθε σοβαρής (επιστημονικής) θεώρησης του Κόσμου μας.

Πρώτο:

**Η μεγαλοφυής ερμηνεία και ο μεγαλοφυής χειρισμός
της κυματοσυνάρτησης $\psi(x, t)$**

Αυτή καθαυτή η λύση $\psi(x, t)$ της εξίσωσης του Schrödinger, η κυματοσυνάρτηση όπως ονομάζεται τελικά, είναι μια (καθαρά) μιγαδική συνάρτηση και συνεπώς δεν αντιπροσωπεύει τίποτε πραγματικό, τίποτε παρατηρήσιμο. Δεν περιγράφει συμπεριφορά ούτε κύματος, ούτε σωματιδίου. ΟΜΩΣ η μεγαλοφυής στατιστική ερμηνεία που της έδωσε ο Born, άγγιξε τα πολύ βαθιά της Φύσης, αποκαλύπτοντας ότι στη δομή του Κόσμου βρίσκονται πιθανότητες και μάλιστα ανεξέλεγκτες:

Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της κυματοσυνάρτησης $\psi(x, t)$, είναι πυκνότητα πιθανότητας θέσης. Άρα η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση x (δηλαδή κάπου μεταξύ x και $x+dx$) τη χρονική στιγμή t είναι

$$|\psi(x, t)|^2 dx$$

Η στατιστική ερμηνεία του Born δεν είναι στατιστική διαχείριση πολλών σωματιδίων (στατιστική φυσική), ούτε πιθανότητες λόγω έλλειψης δεδομένων (κάτι δηλαδή σαν τη ρίψη κέρματος), ούτε στατιστική που οφείλεται σε αδυναμία απόκτησης και επεξεργασίας κάποιου τεράστιου πλήθους δεδομένων, ούτε σφάλματα ή τεχνολογικές ατέλειες μετρητικών συσκευών, ούτε...ούτε...

Είναι δομικές πιθανότητες, δομικές τυχαιότητες της Φύσης, οι οποίες καθορίζουν τον τρόπο λειτουργίας της και τη δημιουργική της ικανότητα.

Η Φύση «παίζει ζάρια» χωρίς γενικά να νοιάζεται ούτε πότε και πού ακριβώς θα ριχτούν, ούτε και τι θα φέρουν.

Η δομική στατιστική ερμηνεία που δόθηκε σε συνάρτηση-λύση βασικής εξίσωσης ήταν πρωτόγνωρη τακτική στη Φυσική. **Άλλαξε εντελώς τη λογική μας** και μας έκανε πιο ικανούς στην κατανόηση της λειτουργίας του Κόσμου μας.

Με την ερμηνεία του Born,

- Η εξίσωση Schrödinger παύει να είναι μια αδύναμη κυματική εξίσωση κάποιων αναχρονιστικών και συλλογιστικά αδιέξοδων υλικών κυμάτων και απογειώνεται σε μια σύγχρονη κβαντική εξίσωση, η οποία χειρίζεται δομικές πιθανότητες της Φύσης και πρωτόγνωρες συμπεριφορές κβαντικών «πλασμάτων» (ηλεκτρονίων, πρωτονίων, ατόμων κ.λπ.).
- Οι αρχές αβεβαιότητας, τις οποίες έτσι κι αλλιώς είχε μέσα της η εξίσωση του Schrödinger ως σχέσεις τύπου bandwidth, αποκτούν μαθηματική αυστηρότητα, ισχυρότατη ερμηνευτική δύναμη, τρομερή λάμψη και φοβερά αποκαλυπτική ματιά όταν «κοιτάνε» το Σύμπαν. Γίνονται οι πανίσχυρες αρχές αβεβαιότητας του Heisenberg.

- Η λύση $\psi(x, t)$ της εξίσωσης Schrödinger δεν είναι πλέον μια συνάρτηση κυμάτων (κυματοσυνάρτηση), αλλά η κβαντοσυνάρτηση του συστήματος (*)

Δεύτερο:

Η εντονότατη κινητοποίηση των Μαθηματικών

Η μιγαδική μορφή της εξίσωσης του Schrödinger, οι υποχρεωτικά καθαρά μιγαδικές λύσεις της και η στατιστική ερμηνεία του Born κινητοποίησαν πολλούς κλάδους Μαθηματικών.

Η θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών, η θεωρία των τελεστών, η στατιστική, οι πιθανότητες, η γραμμική άλγεβρα κ.λπ. στήριξαν απόλυτα την εξίσωση Schrödinger. Ένας συνεπής και πλήρης μαθηματικός φορμαλισμός, που μετέτρεπε τα δυναμικά φυσικά μεγέθη σε μιγαδικούς τελεστές, ήρθε στην επιφάνεια προσφέροντας κάτι αξιοθαύμαστο! Μιγαδικά «αντικείμενα» που λειτουργούσαν με μιγαδικές συναρτήσεις, κατάφερναν με μαθηματική συνέπεια, να δίνουν ως αποτελέσματα πραγματικούς αριθμούς, πραγματικές συναρτήσεις, πραγματικές σχέσεις, πραγματικά στατιστικά στοιχεία, πραγματικές μέσες τιμές των φυσικών μεγεθών. Κατάφερναν δηλαδή να δίνουν φυσικές προβλέψεις συμπεριφοράς της φυσικής μας πραγματικότητας.

Τρίτο:

Το πείραμα ως μόνιμος τελικός κριτής

Ο μεγαλοφυής ερμηνευτικός και μαθηματικός χειρισμός της εξίσωσης (3.5) του Schrödinger και των λύσεων της, εξήγησε πλήθος πειραματικών αποτελεσμάτων και προφήτευσε τόσα και τόσα άλλα πράγματα που γρήγορα επαληθεύτηκαν πειραματικά. Η εξίσωση του Schrödinger άπτησε γρήγορα και πολύ καλά στα ολοκαινούρια ... κβαντικά πόδια της!

3.4 Ο κβαντικός ορισμός της μέσης τιμής φυσικού μεγέθους

Άμεση συνέπεια της αποκάλυψης ότι στη δομή της Φύσης βρίσκεται η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(x, t)|^2$ ήταν το γεγονός ότι το τυχαίο φυσικό μέγεθος **A** ενός τυχαίου φυσικού συστήματος σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, δεν παίρνει γενικά μια συγκεκριμένη τιμή, αλλά πολλές (έως κι άπειρες) τιμές με συγκεκριμένη πιθανότητα την καθεμιά.

Αφού λοιπόν οι τιμές είναι πολλές και με πιθανότητα εμφάνισης η καθεμιά, **το πρώτο και πιο σημαντικό βήμα στην αξιοποίηση της πυκνότητας πιθανότητας** και άρα καθοριστικό στην πορεία της κβαντομηχανικής, ήταν να βρεθεί ο κατάλληλος ορισμός της μέσης τιμής των πιθανών τιμών του **A**.

Και τούτο διότι ένας τέτοιος ορισμός θα οδηγούσε στην πλήρη αξιοποίηση της στατιστικής κατανομής των τιμών του **A** και στις σχέσεις αβεβαιότητας.

(*) Ο ατυχής όρος «κυματοσυνάρτηση», ο οποίος προφανώς έχει τις ρίζες του στην κλασική κυματική διαδρομή που ακολουθήθηκε κατά το μοντάρισμα της εξίσωσης Schrödinger, αδικεί κατάφωρα την $\psi(x, t)$. Ο προσδιορισμός της δεν είναι να περιγράψει κάποια κύματα (π.χ. τα υλικά κύματα), αλλά να κοιτάξει από πιο κοντά τις δομές του Κόσμου μας, ο οποίος λειτουργεί με πιθανότητες. Μακάρι τότε που έπρεπε να είχε επιλεγεί για την $\psi(x, t)$ ένα πιο άξιο όνομα.

Χωρίς να είναι απλά τα πράγματα, ας αναφέρουμε τα βήματα της «κβαντομηχανικής» πορείας προς τη μέση τιμή ενός τυχαίου φυσικού μεγέθους:

1ο βήμα: Στη σελίδα 25 είδαμε ότι η εξίσωση Schrödinger μονταρίστηκε έτσι ώστε να δέχεται ως λύση την

$$y(x, t) = e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (3.3)$$

2ο βήμα: Το καθένα από τα πρωταρχικά φυσικά μεγέθη **θέση, ορμή και ενέργεια** θα αντιστοιχηθεί σε κατάλληλο τελεστή του οποίου η δράση πάνω στην απλή κυματοσυνάρτηση (3.3) να δίνει το φυσικό μέγεθος το οποίο εκπροσωπεί ο τελεστής. Εύκολα φαίνεται ότι

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = E y(x, t) \quad \text{και} \quad -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} y(x, t) = p y(x, t)$$

Άρα κατάλληλος τελεστής για την ενέργεια E είναι ο $i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$ και κατάλληλος τελεστής για την ορμή p είναι ο $-i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$, γιατί οι δράσεις τους πάνω στην $y(x, t)$ δίνουν ως αποτελέσματα (ιδιοτιμές) τα φυσικά μεγέθη που εκπροσωπούν.

Όμως η τυχαία κυματοσυνάρτηση-λύση της εξίσωσης Schrödinger είναι μια υπέρθεση (άθροισμα) συναρτήσεων της μορφής (3.3). Άρα η αντιστοιχία μεταξύ φυσικών μεγεθών και τελεστών που ικανοποιεί την απλή κυματοσυνάρτηση (3.3) με τον τρόπο που αναφέραμε, θα είναι μια υποσχόμενη αντιστοιχία για γενίκευση.

Να λοιπόν η πρώτη αντιστοιχία δυναμικών μεταβλητών και τελεστών (*)

<u>Δυναμική μεταβλητή</u>	<u>Τελεστής</u>	
θέση x	$\hat{x}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (3.18)$
ορμή p_x, p_y, p_z	$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i \hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i \hbar \frac{\partial}{\partial z}$	
ενέργεια E	$i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$	

3ο βήμα: Η παραπάνω τακτική γενικεύεται:

Κάθε φυσικό μέγεθος A μπορεί πάντα να εκφραστεί συναρτήσει των βασικών μεγεθών x, p και E . Στην έκφραση αυτή αν γίνει αντικατάσταση των τριών μεγεθών x, p και E με τους αντίστοιχους κβαντικούς τελεστές τους, θα προκύψει ο κβαντομηχανικός τελεστής του A . Έτσι σε κάθε φυσικό μέγεθος A αντιστοιχεί ένας τελεστής τον οποίο συμβολίζουμε βάζοντας ένα καπελάκι $\hat{A}$

Παράδειγμα

Οι συνιστώσες της στροφορμής $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ είναι

(*) Όλα αυτά θα ήταν απλώς γραφικά και ένα χαμόγελο κατανόησης για την αγωνία μας αν τα επανειλημμένα πειράματα δεν καταξίωναν τις επιλογές και το τελικό μας αποτέλεσμα.

$$l_x = yp_z - zp_y, \quad l_y = zp_x - xp_z, \quad l_z = xp_y - yp_x$$

Συνεπώς οι αντίστοιχοι τελεστές είναι

$$\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{l}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

Με αντικατάσταση των αναλυτικών μορφών των τελεστών από την (3.18) προκύπτουν οι αναλυτικές μορφές των τελεστών των συνιστωσών της στροφορμής.

<u>Δυναμική μεταβλητή</u>	<u>Τελεστής</u>
x-συνιστώσα στροφορμής l_x	$-i \hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$
l_y	$-i \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$
l_z	$-i \hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$

4ο βήμα: Από τις λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger, επιλέγουμε εκείνη τη συνάρτηση $\psi_{\text{μη κανον}}$ η οποία μηδενίζεται στο $\pm\infty$, όρια της συντεταγμένης $x^{(*)}$.

Αυτό είναι μια γενικότερη απαίτηση για τις συναρτήσεις της Φυσικής με τις οποίες επιδιώκουμε να περιγράψουμε ένα φυσικό σύστημα. Δεν είναι δυνατό μια συνάρτηση, που δίνει πληροφορίες για τις ιδιότητες ενός συστήματος, να δίνει τιμές και στο άπειρο.

(Για παράδειγμα στα κλασικά κύματα, από τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης επιλέγουμε εκείνες που μηδενίζονται στο άπειρο. Τα μόνα που δεν μηδενίζονται στο $\pm\infty$ είναι τα μονοχρωματικά κύματα, αλλά αυτό δε μας ενδιαφέρει γιατί, όπως έχουμε πολλές φορές πει, δεν είναι πραγματικά κύματα, αλλά πάρα πολύ χρήσιμες μαθηματικές έννοιες).

Πέρα από την παραπάνω φυσική συνοριακή απαίτηση, αποδεικνύεται ότι ο μηδενισμός της συνάρτησης $\psi_{\text{μη κανον}}$ στο $\pm\infty$ είναι συγχρόνως και μια **αναγκαία συνθήκη** προκειμένου η συνάρτηση αυτή να μπορέσει να περιγράψει κάποιο κβαντομηχανικό σύστημα διότι εξασφαλίζει ότι:

- Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\text{μη κανον}}|^2 dx < \infty$. Η σύγκλιση αυτού του ολοκληρώματος είναι απαραίτητη για να υπολογιστούν σωστά οι πιθανότητες, όπως θα δούμε σε λίγο.
- Οι τελεστές των φυσικών μεγεθών γίνονται ερμητιανοί, μια ιδιότητα δηλαδή που πρέπει απαραίτητα να έχουν οι τελεστές, προκειμένου οι μέσες τιμές των φυσικών μεγεθών να είναι πραγματικοί αριθμοί κ.λπ. (**)

(*) Ο δείκτης «μη κανον» θα γίνει κατανοητός παρακάτω. Για ευκολία αναφερόμαστε σε μια διάσταση, επειδή δε μειώνεται η ποιότητα των συμπερασμάτων μας.

(**) Πέρα από αυτή την αναφορά δε χρειάζεται να ξέρουμε κάτι πιο αναλυτικό για τους ερμητιανούς τελεστές. Οι δυο τρεις ιδιότητές τους που θα αναφερθούν στο βιβλίο αρκούν για τις ανάγκες της μελέτης του.

Ας ονομάσουμε λοιπόν $\psi_{\mu\eta\ \kappa\alpha\nu\omicron\nu\nu}(x, t)$ τη λύση που πληροί τους παραπάνω περιορισμούς της σύγκλισης των ολοκληρωμάτων. Το επόμενο βήμα πριν τη χρησιμοποιήσουμε, είναι να την **κανονικοποιήσουμε**.

Αυτό περιλαμβάνει την εξής διαδικασία:

α) Γράφουμε τη συνάρτηση $\psi_{\mu\eta\ \kappa\alpha\nu\omicron\nu\nu}(x, 0)$ τη χρονική στιγμή $t=0$ και βρίσκουμε κατάλληλο συντελεστή C , τέτοιον ώστε να πληρείται η σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C\psi_{\mu\eta\ \kappa\alpha\nu\omicron\nu\nu}(x, 0)|^2 dx = 1 \quad (*) \quad (3.19)$$

β) Μόλις βρούμε τον συντελεστή κανονικοποίησης C καλούμε

$$\psi(x, t) \equiv C\psi_{\mu\eta\ \kappa\alpha\nu\omicron\nu\nu}(x, t)$$

Λόγω της (3.19) ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx = 1 \quad (3.20)$$

Η ποσότητα $|\psi(x, 0)|^2 dx$ **εκφράζει τώρα σωστά την πιθανότητα** να βρεθεί ένα σωματίδιο στη θέση x τη χρονική στιγμή $t=0$, επειδή η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε όλο τον χώρο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t=0$ παίρνει τη σωστή τιμή 1.

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx \quad (3.21)$$

είναι ανεξάρτητο του χρόνου ^(**) και επειδή η τιμή του για $t=0$ είναι 1 (σχέση 3.20) θα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (3.22)$$

για όλες τις χρονικές στιγμές.

Η $|\psi(x, t)|^2$ εκφράζει πλέον σωστά την πυκνότητα πιθανότητας θέσης του σωματιδίου σε όλες τις χρονικές στιγμές.

γ) Η συνάρτηση $\psi(x, t)$ που προκύπτει με την προηγούμενη διαδικασία είναι πλέον η κυματοσυνάρτηση του συστήματος, η συνάρτηση δηλαδή που τελικά χρησιμοποιούμε ως λύση της εξίσωσης Schrödinger για το συγκεκριμένο σύστημα.

(*) Οι συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα (3.19) συγκλίνει (άρα υπάρχει) λέγονται **τετραγωνικά ολοκληρώσιμες**. Προφανώς **μόνο αυτές** οι συναρτήσεις μπορούν να κανονικοποιηθούν και άρα να οδηγήσουν σε περιγραφή φυσικών καταστάσεων. Ο μηδενισμός της $\psi_{\mu\eta\ \kappa\alpha\nu\omicron\nu\nu}(x, 0)$ στο $\pm\infty$ αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

(**) Η ανεξαρτησία του ολοκληρώματος (3.21) από το χρόνο οφείλεται στο ότι ο τελεστής της Χαμιλτονιανής (σχέση 3.4) είναι ερμητιανός. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει την ιδιότητα αυτή την έχουν οι τελεστές όλων των φυσικών μεγεθών για να δίνουν πραγματικές μέσες τιμές φυσικών μεγεθών.

Στο βιβλίο αυτό όταν αναφερόμαστε σε κυματοσυναρτήσεις θα τις θεωρούμε κανονικοποιημένες.

5ο βήμα: Αν $\Psi(x)$ είναι η κυματοσυνάρτηση σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t , τότε η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην τυχαία θέση x τη χρονική στιγμή t είναι $|\Psi(x)|^2 dx$ και συνεπώς η μέση τιμή $\langle x \rangle$ της θέσης του σωματιδίου τη στιγμή t είναι ^(*)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x)|^2 dx \quad (3.23)$$

Αν $\Psi^*(x)$ είναι η συζυγής συνάρτηση της $\Psi(x)$ η προηγούμενη σχέση δίνει^(**)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \Psi^*(x) \Psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) [x \Psi(x)] dx$$

Άρα η μέση τιμή της θέσης κάποια δεδομένη χρονική στιγμή γράφεται απλά

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) (x \Psi) dx \quad (3.24)$$

ή πιο γενικά με χρονική εξέλιξη

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (x \psi(x, t)) dx \quad (3.25)$$

6ο βήμα: Επειδή η δράση του τελεστή θέσης $\hat{x}$ είναι να πολλαπλασιάζει με x ό,τι βρίσκεται μπροστά του, οι ποσότητες $x \Psi(x)$ και $x \psi(x, t)$ στις παρενθέσεις των δύο τελευταίων ολοκληρωμάτων είναι ουσιαστικά η δράση του τελεστή θέσης $\hat{x}$ στις συναρτήσεις Ψ και ψ αντίστοιχα.

Καταλήγουμε λοιπόν στους ορισμούς:

Μέση τιμή της θέσης σωματιδίου κάποια δεδομένη χρονική στιγμή t

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\hat{x} \Psi) dx \quad (3.26)$$

Γενικός τύπος μέσης τιμής θέσης

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (\hat{x} \psi(x, t)) dx \quad (3.27)$$

7ο βήμα: Γενικότερα αν $\hat{A}$ είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στο τυχαίο φυσικό μέγεθος A , τότε η μέση τιμή του A τη χρονική στιγμή t είναι

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\hat{A} \Psi) dx \quad (3.28)$$

^(*) Η σχέση (3.23) είναι προφανής, γιατί είναι ο ορισμός της μέσης τιμής κάθε στατιστικής κατανομής

^(**) Αν Ψ^* είναι η συζυγής μιας τυχαίας μιγαδικής συνάρτησης Ψ τότε ισχύει $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$

ενώ η χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή του A είναι

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (\hat{A}\psi(x, t)) dx \quad (3.29)$$

όπου η δράση του $\hat{A}$ περιορίζεται στη συνάρτηση που είναι δεξιά του.

Τελικά οποιοσδήποτε συνδυασμός Π φυσικών μεγεθών μπορεί να αντιστοιχηθεί σε (κβαντικό) τελεστή $\hat{\Pi}$, οπότε η μέση τιμή του Π δίνεται από τη σχέση

$$\langle \Pi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (\hat{\Pi}\psi(x, t)) dx \quad (3.30)$$

Παρατήρηση

Οι κυματοσυναρτήσεις $\psi(x, t)$ είναι μιγαδικές και οι τελεστές που δρουν επάνω τους είναι κατά κύριο λόγο μιγαδικοί. Επειδή όμως είναι ερμητιανοί, **ο παραπάνω ορισμός της μέσης τιμής οδηγεί πάντα σε πραγματικό αριθμό**, όπως πρέπει να είναι η μέση τιμή των φυσικών μεγεθών και των παραστάσεών τους.

Επομένως ο παραπάνω ορισμός της μέσης τιμής φυσικού μεγέθους είναι μια πολύ ευφυής και απόλυτα συνεπής μαθηματική υποστήριξη της εξίσωσης του Schrödinger.

3.5 Η εξίσωση Schrödinger, πρώτη ύλη για την εξίσωση Dirac

Κλείνοντας αυτή την ενότητα ας θυμηθούμε ότι:

1) Ο Bohr με τις δύο κβαντικές του συνθήκες έδωσε τη μεγαλοφυή ιδέα ότι το Σύμπαν είναι κβαντικό. Η ιδέα ήταν πάρα πολύ τολμηρή, γιατί έμοιαζε να αδιαφορεί για κάθε κλασική εμπειρία μας και για όλες τις καθημερινές μας συλλογιστικές.

Παρόλο αυτό όμως υιοθετήθηκε ευρέως και υποστηρίχθηκε μαθηματικά προς τη σωστή κατεύθυνση από δύο ευφυέστατους, νεαρούς τότε Φυσικούς, τον Schrödinger και τον Heisenberg, οι οποίοι έδωσαν, ξεχωριστά ο καθένας, από μια διαφορετική παρουσίαση της κβαντομηχανικής. Ο πρώτος μέσα από μια εξίσωση και ο δεύτερος μέσα από έναν formalισμό με πίνακες.

2) Όμως κάποιοι μαθηματικοί συλλογισμοί παρουσιάζουν δομικές ομοιότητες. Και πράγματι ο Dirac γρήγορα απέδειξε ότι ο formalισμός της εξίσωσης του Schrödinger ήταν ισοδύναμος με τον formalισμό πινάκων του Heisenberg και ότι και οι δύο formalισμοί μπορούσαν να προκύψουν από κατάλληλες αναλογίες με τους νόμους και τις σχέσεις που διέπουν τη δυναμική των κλασικών συστημάτων.

Αφότου ο Dirac απέδειξε την ισοδυναμία των δύο formalισμών της κβαντομηχανικής, η εξίσωση του Schrödinger γρήγορα επικράτησε λόγω απλότητας και ευκολίας. Ο formalισμός του Heisenberg ουσιαστικά «εξαφανίστηκε». Αυτό που έκανε ο Dirac πιθανό να μην ήταν και ό,τι καλύτερο για τις φιλοδοξίες του Heisenberg.

3) Η formalιστική αναλογία της εξίσωσης του Schrödinger με τα κλασικά συστήματα του Νεύτωνα και η ισχυρότατη σύνδεσή της με την κλασική θεωρία των κυμάτων την έκανε αδύναμη στο να χειριστεί περιοχές, όπου ίσχυε η ειδική σχετικότητα.

Συνεπώς δε μπορούσε ούτε να περιγράψει σωματίδια που κινούνται με ταχύτητες συγκρίσιμες εκείνης του φωτός, ούτε να περιλάβει μεγέθη που δεν υπήρχαν στην κλασική φυσική (π.χ. σπιν, μαγνητικές ροπές).

Τη λύση έδωσε ο Ντιράκ τροποποιώντας την εξίσωση Schrödinger ώστε να παρθεί υπόψη η ειδική σχετικότητα και να περιγραφούν σωματίδια σχετικιστικών ταχυτήτων και το σπιν τους.

Όμως προέκυψε ένα πρόβλημα. Η εξίσωση του Dirac προέβλεπε ότι εκτός από το ηλεκτρόνιο έπρεπε να υπάρχει στη Φύση και ένα άλλο σωματίδιο, ίδιας μάζας με το ηλεκτρόνιο και με φορτίο θετικό, ίσο κατ' απόλυτη τιμή με εκείνο του ηλεκτρονίου.

Δύσκολα και τολμηρά τα απαιτούμενα βήματα εκείνη την εποχή των καταπληκτικών ανακαλύψεων και ο κορυφαίος Φυσικός Dirac προσπαθούσε απεγνωσμένα να καταλάβει τι γινόταν με την εξίσωσή του κάνοντας αρκετές λανθασμένες υποθέσεις για τα σωματίδια που προέβλεπε.

Τότε ήταν που ο Heisenberg πολύ τον υποτίμησε όταν δήλωσε ότι "...The saddest chapter of modern physics is and remains the Dirac theory... I regard (it)... as learned trash which no one can take seriously..."

Όμως το 1933 ο Carl Anderson ανακάλυψε το πρώτο σωματίδιο αντιύλης· το ποζιτρόνιο ή αλλιώς αντι-ηλεκτρόνιο. Ανακάλυψε δηλαδή το σωματίδιο που προέβλεπε η εξίσωση του Dirac. Η θεωρητική πρόβλεψη ότι υπάρχει αντιύλη ήταν μια τεράστια «παράπλευρη» επιτυχία της εξίσωσης Dirac. Ήταν η πρώτη φορά που ανακαλυπτόταν φυσική οντότητα (ποζιτρόνιο) πρώτα με εξισώσεις και μετά με το πείραμα.

Αργότερα ανακαλύφθηκαν και αντιπρωτόνια και αντινετρόνια κλπ. Τελικά η αντιύλη ήταν γεγονός και, όπως είπε ο ίδιος ο Dirac αργότερα, η εξίσωσή του αποδείχθηκε πολύ πιο έξυπνη από τον δημιουργό της.

Ενότητα 4

Σχόλια πάνω στις (κβαντικές) αρχές αβεβαιότητας

4.1 Ο ορισμός της αβεβαιότητας

Είδαμε ότι το τυχαίο φυσικό μέγεθος A σε ένα σύστημα δεν παίρνει γενικά μια συγκεκριμένη τιμή, αλλά διάφορες τιμές με συγκεκριμένη πιθανότητα την καθεμιά. Έχουμε λοιπόν να κάνουμε με μια κατανομή πιθανών τιμών του A και συνεπώς πρέπει να βρούμε ένα μέγεθος που να ποσοτικοποιεί το εύρος της κατανομής.

Το μέγεθος αυτό θα ονομάσουμε αβεβαιότητα.

Ας δώσουμε δυο συμβολισμούς κι ας κάνουμε καμιά προσπάθεια:

A	μία από τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το φυσικό μέγεθος A
$\langle A \rangle$	η μέση τιμή των πιθανών τιμών του A . Ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα
$A - \langle A \rangle$	η απόκλιση της τιμής A από τη μέση τιμή $\langle A \rangle$. Μπορεί να γίνει μηδέν, θετική, αρνητική.

1η προσπάθεια:

Αν πάρουμε τη μέση τιμή των αποκλίσεων όλων των τιμών τότε

$$\langle A - \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$$

Αυτό λίγο πολύ το περιμέναμε, έστω ποιοτικά, γιατί οι πιθανές τιμές A του μεγέθους A κατανέμονται δεξιά και αριστερά της μέσης τιμής του, οπότε οι αποκλίσεις τους θα είναι άλλες θετικές και άλλες αρνητικές. Συνεπώς κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής τους θα αλληλοαναιρούνται και η μέση τιμή τους θα είναι πάντα μηδέν.

Άρα η **μέση τιμή των αποκλίσεων απορρίπτεται** ως υποψήφιος ορισμός της αβεβαιότητας, γιατί βγάζει πάντα μηδέν.

2η προσπάθεια:

Το να πάρουμε το μέτρο (την απόλυτη τιμή) της απόκλισης $|A - \langle A \rangle|$ φαίνεται καλό σαν ιδέα, γιατί είναι πάντα θετικό και δεν θα έχουμε αλληλοεξουδετερώσεις. Αλλά στην Άλγεβρα τα σύμβολα για τα μέτρα, εκτός του ότι μπορούν να προκαλέσουν σύγχυση, είναι κουραστικά στη χρήση τους. Ας σκεφτούμε μόνο πόσες φορές τα υψώνουμε στο τετράγωνο, ώστε να απαλλάξουμε τις σχέσεις από αυτά.

Άρα ας αποκλείσουμε **το μέτρο της απόκλισης** ως υποψήφιο στάδιο για τον ορισμό της αβεβαιότητας γιατί είναι δύσχρηστο.

Όμως τώρα έχουμε μια καλή σκέψη!

Να προχωρήσουμε προς την ποσοτικοποίηση του εύρους της κατανομής των πιθανών τιμών του **A**, προς τον ορισμό της αβεβαιότητας δηλαδή, με το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της απόκλισης το οποίο επίσης είναι πάντα θετικό. Με δεδομένο μάλιστα ότι αυτό κάνει και η Στατιστική, θα μπουκ στη φαρέτρα μας ισχυρά μαθηματικά εργαλεία.

Αφήνουμε λοιπόν τη μέση τιμή της απόκλισης $\langle A - \langle A \rangle \rangle$ που είναι πάντα μηδέν, αφήνουμε τη μέση τιμή της απόλυτης τιμής της απόκλισης $\langle |A - \langle A \rangle| \rangle$ που είναι δύσχρηστη και συνεχίζουμε με τα τετράγωνα.

$(A - \langle A \rangle)^2$ το **τετράγωνο της απόκλισης** της τιμής A από τη μέση τιμή $\langle A \rangle$ των πιθανών τιμών του φυσικού μεγέθους **A**

$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ η **μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων** από τη μέση τιμή

$\sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$ η τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης.

Η τελευταία ποσότητα,

Στη Στατιστική λέγεται **διασπορά** ή **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με σ_x .

Στη Φυσική λέγεται **αβεβαιότητα** του φυσικού μεγέθους **A** και συμβολίζεται με ΔA

Άρα

$$\Delta A = \sigma_x = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$

ή

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

Όπως καταλαβαίνουμε η αβεβαιότητα είναι μια rms (root mean square), δηλαδή μια τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγώνου για τον διασκορπισμό των πιθανών τιμών του **A**.

Συνοψίζουμε:

Η αβεβαιότητα ΔA ενός μεγέθους **A** ορίζεται ως η διασπορά ή αλλιώς ως η τυπική απόκλιση των πιθανών τιμών του **A** γύρω από τη μέση τιμή τους

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (4.1)$$

Από τον ορισμό (4.1) προκύπτει ότι

- Η αβεβαιότητα ΔA δείχνει πόσο συγκεντρωμένες γύρω από τη μέση τιμή τους $\langle A \rangle$ είναι οι πιθανές τιμές του μεγέθους **A**. Όσο μικρότερη είναι η αβεβαιότητα τόσο πιο συγκεντρωμένες οι τιμές.

- Η αβεβαιότητα ΔA δίνει ένα μέτρο του εύρους, γύρω από την μέση τιμή $\langle A \rangle$, όπου υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να εμφανιστεί κάποια από τις δυνατές τιμές του μεγέθους **A**. Όσο μικρότερη είναι η αβεβαιότητα τόσο πιο μικρό είναι το εύρος.

Από την (4.1) έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2 &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2\end{aligned}$$

Μια άλλη λοιπόν σχέση της **αβεβαιότητας ενός μεγέθους A**, αρκετά χρήσιμη, είναι η

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (4.2)$$

Εύκολα αποδεικνύεται, αλλά είναι και ποιοτικά προφανές, ότι η αβεβαιότητα ΔA ενός φυσικού μεγέθους **A** δεν μπορεί να ξεπεράσει το μισό της απόστασης των δύο ακραίων πιθανών τιμών του

$$\Delta A \leq \frac{A_{max} - A_{min}}{2}$$

4.2 Οι σχέσεις αβεβαιότητας

Ο μεταθέτης δύο τελεστών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ συμβολίζεται ως $[\hat{A}, \hat{B}]$ και εξ ορισμού είναι ο τελεστής

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Ασυμβίβαστα ονομάζονται τα φυσικά μεγέθη των οποίων οι αντίστοιχοι κβαντικοί τελεστές δε μετατίθενται, δηλαδή ο μεταθέτης τους $[\hat{A}, \hat{B}]$ είναι διάφορος του μηδενός

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$$

Αποδεικνύεται ότι, αν οι αβεβαιότητες ΔA και ΔB δύο ασυμβίβαστων μεταξύ τους φυσικών μεγεθών **A** και **B** μετρηθούν ταυτόχρονα, ισχύει **η γενική σχέση αβεβαιότητας**

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|[\hat{A}, \hat{B}]|}{2} \quad (4.3)$$

Αν δύο ασυμβίβαστα μεγέθη A και B μπορούσαν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια, τότε θα ίσχυε $\Delta A = \Delta B = 0$ και συνεπώς δεν θα μπορούσε να ισχύει η (4.3).

Άρα τα ασυμβίβαστα φυσικά μεγέθη είναι αδύνατο να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια.

Η σχέση (4.3) είναι η γενική σχέση αβεβαιότητας μεταξύ όλων των ασυμβίβαστων μεγεθών **A** και **B**. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που ο μεταθέτης των τελεστών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ δρα ως απλός πολλαπλασιασμός με τον φανταστικό αριθμό $i\hbar$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \quad (4.4)$$

Τότε η γενική σχέση των αβεβαιοτήτων (4.3) αποκτά ειδική μορφή

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.5)$$

Παράδειγμα

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = \left[x \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) x \right] \psi = -i \hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \hbar \psi + i \hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

και συνεπώς

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = i\hbar\psi$$

Άρα

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

Από την σχέση (4.3)

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{|[\hat{x}, \hat{p}_x]|}{2} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι κάθε συντεταγμένη είναι ασυμβίβαστη με την αντίστοιχη συνιστώσα της ορμής, ο χρόνος τ πληροί σχέση αβεβαιότητας κ.λπ.

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\alpha) \\ \tau \cdot \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{κλπ} \quad (\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Παρατήρηση

Οι δυναμικές μεταβλητές του συστήματος που συνδέονται με τις (κλασικές) κανονικές εξισώσεις Hamilton εμφανίζονται κατά ζεύγη. Σε κάθε (γενικευμένη) συντεταγμένη q_α αντιστοιχεί μια (γενικευμένη) ορμή p_α (π.χ. συντεταγμένη x και ορμή p_x).

Τα ζευγάρια αυτά λέγονται **κανονικά συζυγή**, αποδεικνύεται ότι αντιστοιχούν σε **μη μετατιθέμενους τελεστές** και συνεπώς **είναι ασυμβίβαστα** φυσικά μεγέθη.

Άρα τα (κλασικά) κανονικά συζυγή ζευγάρια μεγεθών δε μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με ακρίβεια. Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων τους δε μηδενίζεται ποτέ.

4.3 Τροχιακή στροφορμή, ένα καταπληκτικό κβαντικό μέγεθος

Όταν ένα φυσικό μέγεθος περιγράφει κίνηση τότε ο κβαντικός τελεστής του θα περιέχει προφανώς παραγωγίσεις ως προς τις συντεταγμένες που μεταβάλλονται κατά την κίνηση αυτή. Η διαπίστωση αυτή ισχύει οποιοδήποτε είδος συντεταγμένων κι αν χρησιμοποιηθεί (καρτεσιανές, σφαιρικές κλπ).

Παραδείγματα

Η συνιστώσα της στροφορμής l_y συνδέεται με κίνηση αποκλειστικά γύρω από τον y -άξονα και συνεπώς οι συντεταγμένες που μεταβάλλονται κατά την κίνηση αυτή είναι οι x και z . Άρα ο τελεστής $\hat{l}_y$ θα έχει παραγωγίσεις ως προς x και z .

Πράγματι $\hat{l}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (σελ.32)

Όμοια, η συνιστώσα της ορμής p_x συνδέεται με κίνηση πάνω στον x -άξονα. Η μόνη συντεταγμένη που μεταβάλλεται κατά την κίνηση αυτή είναι η x και συνεπώς ο τελεστής $\hat{p}_x$ θα περιέχει παραγωγή ως προς x . Πράγματι $\hat{p}_x \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Αν εκφράσουμε τις συνιστώσες της στροφορμής σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, ϑ, φ) , η συνιστώσα l_z συνδέεται με κίνηση αποκλειστικά γύρω από τον z άξονα και συνεπώς η μόνη σφαιρική συντεταγμένη που μεταβάλλεται κατά την κίνηση αυτή είναι η φ

Άρα ο τελεστής $\hat{l}_z$ (που σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι ορθότερο να γράφεται $\hat{l}_\varphi$) θα περιέχει παραγωγή μόνο ως προς την φ και η μορφή του θα είναι απλή $\hat{l}_\varphi \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Ερώτηση

Ξέρουμε ότι σε καρτεσιανές συντεταγμένες το x είναι συντεταγμένη και ο τελεστής $\hat{p}_x$ της x -ορμής είναι $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Ισχύουν μάλιστα οι σχέσεις

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad \text{και} \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η γωνία φ είναι συντεταγμένη και ο τελεστής $\hat{l}_\varphi$ της φ -τροχιακής στροφορμής είναι $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν σχέσεις, αντίστοιχες με τις παραπάνω

$$[\hat{\varphi}, \hat{l}_\varphi] = i\hbar \quad (4.7) \quad \text{και} \quad \Delta \varphi \cdot \Delta l_\varphi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.8)$$

ή όχι και γιατί;

Απάντηση

Στην κβαντομηχανική, η αντιστοίχιση ανάμεσα στην ορμή p_x σε καρτεσιανές συντεταγμένες και την τροχιακή στροφορμή l_φ σε σφαιρικές συντεταγμένες θέλει λίγη προσοχή για πολλούς λόγους, ας δούμε αρχικά δύο φορμαλιστικούς:

- 1) Η καρτεσιανή συντεταγμένη x έχει πεδίο ορισμού το άπειρης έκτασης διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ενώ το πεδίο ορισμού της φ είναι πεπερασμένο $[0, 2\pi)$
- 2) Όπως ήδη έχουμε αναφέρει (σελ.32), η μέση τιμή των πιθανών τιμών της συνιστώσας p_x είναι πραγματικός αριθμός, επειδή ο αντίστοιχος τελεστής $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ είναι ερμητιανός. Την ιδιότητα αυτή οφείλει ουσιαστικά στο ότι οι κυματοσυναρτήσεις

πάνω στις οποίες δρα έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να μηδενίζονται στα «άκρα» του πεδίου ορισμού $(-\infty, +\infty)$ της αντίστοιχης συντεταγμένης x .

Ας δούμε πότε ισχύει η σχέση $[\hat{\varphi}, \hat{l}_\varphi] = i\hbar$ (4.7)

Για να μπορεί λοιπόν ο τελεστής $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$, αντίστοιχος του $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

- να παριστάνει τελεστή φυσικού μεγέθους (εν προκειμένω της l_φ , δηλαδή της l_z)
- να πληροί τη σχέση $[\hat{\varphi}, \hat{l}_\varphi] = i\hbar$, αντίστοιχη της σχέσης $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$,

πρέπει οπωσδήποτε να είναι ερμητιανός.

Αυτό θα εξασφαλιστεί αν οι κυματοσυναρτήσεις $\psi(\varphi)$ πάνω στις οποίες θα δράσει επιλεγούν έτσι ώστε να μηδενίζονται στα άκρα του πεδίου ορισμού $[0, 2\pi)$ της γωνίας φ .

Συμπέρασμα

Για να μπορεί ο τελεστής $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ να θεωρηθεί ως ο τελεστής $\hat{l}_\varphi$ της τροχιακής στροφορμής l_φ σε σφαιρικές συντεταγμένες (l_z σε καρτεσιανές) και να ισχύει συγχρόνως και η μεταθετική σχέση $[\hat{\varphi}, \hat{l}_\varphi] = i\hbar$ πρέπει να δρα μόνο σε κυματοσυναρτήσεις $\psi(\varphi)$ για τις οποίες ισχύει $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$ (*)

Ας δούμε πότε ισχύει η σχέση $\Delta\varphi \cdot \Delta l_\varphi \geq \frac{\hbar}{2}$ (4.8)

Το πεδίο ορισμού της φ είναι πεπερασμένο και συνεπώς η αβεβαιότητα της θέσης φ , σε αντίθεση με την αβεβαιότητα της θέσης x , είναι πάντα πεπερασμένη.

Άρα πάντοτε ισχύει

$$\Delta\varphi = \text{πεπερασμένη} = \alpha$$

(το α δεν είναι κάποια σταθερή τιμή, αλλά απλώς πεπερασμένη).

Αν λοιπόν προσδιορίσουμε την l_φ ακριβώς, ή έστω με πάρα πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια, τότε $\Delta l_\varphi \rightarrow 0$ και η σχέση (4.8) θα δώσει άτοπο $\alpha \cdot 0 \geq \frac{\hbar}{2}$

Συμπέρασμα

Η σχέση αβεβαιότητας $\Delta\varphi \cdot \Delta l_\varphi \geq \frac{\hbar}{2}$ δεν ισχύει ποτέ! Μπορεί όμως να αντικατασταθεί από κάποια άλλη σχέση αβεβαιότητας για την οποία διαισθανόμαστε ότι πρέπει

- όταν $\Delta\varphi \rightarrow 0$ τότε $\Delta l_\varphi \rightarrow \infty$
- όταν $\Delta l_\varphi \rightarrow 0$ τότε $\Delta\varphi \rightarrow \lambda\pi$ όπου $0 < \lambda < 1$

(*) Αν ισχύει μόνο η περιοδική συνθήκη $\psi(0) = \psi(2\pi)$ τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ο $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ είναι μεν ερμητιανός, αλλά δεν μπορεί να εξασφαλίσει την ισχύ της μεταθετικής σχέσης $[\hat{\varphi}, \hat{l}_\varphi] = i\hbar$.

Αυτές οι πληροφορίες αποκτούν ιδιαίτερη αξία όταν εξετάζουμε δυναμικά με σφαιρική συμμετρία, όπως π.χ. το άτομο του υδρογόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Πέρα από όλα αυτά όμως, η τροχιακή στροφορμή έχει ένα καταπληκτικό κβαντομηχανικό χαρακτηριστικό, που είναι έξω από κάθε κλασική νευτώνεια λογική:

Χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των τελεστών των συνιστωσών της τροχιακής στροφορμής σε καρτεσιανές συντεταγμένες (σελ.32) μπορούμε να δείξουμε ότι δε μετατίθενται μεταξύ τους

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i \hbar \hat{l}_z, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i \hbar \hat{l}_y, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i \hbar \hat{l}_x \quad (4.9)$$

αλλά μετατίθενται με τον τελεστή του μέτρου της στροφορμής

$$[\hat{l}_k, \hat{l}^2] = 0 \quad k=x, y, z \quad (4.10)$$

Οι παραπάνω σχέσεις σημαίνουν ότι η τροχιακή στροφορμή είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, του οποίου οι συνιστώσες είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους μεγέθη, αλλά η καθεμιά μόνη της είναι συμβιβαστή με το μέτρο της στροφορμής. Συνεπώς 2 συνιστώσες τροχιακής στροφορμής δε μπορούν να συνυπάρξουν (άρα και να μετρηθούν) ταυτόχρονα, αλλά αντίθετως η καθεμιά ξεχωριστά μπορεί να συνυπάρξει (άρα και να μετρηθεί) ταυτόχρονα με το μέτρο της στροφορμής.

Αυτό είναι καταπληκτικό:

Ποτέ και σε κανένα φυσικό σύστημα δεν θα εμφανιστούν σωματίδια με ακριβές το διάνυσμα της τροχιακής τους στροφορμής, γιατί δεν υφίσταται αυτή η ακρίβεια στη Φύση. Το πολύ να έχουν ακριβή τιμή η μία μόνο συνιστώσα της στροφορμής και το μέτρο της. Και αυτό το καταπληκτικό γίνεται ακόμη πιο περίεργο αν σκεφτούμε ότι ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή αξόνων και για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

Άρα σε αντίθεση με την ορμή που μπορεί να εμφανιστεί και να συμμετάσχει στα δρώμενα των διαφόρων φυσικών συστημάτων με απόλυτη διανυσματική ακρίβεια (ακρίβεια και για τις τρεις συνιστώσες και για το μέτρο συγχρόνως), η τροχιακή στροφορμή είναι αδύνατο να το κάνει. Στη Φύση, από δομή της, δεν υφίσταται τέτοια ακρίβεια για την τροχιακή στροφορμή και τις στροφορμές γενικότερα (π.χ. σπιν).

4.4 Κβαντικός ορισμός του χρόνου στις σχέσεις αβεβαιότητας

Στα προηγούμενα έγινε αναφορά στις αβεβαιότητες $\Delta x, \Delta p, \Delta E$, αλλά δεν αναφέρθηκε τίποτε για το Δt το οποίο μάλιστα στην σχέση (4.6β) συμβολίστηκε με τ .

Ας εξηγήσουμε το λόγο:

Τα x, p και E είναι δυναμικές μεταβλητές του συστήματος και οι αβεβαιότητες $\Delta x, \Delta p$ και ΔE ορίστηκαν αυστηρά ως τυπικές αποκλίσεις.

Όμως ο χρόνος στην κβαντομηχανική δεν είναι μια δυναμική μεταβλητή του συστήματος, αλλά μια παράμετρος του. Είναι κάτι εξωτερικό. Είναι ένα γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εξελίσσονται όλα τα φαινόμενα. Είναι ο γνωστός μας παγκόσμιος, κοκάλινος, νευτώνειος χρόνος που κυλά ίδια για όλους. Ουσιαστικά είναι ένας αριθμός και συνεπώς δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κβαντικό τελεστή του συστήματος και να έχει ιδιοτιμές.

Με αυτή την έννοια λοιπόν, ενώ η ποσότητα Δx είναι η αβεβαιότητα της θέσης κάποια χρονική στιγμή, η ποσότητα Δt δεν έχει νόημα να οριστεί ως «αβεβαιότητα χρονικής στιγμής».

Αλλά κι αν (λέμε αν) αντιστοιχούσαμε τον χρόνο σε κβαντικό τελεστή, πάλι θα είχαμε πρόβλημα, γιατί ως εξωτερική παράμετρος του συστήματος θα μεταθετόταν με όλους τους τελεστές του συστήματος. Συνεπώς δε θα μπορούσε να πληροί σχέσεις αβεβαιότητας, επειδή οι σχέσεις αυτές αφορούν σε μη μετατιθέμενους κβαντικούς τελεστές.

.....

Έστω φυσικό σύστημα του οποίου η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, ώστε η έννοια της ενέργειας να έχει κάποια σημασία.

Αν A είναι ένα τυχαίο μέγεθος του συστήματος, ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η μέση τιμή του $\langle A \rangle$ είναι

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt}$$

Αποδεικνύεται ότι αν ΔE η αβεβαιότητα στην ενέργεια του συστήματος ισχύει

$$\frac{\Delta A}{|d\langle A \rangle/dt|} \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.11)$$

Η ποσότητα

$$\tau_A = \frac{\Delta A}{|d\langle A \rangle/dt|} \quad (4.12)$$

είναι ο χρόνος που χρειάζεται η μέση τιμή $\langle A \rangle$ για να «μετακινηθεί» κατά ποσό ίσο με την αβεβαιότητα ΔA .

Το τ_A λοιπόν είναι ένα χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα για τη μεταβολή του μεγέθους A , επειδή είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται προκειμένου η στατιστική κατανομή των μετρήσεων του A να παρουσιάσει αξιόλογη μεταβολή.

Με τη σχέση (4.12) λοιπόν κάθε δυναμική μεταβλητή A του συστήματος συνδέεται με ένα χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα μεταβολής της τ_A για το οποίο ισχύει

$$\tau_A \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ο μικρότερος από όλους τους χρόνους τ_A είναι ο χρόνος που απαιτείται για να παρατηρηθεί κάποια αξιόλογη μεταβολή στο σύστημα. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **χαρακτηριστικός χρόνος** εξέλιξης του συστήματος και συμβολίζεται με τ .

Προφανώς ισχύει

$$\tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν κάνουμε μια οποιαδήποτε μέτρηση τη χρονική στιγμή t και επαναλάβουμε τη μέτρηση τη χρονική στιγμή t' , τότε η στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων θα είναι ουσιαστικά ίδια αν $|t' - t| < \tau$.

Παρατηρήσεις

α) Αν ένα φυσικό σύστημα είναι σε σταθερή κατάσταση (stationary state) τότε δεν υπάρχει μεταβολή στο σύστημα, ισχύει $\tau \rightarrow \infty$ και συνεπώς $\Delta E=0$

β) Οι ποσότητες Δx , Δp και ΔE ορίστηκαν αυστηρά ως τυπικές αποκλίσεις (διασπορές), ενώ η ποσότητα τ ορίστηκε αυστηρά ως χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξης του φυσικού συστήματος. Άρα όλες οι σχέσεις (4.6) είναι (ακριβείς) μαθηματικές σχέσεις.

γ) Ο χαρακτηριστικός χρόνος τ της εξέλιξης (μεταβολής, ζωής) ενός ασταθούς κβαντικού συστήματος (ραδιενεργός πυρήνας, διηγεμένο άτομο, βραχύβιο στοιχειώδες σωματίδιο κ.λπ.) ονομάζεται και **μέση ζωή ή μέσος χρόνος ζωής του συστήματος**.

Αν δεν έχουμε δυνατότητα θεωρητικού υπολογισμού του μέσου χρόνου ζωής μέσω των σχέσεων (4.12), τον μετράμε πειραματικά ως στατιστική μέση τιμή των χρόνων που «ζει» ένα μεγάλο πλήθος όμοιων ασταθών συστημάτων. Ας σημειωθεί ότι όσο πιο μεγάλο είναι αυτό το πλήθος τόσο πιο καλά προσδιορισμένος πειραματικά είναι ο μέσος χρόνος ζωής.

4.5 Σχετικιστική απόδοση των σχέσεων αβεβαιότητας

Αν καταφύγουμε στη Σχετικότητα, όπου ο χώρος κι ο χρόνος αποτελούν διαστάσεις μιας ευρύτερης ενότητας, του χωροχρόνου, μπορούμε να κάνουμε ενιαία τη γραφή μας:

Στο χωρόχρονο, το τετράνυσμα θέσης ενός σωματιδίου είναι

$$(x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z, \quad x_4=ict) \quad (*)$$

ενώ το τετράνυσμα της ορμής-ενέργειας είναι

$$(p_1=p_x, \quad p_2=p_y, \quad p_3=p_z, \quad p_4=iE/c)$$

Η κβαντομηχανική αντιστοιχία φυσικό μέγεθος- τελεστής είναι

$$\text{Θέση } x_k \longrightarrow \text{Τελεστής } \hat{x}_k$$

$$\text{Ορμή-Ενέργεια } p_k \longrightarrow \text{Τελεστής } -i\hbar\partial/\partial x_k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

Οι επόμενες μεταθετικές σχέσεις των τελεστών είναι προφανείς

$$\begin{aligned} [\hat{x}_r, \hat{x}_s] &= 0, & [\hat{p}_r, \hat{p}_s] &= 0 \\ [\hat{x}_r, \hat{p}_s] &= i\hbar\delta_{rs} & (r, s=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου δ_{rs} το δέλτα του Kronecker

(*) Χρησιμοποιήθηκε το i και όχι μετρική, μόνο και μόνο λόγω επίκαιρης «κβαντομηχανικής» έλξης προς το ... φανταστικό i . Έτσι κι αλλιώς η ιδέα μας ενδιαφέρει, γιατί κάνει το χρόνο φορμαλιστικά «ισάξιο» με τις χωρικές συντεταγμένες.

Οι σχέσεις αβεβαιότητας παίρνουν τη μορφή

$$(\Delta x_k)^2 \cdot (\Delta p_k)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.14)$$

από όπου προκύπτουν οι γνωστές μας σχέσεις αβεβαιότητας γραμμένες σε ενιαία χωρο-χρονική μορφή, αρκεί να προσέξουμε κατά την εξαγωγή των τετραγώνων να μην προκύψουν αρνητικές αβεβαιότητες.

Το Δt είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος τ μεταβολής της κατάστασης του συστήματος, ως μετατόπιση όμως στο χωρόχρονο.

Παρατηρήσεις

α) Στη σχετικότητα ο χώρος είναι ενοποιημένος με τον χρόνο και η ορμή ενοποιημένη με την ενέργεια ως συνιστώσες τετρανυσμάτων. Άρα μια σχέση ανάμεσα σε χώρο και ορμή (όπως π.χ. η $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$) «επιβάλλει» αντίστοιχη σχέση ανάμεσα σε χρόνο και ενέργεια.

Στη σχετικότητα λοιπόν η σχέση αβεβαιότητας μεταξύ ενέργειας και χρόνου $\tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$ είναι επιβεβλημένη από τη δομή της θεωρίας και όχι μόνο από κάποιο θεώρημα bandwidth.

β) Η σχετικιστική μετάφραση των σχέσεων αβεβαιότητας (4.14) λέει κάτι πάρα πολύ σημαντικό:

Όσο μεγαλύτερη ακρίβεια επιδιώξουμε στον χωροχρονικό εντοπισμό (εντοπισμό θέσης και χρονικής στιγμής) τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα των ορμών και των ενεργειών που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε.

4.6 Η διαφοροποίηση της χωρικής από τη χρονική σχέση αβεβαιότητας

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.15)$$

$$\tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.16)$$

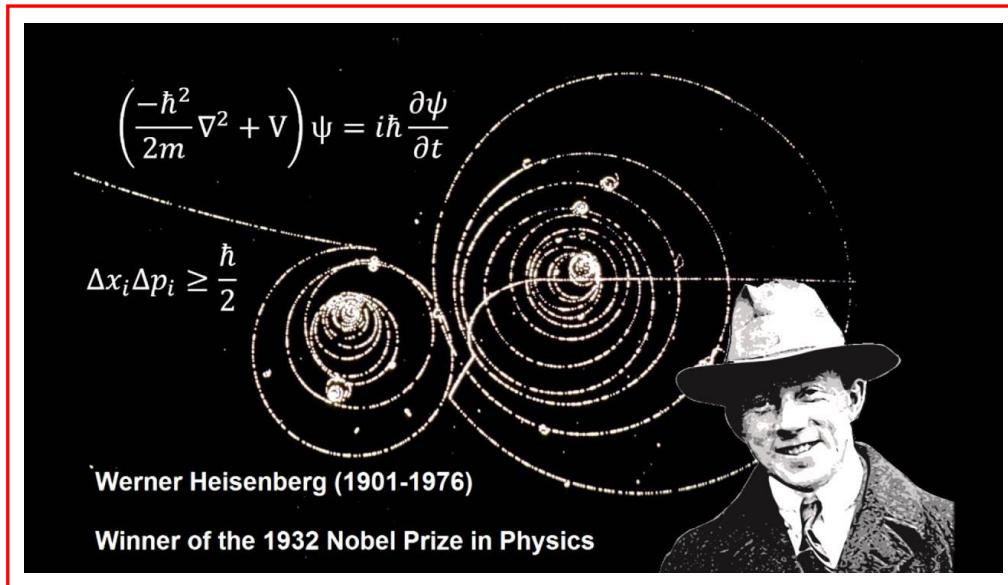
Στην πρώτη σχέση η θέση και η ορμή ενός σωματιδίου έχουν συμμετρικούς ρόλους:

- Και τα δύο μεγέθη είναι δυναμικές μεταβλητές του συστήματος.
- Οι αβεβαιότητες και των δύο μεγεθών έχουν οριστεί όμοια.
- Και τα δύο μεγέθη μπορούν να μετρηθούν την ίδια χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι χειριζόμαστε δύο στατιστικές κατανομές μετρήσεων οι οποίες αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή.

Στη δεύτερη σχέση η ενέργεια κι ο χρόνος δεν έχουν συμμετρικούς ρόλους

- Η ενέργεια είναι δυναμική μεταβλητή του συστήματος, ενώ ο χρόνος είναι εξωτερική του παράμετρος.
- Η αβεβαιότητα ορίζεται μόνο για την ενέργεια, ενώ για τον χρόνο ορίζεται ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος και όχι κάποια αβεβαιότητα χρονικής στιγμής. Συνεπώς οι αβεβαιότητες δεν έχουν οριστεί με τον ίδιο τρόπο.

- Δεν έχουμε ταυτόχρονες μετρήσεις δύο μεγεθών, αλλά μετρήσεις ενέργειας σε χρονικό διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι ουσιαστικά χειριζόμαστε μία μόνο στατιστική κατανομή μετρήσεων, εκείνη της ενέργειας. Όχι όμως σε μια χρονική στιγμή αλλά σε χρονικό διάστημα.



4.7 Η «μετουσίωση» των σχέσεων bandwidth σε κβαντικές σχέσεις αβεβαιότητας

Στα προηγούμενα είδαμε ότι

Πρώτο:

- Η κυματική εξίσωση (1.1) δέχεται ως λύση τα μονοχρωματικά κύματα

$$e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.2)$$

- Η κυματική εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής και συνεπώς η γενική της λύση μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των παραπάνω μονοχρωματικών κυμάτων
- Επειδή η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης γράφεται ως επαλληλία των μονοχρωματικών κυμάτων (3.2) ισχύει το θεώρημα bandwidth

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \quad \Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi \quad (4.17)$$

Δεύτερο:

Η κατάστροψη της εξίσωσης του Schrödinger

- Στηρίχτηκε πάρα πολύ στην κυματική εξίσωση και στα μαθηματικά της

- Αντικατέστησε τα κυματικά χαρακτηριστικά k και ω με τα σωματιδιακά μεγέθη p και E χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $p = \hbar k$ και $E = \hbar \omega$
- Φρόντισε να διατηρηθούν οι κλασικές σχέσεις (όπως π.χ η $E=p^2/2m$) ανάμεσα στην ορμή και την ενέργεια.

Τρίτο: (κατ' αντιστοιχία με το πρώτο)

- Η εξίσωση του Schrödinger δέχεται ως λύση τα παλιά μονοχρωματικά υλικά κύματα

$$e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (3.3)$$

- Η εξίσωση του Schrödinger είναι γραμμική και ομογενής και συνεπώς η γενική της λύση μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των παραπάνω συναρτήσεων (3.3).
- Επειδή η γενική λύση της εξίσωσης Schrödinger γράφεται ως επαλληλία των απλών συναρτήσεων (3.3) ισχύει το θεώρημα bandwidth, προσαρμοσμένο όμως με ορμές και ενέργειες

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \quad \Delta t \cdot \Delta E \approx \hbar \quad (4.18)$$

Η ισχύ λοιπόν των σχέσεων (4.18) του θεωρήματος bandwidth **ΚΑΙ** στη (σύγχρονη) Κβαντομηχανική ήταν μονόδρομος, επιβεβλημένη ενδογενώς.

Να το πούμε κι αλλιώς:

Η εξίσωση του Schrödinger δέχεται μονοχρωματικές λύσεις της μορφής (3.3) και η γενική της λύση-κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$, στην οποία εμπλέκονται τα x, p, E και t , εξαρτάται από το χώρο και το χρόνο έχοντας χαρακτηριστικά «παλμού» (σελ.8). Κατ' αντιστοιχία λοιπόν με την κυματική εξίσωση, θα έχει συνδεδεμένα μαζί της μια «έκταση» Δx , ένα φάσμα ορμών εύρους Δp , ένα φάσμα ενεργειών εύρους ΔE , ένα χρονικό διάστημα Δt και θα ισχύουν υποχρεωτικά οι σχέσεις **(4.18)**, οι οποίες είναι σχέσεις αβεβαιότητας τύπου bandwidth.

Η παραπάνω διαπίστωση έχει μέσα της κάτι πολύ γενικό, αλλά και πολύ δεσμευτικό συγχρόνως για την εξίσωση Schrödinger:

Η λύση $\psi(x, t)$ της εξίσωσης του Schrödinger (η κυματοσυνάρτηση δηλαδή) ανεξάρτητα από την ερμηνεία και το φορμαλισμό που θα την συνόδευσαν, ανεξάρτητα από το αν αντιπροσώπευε κύματα υλικά, κλασικά ή οτιδήποτε άλλο, ανεξάρτητα από κυματοσωματιδιακούς δυϊσμούς και πιθανότητες, ανεξάρτητα από οτιδήποτε, η κατασκευή της ήταν τέτοια που θα εμπλέκονταν οπωσδήποτε τα $\Delta x, \Delta p, \Delta E, \Delta t$ και θα πληρούσαν οπωσδήποτε τις σχέσεις (4.18) του θεωρήματος bandwidth.

Οπότε

- 1) Αν η ερμηνεία της λύσης $\psi(x, t)$ παρέμενε δεμένη στα υλικά κύματα και τις διπλές κλασικές φύσεις, η εξίσωση του Schrödinger θα ήταν μια απλή, κλασική στη δομή της, κυματική εξίσωση υλικών κυμάτων και οι ερμηνείες των συμβόλων $\Delta x, \Delta p, \Delta E$ και Δt θα ήταν απλές ερμηνείες κυματοπακέτων, ίδιες πάνω κάτω με εκείνες που παρουσιάσαμε στη σελίδα 20.

- 2) Αν η ερμηνεία της λύσης $\psi(x, t)$ απαλλάσσονταν από τα υλικά κύματα, η εξίσωση του Schrödinger θα άλλαζε δυναμική και τα Δx , Δp , ΔE και Δt δε θα ήταν πλέον απλές «εκτάσεις» κυματοπακέτων, αλλά κάτι εντελώς καινούριο, πρωτοφανές.

Τελικά συνέβη το δεύτερο!

Η στατιστική ερμηνεία που έδωσε ο Born στη λύση $\psi(x, t)$ της εξίσωσης Schrödinger άλλαξε δραματικά την κατάσταση, ανατρέποντας όλη την παλιά νευτώνεια λογική μας και αναγκάζοντας τα φυσικά μεγέθη να υπολογιστούν στατιστικά με βάση την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ και την ερμηνεία της.

Τα Δx , Δp , ΔE από «εκτάσεις» (υλικών) κυματοπακέτων κάποιας ανάλυσης Fourier ορίστηκαν αυστηρά μαθηματικά ως αβεβαιότητες και το Δt από χρονικός εντοπισμός κυματοπακέτου έγινε ο αυστηρά ορισμένος μέσος χρόνος ζωής τ του συστήματος.

Οι σχέσεις μεταξύ τους από απλές σχέσεις bandwidth πήραν την αυστηρή μορφή των σχέσεων (4.3) και (4.11) και έγιναν οι γνωστές αυστηρές κβαντικές σχέσεις αβεβαιότητας

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \text{κ.λπ.} \quad (4.19)$$

Η ερμηνεία λοιπόν που δόθηκε στη κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ κυριολεκτικά μετουσίωσε τις σχέσεις (4.18) από απλές σχέσεις bandwidth σε προσεγγιστικές ισότητες των αυστηρών σχέσεων αβεβαιότητας (4.19).

Για να συνειδητοποιήσουμε αυτή τη μετουσίωση είναι καλό να δούμε την απόδειξη του θεωρήματος bandwidth σε διάφορα βιβλία. Γρήγορα θα διαπιστώσουμε ότι τα Δx , Δk , $\Delta \omega$, Δt είναι εύρη τα οποία δεν είναι αυστηρά ορισμένα. Η αυθαιρεσία της τιμής τους εξαρτάται από το μέρος του κυματοπακέτου που κρίνει ο συγγραφέας ότι πρέπει να βρίσκεται μέσα στα εύρη που θα επιλέξει. (βλέπε σχήματα 1.2, 1.4 και 1.5).

Αποτέλεσμα αυτής της **αυθαιρεσίας** είναι ότι το δεύτερο μέλος των σχέσεων

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \quad \text{και} \quad \Delta t \cdot \Delta \omega \approx 2\pi$$

και κατά συνέπεια των άμεσων απόρροιών τους

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \quad \text{και} \quad \Delta t \cdot \Delta E \approx \hbar$$

ποικίλλει από βιβλίο σε βιβλίο και είναι προσεγγιστικό.

Έχει όμως ως κύρια σημαντικότερη πληροφορία το ότι δε γίνεται ποτέ μηδέν!

Συμπεράσματα

α) Οι σχέσεις

$$\left. \begin{array}{ll} \Delta x \cdot \Delta p \approx h & \text{και} \quad \tau \cdot \Delta E \approx h \\ \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar & \text{και} \quad \tau \cdot \Delta E \approx \hbar \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

που γράφονται και ως

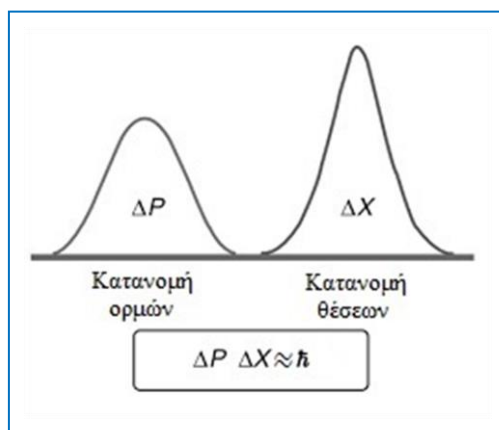
έτσι κι αλλιώς υπήρχαν στην «κυματικών καταβολών» εξίσωση του Schrödinger, ήταν αναμενόμενες. Το πρωτοφανές ήταν η στατιστική ερμηνεία που τις απάλλαξε από τις κλασικές

τους δεσμεύσεις, από τα υλικά κύματα, από τους μεταφυσικούς δυϊσμούς και από τις «εκτάσεις κυματοπακέτων» τύπου θεωρήματος bandwidth. Η ερμηνεία ήταν εκείνη που τις απογείωσε σε σύγχρονες αρχές αβεβαιότητας Heisenberg με πάμπολλες εφαρμογές, δυναμικότητα φυσική παρουσία, πρωτόγνωρη ερμηνευτική δύναμη και με καταπληκτικές φιλοσοφικές προεκτάσεις και προοπτικές.

Φυσιολογικότητα λοιπόν οι (4.20) έγιναν προσεγγιστικές ισότητες των αυστηρών σχέσεων αβεβαιότητας (4.19), με τα σύμβολα Δx , Δp , ΔE , τ να έχουν αποκτήσει ξεχωριστό νόημα:

- Δx είναι ένα μέτρο του εύρους της περιοχής γύρω από τη μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου(*), μέσα στην οποία μπορεί να εντοπιστεί το σωματίδιο με μεγάλη πιθανότητα. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει η αβεβαιότητα Δx τόσο μικραίνει η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε μια συγκεκριμένη θέση (μικραίνει δηλαδή η ακρίβεια στον εντοπισμό του).
- Δp είναι ένα μέτρο του εύρους της περιοχής ορμών γύρω από τη μέση τιμή της ορμής του σωματιδίου(**), μέσα στην οποία βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα η τιμή της ορμής του σωματιδίου. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλώνει η αβεβαιότητα Δp τόσο μικραίνει η πιθανότητα να έχει το σωματίδιο μια συγκεκριμένη τιμή ορμής.

Αντίστοιχα ισχύουν για την αβεβαιότητα ενέργειας ΔE και τον χρόνο τ



Σχήμα 4.1: Οι προσεγγιστικές ισότητες της κβαντομηχανικής δεν έχουν καμιά σχέση με μήκη κύματος σωματιδίων και με τις εκτάσεις τους

β) Το γεγονός ότι το δεύτερο μέλος των σχέσεων

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

και

$$\tau \cdot \Delta E \approx h$$

είναι διάφορο του μηδενός

- Στη θεωρία των υλικών κυμάτων και του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού σχετίζεται

(*) Το Δx δεν είναι η περιοχή, αλλά το εύρος της περιοχής γύρω από τη μέση τιμή του x .

(**) Το Δp δεν είναι η περιοχή των ορμών, αλλά το εύρος της περιοχής γύρω από τη μέση τιμή της ορμής p .

με το θεώρημα bandwidth και συνεπώς με τη χωρική και χρονική έκταση υλικών και ηλεκτρομαγνητικών κυματοπακέτων. Αφορά το φάσμα των ορμών και των ενεργειών των υλικών μονοχρωματικών κυμάτων των οποίων η επαλληλία συνθέτει αυτά τα κυματοπακέτα.

Οι παραπάνω σχέσεις δηλαδή έχουν να κάνουν με την έκταση του ηλεκτρονίου, του φωτονίου, του κουάρκ κ.λπ. και με την επαλληλία των ορμών και ενεργειών που εμπλέκονται για να φτιάξουν την έκτασή τους. Σχετίζονται δηλαδή με εντελώς αδιέξοδα και ανυπόστατα πράγματα.

- Στην κβαντομηχανική αφορά στο φάσμα των πιθανών ορμών και ενεργειών με τις οποίες μπορεί να εμφανιστεί ένα σωματίδιο (στοιχειώδες ή με δομή), δηλώνει ότι υπάρχουν στατιστικές κατανομές των πιθανών τιμών ενός μεγέθους, δηλώνει ότι υπάρχουν αβεβαιότητες, ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια κλπ. Σχετίζονται δηλαδή με πάρα πολύ σοβαρά και πειραματικά ελεγμένα πράγματα.

4.8 Η Φυσική δίνει ξεχωριστή αξία στις μαθηματικές σχέσεις

Η κυματική εξίσωση (1.1) δέχεται ως λύση τη μιγαδική συνάρτηση

$$e^{i(kx-\omega t)} \quad (3.2)$$

αλλά συγχρόνως και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της. Όμως μετά τη μαθηματική επεξεργασία περιοριζόμαστε στο πραγματικό μέρος της (3.2), γιατί αυτό είναι η πραγματικότητα των κυμάτων που μας ενδιαφέρει.

Η εξίσωση Schrödinger (3.5) δέχεται ως λύση τη μιγαδική συνάρτηση

$$e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (3.3)$$

αλλά δεν δέχεται ως λύση ούτε το πραγματικό ούτε το φανταστικό μέρος της (*).

Οι συναρτήσεις-λύσεις λοιπόν $e^{i(kx-\omega t)}$ και $e^{i(px-Et)/\hbar}$ δεν αντιμετωπίζονται ισάξια και πιθανώς να αναρωτηθεί κάποιος αν θα μπορούσαν να ισχύουν διαφορετικής μορφής θεωρήματα bandwidth για την κυματική εξίσωση και την εξίσωση Schrödinger.

Η απάντηση είναι όχι:

Η μιγαδική $e^{i(kx-\omega t)}$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και η μιγαδική $e^{i(px-Et)/\hbar}$ είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger. Αναφέραμε αρκετά κοινά χαρακτηριστικά τους, καθώς και κάποιες κοινές μαθηματικές ιδιότητες των διαφορικών εξισώσεών τους. Βάσει αυτών αποδείξαμε ότι ισχύει το μαθηματικό θεώρημα bandwidth, με την ίδια ουσιαστικά μορφή, για τις γενικές λύσεις και των δύο διαφορικών εξισώσεων. Αυτό το μαθηματικό «καθεστώς» δε μπορούμε να το αλλάξουμε.

(*) Οι κυματοσυναρτήσεις, είναι μιγαδικές. Όμως η κυματοσυνάρτηση σε μια ορισμένη χρονική στιγμή μπορεί να είναι πραγματική. Αφορά μια χρονική στιγμή και συνεπώς δεν έχει τη δύναμη να περιγράψει τη χρονική εξέλιξη κάποιου φαινομένου

Το πώς όμως θα χειριστούμε τις μερικές λύσεις $e^{i(kx-\omega t)}$ και $e^{i(px-Et)/\hbar}$, τις διαφορικές τους εξισώσεις (κυματική εξίσωση και εξίσωση Schrödinger) και το όμοιας μορφής θεώρημα bandwidth είναι καθαρή υπόθεση της Φυσικής, δηλαδή της ερμηνείας που δίνει στις εξισώσεις, στις συναρτήσεις τους, στις παραστάσεις κ.λπ., με τον τελευταίο λόγο να τον έχει πάντα το πείραμα.

Σαφώς και θα διατηρηθεί η μαθηματική αυστηρότητα, αλλά ο χειρισμός και η ερμηνεία των σχέσεων είναι υπόθεση της Φυσικής και τελικά του πειράματος.

4.9 Μήκος κύματος ηλεκτρονίου ή αρχή αβεβαιότητας;

Οι έννοιες του μήκους κύματος και της συχνότητας σωματιδίου (π.χ. ηλεκτρονίου, πρωτονίου) εισήχθησαν με τη θεωρία των υλικών κυμάτων του *de Broglie*. Με τον τρόπο αυτό το κάθε σωματίδιο συνδέθηκε με ένα χωρικό εύρος λειτουργίας (παρουσίας) λ και με μια χρονική περιοδικότητα T

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{και} \quad f = \frac{E}{h} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{E}{h} \Rightarrow T = \frac{h}{E} \quad (4.21)$$

Οι έννοιες λ και T αφορούσαν ουσιαστικά τη συνάρτηση $e^{i(kx-\omega t)}$ η οποία μαζί με άλλα κυματικά «εργαλεία», χρησιμοποιήθηκαν ως «οδηγοί-αντιστοιχίες» ώστε να καταλήξουμε στο ότι η συνάρτηση

$$e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (3.3)$$

έπρεπε να αποτελεί λύση της ζητούμενης εξίσωσης Schrödinger. Κατόπιν γνωρίζοντας τη μορφή μιας λύσης θα ζητούσαμε την ίδια την εξίσωση. Όπως και έγινε.

Αν όμως δούμε την εξίσωση του Schrödinger (3.5) και τη λύση της (3.3), το μήκος κύματος και η συχνότητα δεν υπάρχουν **πουθενά** ως έννοιες. Αντικαταστάθηκαν από την ορμή και την ενέργεια, οι οποίες ως δυναμικές μεταβλητές του συστήματος συνδέονται άμεσα με τις κυματοσυναρτήσεις.

Σε αντίθεση λοιπόν με τις παλιές κυματικές σχέσεις (4.21), σήμερα στην κβαντομηχανική υπάρχουν οι προσεγγιστικές ισότητες των αρχών αβεβαιότητας

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p} \quad \text{και} \quad \Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} \quad (4.22)$$

Οι σχέσεις αβεβαιότητας (4.22) του Heisenberg μπορεί να μοιάζουν κατά μια έννοια με τις (4.21), αλλά δεν έχουν καμιά απολύτως σχέση με αυτές. Η πανίσχυρη ερμηνευτική, φιλοσοφική, συλλογιστική, μαθηματική δύναμη των σχέσεων (4.22) δεν συγκρίνεται καν με την καθαρά ιστορική, εντελώς λανθασμένη και ξεπερασμένη πλέον θέση των σχέσεων (4.21) της θεωρίας των υλικών κυμάτων για τα σωματίδια.

Ειλικρινά δεν καταλαβαίνω γιατί διατηρούνται ακόμη οι σχέσεις (4.21). Σε ποιους συλλογισμούς ή συμπεράσματα μπορούν να μας βοηθήσουν οι λανθασμένες σχέσεις (4.21) και δε μπορούν να το κάνουν πολύ καλύτερα οι σωστές σχέσεις (4.22) ή οι ακριβείς ανισοτικές μορφές των σχέσεων αβεβαιότητας (4.19);

Οι εφαρμογές τους που θα παρουσιάσουμε στην ενότητα 6 το δείχνουν ξεκάθαρα.

4.10 Η αξία των προσεγγιστικών ισοτήτων αβεβαιότητας

Η χρήση των αυστηρών ανισοτικών μορφών των σχέσεων Αβεβαιότητας του Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

απαιτεί κάποιες φορές τον ακριβή υπολογισμό των Δx , Δp , ΔE , τ και συνεπώς την ακριβή μορφή της κυματοσυνάρτησης του συγκεκριμένου προβλήματος που εξετάζουμε. Το πιο πιθανό λοιπόν είναι τελικά να απαιτηθεί ακριβής λύση της εξίσωσης Schrödinger, και μαθηματικοί υπολογισμοί δύσκολοι, πράγματα που δεν είναι πάντα εύκολο να γίνουν.

Εξάλλου η οριακή τιμή $\frac{\hbar}{2}$ σπανιότατα επιτυγχάνεται. Πιο συνηθισμένες οριακές τιμές είναι οι $\hbar$ και $\hbar$

Με αυτά τα δεδομένα, αν δεν επιθυμούμε ακριβείς ποσοτικούς υπολογισμούς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγιστικές ισότητες

$$\begin{array}{ccc} \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar & \text{και} & \tau \cdot \Delta E \approx \hbar \\ \text{ή} & & \\ \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar & \text{και} & \tau \cdot \Delta E \approx \hbar \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar & \text{και} & \tau \cdot \Delta E \approx \hbar \\ \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar & \text{και} & \tau \cdot \Delta E \approx \hbar \end{array}} \right\} (4.20)$$

επειδή

- Λειτουργούν ικανοποιητικά για τη θεμελιώδη και γενικά για τις χαμηλές ενεργειακές καταστάσεις των κβαντικών συστημάτων. Οι καταστάσεις αυτές έχουν συνήθως «μικρότερης έκτασης» κυματοσυναρτήσεις και αντιστοιχούν σε μικρότερες ορμές από τις υψηλές ενεργειακές καταστάσεις.
- Οδηγούν σε καλά ποιοτικά συμπεράσματα και σε ικανοποιητική εκτίμηση της τάξης διαφόρων μεγεθών.

Αν λοιπόν πάρουμε υπόψη μας ότι αυτό που ζητάμε δεν είναι πάντα η ακρίβεια, αλλά και η ποιοτική πρόβλεψη καταστάσεων, οι προσεγγιστικές ισότητες (4.20) είναι πάρα πολύ χρήσιμες.

4.11 Κβαντική αναθεώρηση της έννοιας «αιτιότητα»

Οι σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε την **αιτιότητα** και επιβάλλουν να επανεξετάσουμε κάποιες απόψεις όπως π.χ. ότι στην επιστήμη τα ίδια αίτια οδηγούν πάντα στα ίδια αποτελέσματα.

Ας γίνω πιο σαφής:

Για την κλασική Φυσική τα ίδια αίτια οδηγούν πάντα στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Αν λοιπόν ξέρουμε κάποια χρονική στιγμή ακριβώς τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου, καθώς κι όλες τις δυνάμεις που δρουν και θα δράσουν επάνω του, τότε η τροχιά του, η θέση του, η ορμή του κ.λπ. μπορούν να προσδιοριστούν με απόλυτη ακρίβεια οποιαδήποτε χρονική στιγμή του παρελθόντος και του μέλλοντος.

Με πολύ αλαζονεία λοιπόν θα λέγαμε ότι αν κάποια χρονική στιγμή ξέραμε ακριβώς τη θέση και την ορμή όλων των σωματιδίων του Κόσμου, καθώς και όλες τις δυνάμεις που δρουν επάνω τους, αν δηλαδή ξέραμε ακριβώς το παρόν του Σύμπαντος, τότε θα ξέραμε ακριβώς όλο το παρελθόν του και όλο το μέλλον του.

Στην κβαντομηχανική όμως οι αρχές αβεβαιότητας ευτυχώς μας γλιτώνουν από αυτή την δυσβάστακτη γνώση, γιατί απαγορεύουν, ακόμη και στο πιο μικρό «σωματίδιο» του Σύμπαντος (πόσο μάλλον σε όλα μαζί τα σωματίδιά του) να υπάρξει οπουδήποτε, είτε σε πείραμα είτε σε φυσικό σύστημα, έχοντας ταυτόχρονα απολύτως ακριβή θέση και απολύτως ακριβή ορμή.

Αφού λοιπόν η Φύση δεν θα ικανοποιήσει ποτέ κλασικές ακρίβειες στις προβλέψεις μας, μπορούμε να είμαστε πολύ χαρούμενοι με μια πιο βαθιά γνώση:

Στην κβαντομηχανική η έννοια της αιτιότητας μετατοπίζεται από την ακριβή χρονική πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός συστήματος στην ακριβή χρονική πρόβλεψη της κυματοσυνάρτησής του(*) και συνεπώς στην ακριβή χρονική πρόβλεψη της **πιθανής** συμπεριφοράς του συστήματος.

Ενώ δηλαδή η κλασική λογική λέει ότι κάτι είναι αληθές και όλα τα υπόλοιπα ψευδή, για την κβαντομηχανική συνυπάρχουν στα συστήματα πολλές δυνατές καταστάσεις και στα φαινόμενα πολλές εκβάσεις. Η Φύση λοιπόν είναι εντελώς προβλέψιμη κβαντικά με την έννοια ότι είναι προβλέψιμη η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης και των πιθανοτήτων που εισάγει. **Δεν είναι προβλέψιμο το αποτέλεσμα, αλλά η πιθανότητά του.**

4.12 Η διαδικασία της μέτρησης

Η εξίσωση του Schrödinger και οι σχέσεις αβεβαιότητας που έφερε στη σκηνή είναι συγκλονιστικότερες ανακαλύψεις κορυφαίου πολιτισμού, όχι μόνο για τη σημερινή μαθηματική τους φόρμα ή για τις όλο και πιο ισχυρές μορφές τους που θα ανακαλυφθούν στο μέλλον, αλλά κυρίως για την καταπληκτική φυσική φιλοσοφία που καταθέτουν:

Η Φύση έχει στη δομή της τις πιθανότητες, το τυχαίο. Όχι την έλλειψη δεδομένων, την πληθώρα αυτών ή την άγνοια, αλλά το δομικά τυχαίο. Η λειτουργία της Φύσης και άρα όλες οι δημιουργικές της ικανότητες είναι κατά βάση ανεξέλεγκτα πιθανοκρατικές. Το Σύμπαν είναι κβαντικό, γιατί μόνο έτσι μπορεί να υπάρχει και να δημιουργεί.

Οι σχέσεις αβεβαιότητας δε μπορούν να παραβιαστούν από κανένα φυσικό σύστημα, είτε σε αυτό συμμετέχει ο άνθρωπος είτε όχι. Συνεπώς δε μπορούν να παραβιαστούν από κανένα πείραμα, οσοδήποτε υψηλής τεχνολογίας, ακόμη και άπειρης «ακρίβειας».

Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τη διαδικασία της μέτρησης:

Για να γίνει μέτρηση σε φυσικό σύστημα πρέπει η μετρητική συσκευή να αλληλεπιδράσει

(*) Θεωρητικά η εξίσωση του Schrödinger προβλέπει με απόλυτη ακρίβεια την κυματοσυνάρτηση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Δηλαδή προβλέπει ακριβώς τη συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης του συστήματος και όχι τη συμπεριφορά του συστήματος. Άρα η αιτιότητα στην κβαντομηχανική αναφέρεται αποκλειστικά στην αιτιότητα της κυματοσυνάρτησης.

με το σύστημα και άρα να το διαταράξει. Αλλά εμείς θέλουμε να μάθουμε πώς ήταν το σύστημα πριν το ταράξουμε. Δηλαδή στις μετρήσεις επιδιώκουμε ουσιαστικά να βάλουμε μια ξεκάθαρη, απαραβίαστη, νοητή γραμμή ανάμεσα στο σύστημα που μετράμε και στα όργανα της μέτρησης, **ώστε να μάθουμε τι κάνει το σύστημα όταν είναι «μόνο του».**

Σε μια μακροσκοπική μέτρηση λοιπόν προσπαθούμε η διαταραχή που θα προκαλέσουμε να γίνει όλο και πιο μικρή. Για τον λόγο αυτό μειώνουμε την ένταση της ακτινοβολίας όλο και πιο πολύ, μειώνουμε την «ένταση» της αλληλεπίδρασής μας με το σύστημα όλο και πιο πολύ, μειώνουμε το ένα και το άλλο και στο τέλος φαντασιωνόμαστε ότι έχουμε πετύχει μια όσο θέλουμε μικρή διαταραχή και άρα μια όσο θέλουμε μεγάλη ακρίβεια στις μετρήσεις και μια πολύ καλή γνώση των πιθανών μας πειραματικών σφαλμάτων.

Στην πραγματικότητα όμως κάναμε τη διαταραχή μας τόσο μικρή, που κάλυψε ικανοποιητικά την ακρίβεια που επιδιώξαμε βάσει της πειραματικής μας «ικανότητάς» και των δυνατοτήτων των οργάνων που διαθέσαμε.

Σε μια μικροσκοπική όμως μέτρηση (υποατομικά σωματίδια κλπ) δεν έχουμε την πολυτέλεια της προηγούμενης «φαντασίωσης». Η διαταραχή δε μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, γιατί σε κβαντικό επίπεδο λαμβάνει χώρα με κβάντα και συνεπώς με τρόπο ασυνεχή και ανεξέλεγκτο ή μάλλον με τρόπο ώστε πάντα να πληρούνται οι σχέσεις αβεβαιότητας. Από κάποιο σημείο δηλαδή και μετά, ούτε η μετρητική συσκευή μπορεί να αγνοήσει το «αδιαίρετο» των κβάντων ^(*) που θα παράγει, θα δεχτεί ή θα στείλει για την μέτρηση, ούτε το σύστημα που θα τα δεχτεί ή θα τα εκπέμψει. Οι διαταραχές όχι μόνο είναι αδύνατο να γίνουν πιο μικρές από κάποια συγκεκριμένη τιμή, αλλά έχουν επί πλέον να αντιμετωπίσουν και το τυχαίο. Οι κβαντικές αλληλεπιδράσεις είναι αδύνατο να ρυθμιστούν στις επιθυμητές μας ακρίβειες.

Συνεπώς λόγω των αρχών αβεβαιότητας

- Η διαταραχή δεν μπορεί να είναι ούτε αυθαίρετα μικρή, ούτε να ελεγχθεί.
- Υπάρχουν όρια στη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στο μετρούμενο σύστημα και στη μετρητική συσκευή. **Σε κβαντικό επίπεδο είναι αδύνατο να ξεχωρίσουμε το σύστημα που μετράμε από την μετρητική συσκευή.**

Για να δούμε πιο καθαρά τη λειτουργία των σχέσεων αβεβαιότητας και να μη δημιουργούμε παράδοξα (π.χ. γάτα Schrödinger) θα πρέπει ενίστε να πάρουμε υπόψη μας ότι όλα γύρω μας, άρα και οι πειραματικές μας διατάξεις, είναι κβαντικά συστήματα και επομένως υπακούουν στις ίδιες σχέσεις αβεβαιότητας με το μετρούμενο σύστημα (σελ. 91)

Παρατήρηση

Η φράση «μετρητική διαδικασία» δεν περιορίζεται σε στημένες ανθρώπινες κατασκευές, αλλά περιλαμβάνει κάθε φυσικό σύστημα, γιατί όλα τα «συστατικά» ενός φυσικού συστήματος (σωματίδια, ακτινοβολίες, φαινόμενα, δυνάμεις κ.λπ.) υπόκεινται σε μια μόνιμη διαδικασία «μέτρησης». Δηλαδή σε μια μόνιμη λειτουργία όλων των νόμων της Φύσης (και των σχέσεων αβεβαιότητας) κατά την οποία δεν καταχωρούνται τα αποτελέσματα σε επιστημονικές σημειώσεις και τετράδια, αλλά αποτελούν αιτίες για επόμενα φαινόμενα και επόμενες καταστάσεις του φυσικού συστήματος.

(*) Ότι δηλαδή ο αριθμός των κβάντων είναι ακέραιος, που λαϊκά σημαίνει ή 1 κβάντο το λιγότερο ή τίποτε

4.13 Ο «λεπτός» τρόπος διδασκαλίας των αρχών αβεβαιότητας

Πολλές φορές ο τρόπος που διδάσκονται οι σχέσεις αβεβαιότητας αφήνει τη λανθασμένη εντύπωση ότι οφείλονται στη συνείδηση, στον παρατηρητή, στη μετρητική συσκευή, στην ανικανότητά μας, στην έλλειψη ικανοποιητικής τεχνολογίας, στη Φύση που κρύβεται κλπ.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να διδάξουμε την αρχή της αβεβαιότητας αναλύοντας τα παρακάτω βήματα σε συγκεκριμένη μέτρηση:

- 1) Μέτρηση της θέσης και της ορμής του ηλεκτρονίου σε ένα σύστημα.
- 2) Η μέτρηση θα ταραξεί το ηλεκτρόνιο και γενικότερα το σύστημα, γιατί μέτρηση σημαίνει αλληλεπίδραση μετρητικής συσκευής και ηλεκτρονίου συστήματος.
- 3) Η μέτρηση οδηγεί σε κατανομές πιθανών θέσεων και ορμών του ηλεκτρονίου σύμφωνα με τις δομικές φύσεως σχέσεις αβεβαιότητας.

Αν σταματήσουμε εδώ ίσως αφήσουμε τις παρακάτω **λανθασμένες** εντυπώσεις:

- Το ηλεκτρόνιο πριν κάνουμε τη μέτρηση είχε μια εντελώς συγκεκριμένη θέση και μια εντελώς συγκεκριμένη ορμή, οι οποίες διαταράχθηκαν (από τον παρατηρητή) όταν επιχειρήθηκε η μέτρηση. Άρα οι τιμές που θα βρούμε δεν είναι αυτές που είχε το ηλεκτρόνιο όταν ήταν μόνο του, αλλά αυτές στις οποίες το αναγκάσαμε.
- Η Φύση δε φταίει για τις αβεβαιότητες. Φταίει ο άνθρωπος και οι συσκευές του που ταραζουν όσα επιχειρεί να μετρήσει, ειδικά όσα είναι πολύ μικρά. Άρα οι αρχές αβεβαιότητας είναι «προβλήματα» της μέτρησης και όχι Αρχές του Κόσμου.

Οι λανθασμένες αυτές εντυπώσεις πιθανώς να ενισχυθούν αν ληφθεί υπόψη ότι η Φυσική ασχολείται σχεδόν αποκλειστικά με μετρήσεις και συνεπώς δημιουργεί πάντα διαταραχές

Για να αποφύγουμε τα παραπάνω νομίζω ότι πρέπει να συνεχίσουμε τη διδασκαλία επιμένοντας με πειστικό τρόπο στο ότι οι αρχές της αβεβαιότητας είναι εσωτερικό στοιχείο της Φύσης και ότι υφίστανται ανεξάρτητα από το αν στήνεται ή δεν στήνεται ένα πείραμα, ανεξάρτητα αν υπάρχει ή όχι παρατηρητής, ανεξάρτητα από σκοπιμότητες, ανεξάρτητα από οτιδήποτε.

Το ηλεκτρόνιο, είτε το μετράμε σε κάποιο πείραμα στη Γη είτε βρίσκεται σε κάποιο φυσικό σύστημα στην «άκρη» του Σύμπαντος μακριά από ανθρώπους, εξωγήινες συνειδήσεις και απόκοσμους παρατηρητές, **δε μπορεί από δομή της ίδιας της Φύσης να εμφανιστεί οπουδήποτε έχοντας ταυτόχρονα απόλυτα συγκεκριμένη θέση και απόλυτα συγκεκριμένη ορμή**. Η παρουσία οποιουδήποτε σωματιδίου, σε οποιοδήποτε μέρος και για οποιονδήποτε λόγο, συνοδεύεται από τέτοια αβεβαιότητα στη θέση και από τέτοια αβεβαιότητα στην ορμή, ώστε να πληρούνται πάντοτε τις σχέσεις του Heisenberg.

Εν κατακλείδι, φράσεις του τύπου

«... αν θέλουμε να ξέρουμε με μεγάλη ακρίβεια την ορμή ενός σωματιδίου θα πρέπει να το πληρώσουμε με μεγάλη άγνοια της θέσης του...»

«... και τα δύο, δηλαδή γνώση και της ακριβούς θέσης και της ακριβούς ορμής δεν μπορούμε να έχουμε...»

«... ενώ ξέρουμε **τι πιθανώς** θα κάνει ένα σωματίδιο, δε μπορούμε να μάθουμε **τι ακριβώς** θα κάνει...»

«...ούτε η Φύση δεν ξέρει τι ακριβώς κάνει ένα σωματίδιό της...»

θέλουν εξηγήσεις, γιατί ίσως δημιουργήσουν την λανθασμένη εντύπωση ότι το σωματίδιο όταν είναι μόνο του κάτι κάνει, αλλά εμείς δεν το ξέρουμε και δε μπορούμε να το μάθουμε ή γιατί το ταραζούμε όταν πάμε να το μάθουμε ή γιατί δεν είμαστε ικανοί να το βρούμε ή γιατί μας το κρύβει η Φύση ή γιατί ...

Το ερώτημα λοιπόν «τι ακριβώς κάνει το σωματίδιο;» είτε σε κάποιο πείραμα, είτε σε κάποιο φυσικό σύστημα μακριά από μας, δεν έχει κανένα νόημα γιατί μια συμπεριφορά με νευτώνεια ακρίβεια, δηλαδή συμπεριφορά με ταυτόχρονη απόλυτη ακρίβεια όλων των φυσικών μεγεθών του δεν είναι γραμμένη στη δομή της Φύσης. Δεν επιτρέπεται και δε μπορεί να γίνει γνώση ΚΑΝΕΝΟΣ γιατί απλώς δεν υπάρχει τέτοια συμπεριφορά.

Ενότητα 5

Η φύση του φωτός, ένα μάθημα σε παιδιά και μια κουβέντα με ένα λουλούδι

5.1 Μια πραγματική διδασκαλία για το φως

*(Έγινε στα πλαίσια του μαθήματος Φυσική Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου.
Δίνω το περίγραμμα όσων ειπώθηκαν,
γιατί υπήρξαν επιπλέον αναλύσεις κάποιων λόγων μου)*

«

- Τι είναι τελικά το φως Δάσκαλε;
 - Το φως είναι φωτόνια και μόνο φωτόνια.
 - Και γιατί τα λέμε ηλεκτρομαγνητικά κύματα;
 - Το φως είναι φωτόνια και η συμπεριφορά του, είτε έχουμε ένα φωτόνιο είτε έχουμε πολλά φωτόνια, περιγράφεται με καταπληκτική ακρίβεια από την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED). Η θεωρία αυτή όμως είναι πολύ δύσκολη στην κατανόηση και στον χειρισμό της και σίγουρα δεν είναι για παιδιά.
- Όμως κάθε τεράστιο πλήθος από φωτόνια δείχνει συμπεριφορά κυμάτων, ακολουθεί δηλαδή κανονικότητες (νόμους) οι οποίοι δίνουν τη γνωστή εικόνα των κυμάτων (των διαταραχών). Την συμπεριφορά αυτή τη γνωρίζουμε πολύ καλά, γιατί την περιγράφει πολύ καλά και σχετικά εύκολα η Κλασική Ηλεκτροδυναμική (CED) των Maxwell, Lorentz κλπ.

Άρα όταν έχουμε τεράστια πλήθη φωτονίων συμφέρει, αντί της πολύ δύσκολης QED, να χρησιμοποιούμε την CED και αντί για φωτόνια να μιλάμε για ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Δηλαδή συμφέρει στην περίπτωση αυτή αντί να επικεντρωνόμαστε στη συμπεριφορά της μονάδας (φωτόνιο) να αντιμετωπίζουμε τη συμπεριφορά του πλήθους των φωτονίων (κύματα).

Κάνουμε δηλαδή κάτι ανάλογο με αυτό που κάνουμε με τον Νεύτωνα και τον Αϊνστάιν. Στις περιοχές όπου λειτουργεί ο Νεύτωνας δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε τον «βαρύ» και δύσκολο Αϊνστάιν, αφού η προσέγγιση των αποτελεσμάτων τους είναι τόσο μεγάλη, που σίγουρα καλύπτει τις επιδιωκόμενες ακρίβειες.

Δε λέμε λοιπόν ότι το φως είναι κύματα, αλλά ότι το φως είναι φωτόνια τα οποία όταν είναι σε τεράστια πλήθη τα χειριζόμαστε ως ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Πιο επιστημονικά λέμε ότι στις μεγάλες εντάσεις της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, όπου δεν μας ενδιαφέρει τι κάνει η «μονάδα» (φωτόνιο), χρησιμοποιούμε τη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

- Άρα το φως Δάσκαλε είναι φωτόνια που σε μεγάλες εντάσεις συμπεριφέρεται ως κύμα;

- Ναι... Να σου πω ένα ακραίο παράδειγμα, αλλά μην το πάρεις τοις μετρητοίς, γιατί τα φωτόνια δεν μοιάζουν με τίποτε από όσα έχεις δει και θα δεις στη ζωή σου και στη ζωή όλων των ανθρώπων μαζί. Δεν υπάρχει κλασικό ανάλογο για τα φωτόνια

Κάποιες φορές στις θάλασσες βλέπουμε τις σαρδέλες σε κοπάδι να κάνουν διάφορους σχηματισμούς. Και τα ψαρόνια στον αέρα κάνουν το ίδιο. Αν λοιπόν στη θάλασσα ένα κοπάδι σαρδέλες πάρει το σχήμα ενός καρχαρία, αυτό δε σημαίνει ότι η σαρδέλα έχει διπλή φύση, που άλλοτε εκφράζεται ως σαρδέλα και άλλοτε ως καρχαρία.

Έτσι και το φως έχει μία και μόνο μία φύση. Είναι πάντα φωτόνια. Αλλά το κοπάδι των φωτονίων έχει μια συλλογική συμπεριφορά, που παρουσιάζει κανονικότητες και μπορούμε να τη χειριστούμε μαθηματικά και ως κύμα.

Ο λόγος που μας επιτρέπεται αυτή η μαθηματική αντιμετώπιση (π.χ. με κυματικές εξισώσεις) είναι επειδή το φωτόνιο είναι τόσο ασύλληπτα μικρό, ώστε οι συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για το «κοπάδι» των φωτονίων μπορούν να θεωρηθούν συνεχείς, έχουν τη δυνατότητα διπλής παραγωγίσης, μπορούν να μπουν σε κυματικές εξισώσεις κ.λπ. Γενικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο απειροστικός λογισμός, επειδή στο σύνολο (κοπάδι) που εξετάζουμε έχουμε διαμερίσεις της τάξης του ενός φωτονίου...

- Τα ψαρόνια όταν πετούν ως σύνολο φτιάχνουν διάφορους σχηματισμούς οι οποίες αρκετές φορές είναι γνωστές μορφές. Γιατί δε τα λέμε "ψαρονικά" κύματα;

- Γιατί η συνολική συμπεριφορά του πλήθους των πουλιών αυτών δεν είναι δυνατόν, τουλάχιστον μέχρι στιγμής, να μπει σε κανονικότητες (νόμους). Δε μπορώ να γράψω εξισώσεις για τη συμπεριφορά μεγάλου πλήθους ψαρονιών. Ούτε να γράψω νόμους για τη συμπεριφορά ενός τεράστιου κοπαδιού σαρδελών. Αντιθέτως μπορώ να βάλω σε νόμους ένα τεράστιο πλήθος φωτονίων και να ονομάσω αυτή τη συμπεριφορά ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

- Γιατί τα ψαρόνια δε μπαίνουν σε νόμους, ενώ τα φωτόνια μπαίνουν;

- Τα ψαρόνια ζουν σε κοπάδια των οποίων το μέγεθος δεν έχει καμιά σχέση με το ασύλληπτα τεράστιο μέγεθος των «κοπαδιών» των φωτονίων. Αλλά δεν είναι μόνο αυτός ο

λόγος. Τα ψαρόνια δε μπορούμε να τα βάλουμε σε εξισώσεις γιατί υπάρχουν πράγματα που δε μπορεί να διαχειριστεί η Φυσική. Φόβος, ένστικτα, κοπάδι, αναπαραγωγή, ζωή.

Η Φυσική εξηγεί πάρα πολλά πράγματα, αλλά έχει όρια στις ερμηνευτικές της δυνατότητες ειδικά όταν πλησιάζουμε κοντά σε θέματα συμπεριφοράς ζωντανών οργανισμών.

- Όλα τα πράγματα στη Φύση έχουν μία μόνο φύση;

- Ακριβώς! Το φως είναι μόνο φωτόνια. Πρωτόγνωρα πλασματάκια με καταπληκτική συμπεριφορά, αδιανόητη μέχρι χτες. Τα φωτόνια είναι απειροελάχιστα, αλλά καθοριστικές κβαντικές οντότητες της καταπληκτικής μας πραγματικότητας, που κάθε τόσο ξεπερνά την ανθρώπινη φαντασία.

Το φως ήταν πάντα και πιστεύω ότι θα είναι πάντα μια "καινούρια γη", που κάθε φορά θα τήν ανακαλύπτουμε καθώς θα ταξιδεύουμε προς τα μακρινά της καταπληκτικής μας πραγματικότητας.

Κατά τύχη έπεσα πάνω σε κάποιες καταπληκτικές φωτογραφίες κάποιου Γερμανού φωτογράφου Daniel Biber που δείχνουν αυτό που προσπαθώ να σας πω για τα φωτόνια.

Χαρείτε τις εικόνες. Είναι ό,τι καλύτερο μπορώ να σας δώσω από τον κόσμο των φωτονίων. Έναν κόσμο όπου τα μεμονωμένα πλάσματά του δεν διαθέτουν εικόνες για τα μάτια μας, αλλά μόνο για το μυαλό. Έναν κόσμο που μόνο με μαθηματικά και πειραματική αποτύπωση φευγαλέων συμπεριφορών "βλέπουμε" και όχι με προσομοιώσεις. «Γεύση» από έναν κόσμο όπου οι νόμοι της CED του πλήθους, συνδυάζονται όμορφα με τους νόμους της QED της πραγματικότητας της μονάδας.

Ας πούμε ότι το κάθε ψαρόνι είναι ένα φωτόνιο και ότι οι σχηματισμοί τους είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ας βολευτούμε κάπου ήσυχα κι ας ελευθερώσουμε τη φαντασία μας για μέρη όπου η Φύση επιτρέποντας στα ψαρόνια-φωτόνιά της μόνο τις πιθανότητες μιας φευγαλέας παρουσίας, χαρίζει μακροσκοπικά, στην αναλογική ματιά των Ανθρώπων τροχιές, κύματα, χρώματα, ζωή.











Στις παραπάνω φωτογραφίες,
υπάρχει η «συμπεριφορά» του κοπαδιού,
υπάρχει όμως κι η «συμπεριφορά» της μονάδας (ψαρόνι).

5.2 Κωδικοποίηση και επισημάνσεις

Δεν είναι δυνατό στον 21ο αιώνα να λέμε ότι το ηλεκτρόνιο ή το φως έχουν διπλή φύση και ότι άλλοτε είναι κύματα και άλλοτε σωματίδια ανάλογα με το πείραμα ή το φαινόμενο.

Το φως δεν είναι ούτε κύματα, ούτε κλασικά σωματίδια και δεν έχει διπλή φύση. Είναι μόνο φωτόνια που έχουν μία μόνο φύση, συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και συγκεκριμένη συμπεριφορά. Η ταυτοποίησή τους γίνεται μέσω του τρόπου που συνδέονται με τις 4 θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της Φύσης.

Τα φωτόνια είναι φορείς της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης και η συμπεριφορά τους (η συμπεριφορά του φωτός) περιγράφεται με καταπληκτική ακρίβεια, την μεγαλύτερη ίσως από κάθε άλλη επιστήμη, από την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED).

Σε περιπτώσεις που δε μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του ενός ή έστω των μερικών φωτονίων, αλλά η συμπεριφορά των τεράστιων ομάδων τους, στις περιπτώσεις δηλαδή των σχετικά μεγάλων εντάσεων ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας η Κλασική Ηλεκτροδυναμική (CED) περιγράφει με ικανοποιητική ακρίβεια τα φαινόμενα.

Σε αυτές τις περιπτώσεις επιβάλλεται να διατηρηθούν οι κυματικές έννοιες (κύμα, μήκος κύματος, συχνότητα, πλάτος κύματος, ένταση κ.λπ.), να συνεχιστεί η χρήση των διαγραμμάτων και πινάκων με συχνότητες και μήκη κύματος και να διατηρηθούν οι τεχνικοί όροι με τους οποίους επικοινωνούμε επί τόσα χρόνια.

Όμως στις περιπτώσεις όπου έχουμε μικρό αριθμό φωτονίων ή έστω ένα φωτόνιο, στις πολύ μικρές εντάσεις δηλαδή, καλό είναι να αποφεύγουμε φράσεις του τύπου «μήκος κύματος φωτονίου», «συχνότητα φωτονίου» κ.λπ. Αν αυτό δεν είναι δυνατό τουλάχιστον τις χρησιμοποιούμε με την έννοια της αντιστοιχίας όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Η φράση «μήκος κύματος» αφήνει την αίσθηση της έκτασης. Ένα φωτόνιο δεν έχει μήκος κύματος, γιατί δεν έχει νόημα η έκταση σε ένα φωτόνιο. Όπως εγκαταλείπουμε τον Νεύτωνα και τις «τροχιές» του, έτσι πρέπει να εγκαταλείψουμε και τους κλασικούς κυματικούς όρους του Maxwell, όταν ασχολούμαστε με το άτομο και τον υποατομικό κόσμο

5.3 Όπως πάντα, το φως μας βάζει σε άξιες σκέψεις

Για τα (κβαντικά) σωματίδια ύλης (ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο κ.λπ.) (*) οι σχέσεις

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad \text{και} \quad E = \hbar \omega = hf \quad (3.1)$$

αποτελούν ένα τεράστιο εννοιολογικό βάρος, μιας και είναι παραπλανητικές. Η αξία τους είναι πλέον οδυνηρά ιστορική.

Αλλά για τα φωτόνια οι σχέσεις (3.1) ίσχυαν, ήταν σωστές, χρησιμοποιήθηκαν πριν τη θεωρία των υλικών κυμάτων του de Broglie και γενικά έχουν ακολουθήσει άλλη διαδρομή:

- Ο Planck εξήγησε το φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος υποθέτοντας ότι τα άτομα εκπέμπουν και απορροφούν την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μόνο με την μορφή συγκεκριμένων ποσοτήτων (κβάντων) ενέργειας $E = hf$
- Ο Einstein προχώρησε παραπέρα την ιδέα του Planck και εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία δεν είναι κβάντα ενέργειας (φωτόνια) μόνο όταν εκπέμπεται ή όταν απορροφάται, αλλά και όταν διαδίδεται. Συνεπώς το φως είναι πάντα φωτόνια με ενέργεια $E = hf$.
- Ο Schrödinger θεμελίωσε τη βασική εξίσωση της Κβαντομηχανικής στηριζόμενος και πάνω στη σχέση $E = hf$ των φωτονίων

Άρα η σχέση $E = hf$ για τα φωτόνια είναι ουσιαστικά μια πειραματική σχέση και εκφράζει την αντιστοιχία ανάμεσα στην ενέργεια E των φωτονίων και τη συχνότητα f των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Δηλαδή την αντιστοιχία ανάμεσα στην πραγματικότητα των φωτονίων και την κυματική συμπεριφορά των τεράστιων συγκεντρώσεών τους.

Όμως στην (κυματική) θεωρία του Μάξγουελ η συχνότητα f του ηλεκτρομαγνητικού κύματος συνδέεται με το μήκος κύματός του λ με τη θεμελιώδη σχέση

$$c = \lambda f$$

(*) Λόγω λεκτικής «φτώχειας» χρησιμοποιούμε τον όρο «σωματίδιο» σε ηλεκτρόνια, φωτόνια, πρωτόνια κλπ, αλλά δεν σχετίζεται επουδενί με την έννοια του κλασικού σωματιδίου, το οποίο εξάλλου συνδέεται με τροχιές, με Νεύτωνα, με απόλυτες ακρίβειες κλπ. Τα υποατομικά σωματίδια δεν έχουν καμιά σχέση με τα κλασικά σωματίδια. Τα ηλεκτρόνια, νετρόνια κλπ είναι κβαντικά πλάσματα (κβαντικές οντότητες). Πρωτόγνωρες παρουσίες που μόνο η κβαντική φυσική μπορεί να περιγράψει τη συμπεριφορά τους.

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι η ενέργεια του φωτονίου είναι

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (5.1)$$

Από τη σχετικότητα όμως η ενέργεια ενός «σωματιδίου» που τρέχει με την ταχύτητα του φωτός (άρα και του φωτονίου) δίνεται από τη σχέση

$$E = pc \quad (*) \quad (5.2)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η ορμή p ενός φωτονίου είναι

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

και συνδέεται με τη συχνότητα με τη σχέση

$$f = \frac{p \cdot c}{h} \quad (5.3)$$

Άρα οι σχέσεις

$$E = hf, \quad E = pc, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad f = \frac{p \cdot c}{h}, \quad c = \lambda f \quad (5.4)$$

ισχύουν ως μία αντιστοιχία ανάμεσα στα μεγέθη ενέργεια και ορμή των φωτονίων και στα μεγέθη συχνότητα και μήκος κύματος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Στη γραμμή (5.4) λοιπόν υπάρχουν κατά σειρά

- μια σχεδόν «πειραματική» σχέση ανάμεσα στην ενέργεια ενός φωτονίου και τη συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο οποίο αντιστοιχεί
- μια σχέση της ειδικής σχετικότητας για σώματα που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός
- μια σχέση ανάμεσα στην ορμή ενός φωτονίου και στο μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο οποίο αντιστοιχεί
- μια σχέση ανάμεσα στην ορμή ενός φωτονίου και στη συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο οποίο αντιστοιχεί
- η θεμελιώδης κυματική σχέση

Οι σχέσεις (5.4) είναι ο απαραίτητος κρίκος, η απαραίτητη αντιστοιχία ανάμεσα στα κβάντα ενέργειας (φωτόνια) των Planck, Einstein και Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED) και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα της Κλασικής Ηλεκτροδυναμικής (CED).

Ένα φωτόνιο δεν έχει μήκος κύματος ΚΑΙ γιατί δεν έχει νόημα η έκταση σε ένα φωτόνιο.

(*) Η σχετικιστική ενέργεια E ενός σωματιδίου μάζας ηρεμίας m_0 και ορμής p δίνεται από τη σχέση

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (5.5)$$

Όμως οτιδήποτε κινείται με την ταχύτητα του φωτός c , όπως π.χ. το φωτόνιο, έχει μάζα ηρεμίας μηδέν και συνεπώς ενέργεια $E = pc$

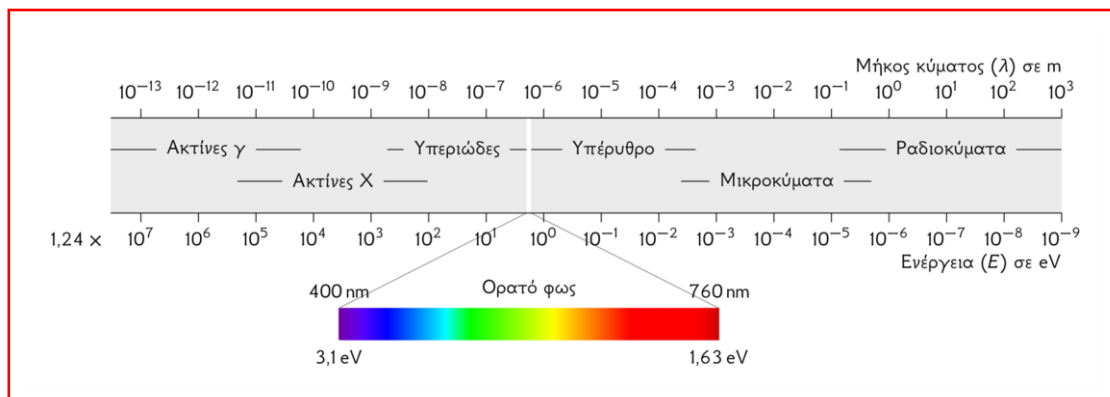
Ούτε η συχνότητα έχει νόημα για το φωτόνιο. Δεν έχει νόημα π.χ. να λέμε ότι το φωτόνιο είναι κυματοπακέτο και μέσα του μεταβάλλονται ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία με συχνότητες των εκατομμυρίων ή και δισεκατομμυρίων Hz.

Μέσα σε ένα φωτόνιο δεν υπάρχει καμιά άλλη οντότητα. Το φωτόνιο δεν έχει «μέσα».

Ας μην ξεχνάμε ότι υπάρχουν μήκη κύματος ηλεκτρομαγνητικών ακτινοβολιών που είναι μερικά χιλιόμετρα. Σε τέτοιες περιπτώσεις η απόδοση «μήκους κύματος» στο φωτόνιο οδηγεί σε α-νόητα ερωτήματα;

- Το φωτόνιο είναι μερικών χιλιομέτρων ή είναι μέσα σε κάτι άλλο που έχει έκταση χιλιομέτρων;
- Ένα τόσο μεγάλο φωτόνιο μπορεί να «κοπεί», ώστε να γίνει φωτόνια με μερικές εκατοντάδες μέτρα μήκος το καθένα;
- Όταν απορροφιέται ένα τέτοιο φωτόνιο από κάποιο σύστημα «μπαίνει μέσα» στο σύστημα σιγά σιγά, όσο διαρκεί η έκτασή του μήκους κύματός του;
- Μήπως τα ραδιοκύματα δεν έχουν φωτόνια λόγω του μεγέθους του μήκους κύματός τους ή μήπως το συνθέτουν πολλά φωτόνια μικρότερης έκτασης; κλπ

Αυτά τα πράγματα δεν έχουν νόημα. Μπορούμε όμως αντί για «μήκος κύματος φωτονίου» και «συχνότητα φωτονίου» κ.λπ. να χρησιμοποιούμε φράσεις όπως «ενέργεια φωτονίου», «ορμή φωτονίου», «σπιν φωτονίου» κλπ. Και να κάνουμε διαγράμματα συναρτήσεως της ενέργειας ή της ορμής φωτονίου αντί του μήκους κύματος ή της συχνότητάς του φωτονίου.



Σχήμα 5.1: Οι ενέργειες των φωτονίων σε eV και η αντιστοιχία τους με τα μήκη κύματος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα φωτόνια καλύπτουν ένα φάσμα ενεργειών πλάτους εκατομμύρια δισεκατομμυρίων eV. Σε εμάς είναι ορατό πλάτος ενεργειών μόνο 1,5 eV

Παρατηρήσεις

α) Αν πρέπει να αποδώσουμε στο φωτόνιο κυματικά χαρακτηριστικά, ας χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον τις σχέσεις (5.4) με την έννοια της αντιστοιχίας.

β) Η σχέση $E = hf$ χρησιμοποιήθηκε από τον Planck και τον Einstein. Οι υπόλοιπες σχέσεις είναι απόρροια ενός συνδυασμού σχετικότητας και θεμελιώδους κυματικής εξίσωσης. Άρα όλες οι σχέσεις (5.4) υπήρχαν και πριν τις χρησιμοποιήσει ο de Broglie και συνέδεαν τα φωτόνια με τα ηλεκτρομαγνητικά τους κύματα.

γ) Η μάζα ηρεμίας m_0 του φωτονίου είναι μηδέν. Αν θεωρήσουμε ως m τη μάζα του φωτονίου που είναι συνδεδεμένη με την ενέργειά του $E = hf$ τότε $E = mc^2$ και συνεπώς

$$m = \frac{hf}{c^2} \quad (5.6)$$

Περίεργες προσωπικές σκέψεις:

Βλέπω ότι η παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας δυο παγκόσμιες σταθερές, συνδέει τις σχετικιστικές μάζες των φωτονίων με τις συχνότητες. **Και σκέφτομαι ότι είναι όμορφο να φαντάζεσαι ότι η Φύση είναι γεμάτη με ένα αόρατο, παγκόσμιο, μοναχικό πιάνο** που παίζει μουσική και που από κάθε διαφορετική νότα του (συχνότητα) ξεπετάγεται και ένα διαφορετικό σωματίδιο με διαφορετική μάζα και διαφορετικές ιδιότητες.

Το πρόβλημα είναι ότι αν δεν βρούμε κανένα φαινόμενο να ακολουθεί αυτή την όμορφη φαντασία, ίσως η Φύση να την έχει απορρίψει εξ αρχής.

5.4 Λίγες ερωτήσεις για τα φωτόνια

Ερώτηση 1

Στην κλασική Φυσική, όταν ένα σωματίδιο δεν έχει μάζα τότε δεν έχει ορμή ($p=mu$), δεν έχει κινητική ενέργεια ($1/2mu^2$), δεν μπορεί να δεχτεί δυνάμεις ($F=ma$) και άρα δε μπορεί να ασκήσει δυνάμεις (3ος νόμος Νεύτωνα), δεν ... δεν... Τελικά για την κλασική φυσική ένα σωματίδιο χωρίς μάζα δεν υπάρχει, επειδή δε μπορεί να κάνει απολύτως τίποτε. Το φωτόνιο έχει μάζα ηρεμίας μηδέν και συνεπώς δεν υπάρχει για την κλασική φυσική.

Απάντηση

Η ύπαρξη του φωτονίου δεν προβλέπεται από την κλασική Φυσική και δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασής της. Δεν υπάρχει φωτόνιο για τη Μηχανική του Νεύτωνα, όσο κι αν ο ίδιος πίστευε ότι το φως είναι (κλασικά) σωματίδια. **Το φωτόνιο δεν είναι κλασική υπόθεση**. Ούτε του Νεύτωνα, ούτε του Maxwell. Όμως τα τεράστια πλήθη των φωτονίων, δηλαδή οι μεγάλες εντάσεις, παρουσιάζουν κανονικότητες και αντιμετωπίζονται θαυμάσια ως κύματα από την Κλασική Ηλεκτροδυναμική (CED).

Ερώτηση 2

Στη σχετικότητα η ορμή p κι η ενέργεια E ενός σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m_0 και ταχύτητα u δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (5.7)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (5.8)$$

Αφού λοιπόν το φωτόνιο έχει μάζα ηρεμίας $m_0 = 0$ οι παραπάνω σχέσεις δεν ισχύουν για τα φωτόνια. Άρα ούτε για τη σχετικότητα υπάρχει το φωτόνιο;

Απάντηση

Παρόλο που το φωτόνιο είναι καθαρή υπόθεση κβαντικής φυσικής, ως φορέας θεμελιώδους αλληλεπίδρασης, οι παραπάνω σχετικιστικές σχέσεις αφήνουν χώρο ύπαρξής του.

Ας δούμε:

Η μάζα ηρεμίας του φωτονίου είναι μηδέν και η ταχύτητά του $u=c$. Συνεπώς ο αριθμητής και ο παρονομαστής των παραπάνω σχέσεων μηδενίζονται και προκύπτουν όχι άτοπα αλλά απροσδιόριστες μορφές 0/0. Άρα οι σχέσεις (5.7) και (5.8) δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου.

Εύκολα από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (5.9)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για όλα τα σωματίδια, ανεξάρτητα από το αν έχουν ή δεν έχουν μάζα ηρεμίας μηδέν, ανεξάρτητα από το ποια ενέργεια και ορμή έχουν.

Άρα η (5.9) παρακάμπτει το πρόβλημα απροσδιοριστίας των (5.7) και (5.8), και για το φωτόνιο παίρνει την πάρα πολύ απλή μορφή

$$E = pc \quad (5.10)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε σωματίδιο με μηδενική μάζα ηρεμίας.

Η σχέση (5.10) λέει κάτι συγκλονιστικό:

Ένα σωματίδιο μπορεί να μην έχει μάζα (ηρεμίας) και συνεπώς να μην υπάρχει πουθενά και για κανέναν παρατηρητή όταν είναι ακίνητο. Αλλά όταν τρέχει με την ταχύτητα του φωτός **ΥΠΑΡΧΕΙ** γιατί μπορεί να μεταφέρει ενέργεια και ορμή που συνδέονται με μια πολύ απλή σχέση. Για το φως υπάρχει ένα και μόνο ένα μέσο διάδοσης! ΤΟ ΚΕΝΟ. Διάδοση φωτός σε μέσο δεν υφίσταται. Στα μέσα υπάρχει μόνο απορρόφηση και επανεκπομπή.

Ερώτηση 3

Αυτά της ερώτησης 2 μοιάζουν με μαθηματικά παιχνίδια. Επειδή δηλαδή δύο σχέσεις που οδηγούσαν σε απροσδιοριστία 0/0 αντιμετωπίστηκαν με τρόπο ώστε να φύγει η απροσδιοριστία, έχουμε το δικαίωμα να βγάζουμε συμπεράσματα για το φωτόνιο;

Απάντηση

Δεν έχουμε τέτοιο δικαίωμα. Αλλά οι Φυσικοί, ενώ κουβαλάνε στις πλάτες τους τον δύσκολο ρόλο της ερμηνείας των μαθηματικών σχέσεων που κάθε φορά παρουσιάζονται μπροστά τους, έχουν συγχρόνως και την ευλογία ενός τελικού κριτή των όσων λένε.

ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ!

Το πείραμα λοιπόν αποδεικνύει ότι η σχέση (5.9) και η ερμηνεία που της δόθηκε είναι σωστή και ισχύει με ακρίβεια για όλα τα σωματίδια, είτε έχουν μάζα ηρεμίας είτε δεν έχουν. Για τα φωτόνια, των οποίων η μάζα ηρεμίας είναι μηδέν, ισχύει η (5.10).

Ερώτηση 4

Η σχέση $E = pc$ που ισχύει για τα φωτόνια δεν είναι μόνο σχετικιστική. Ισχύει και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Δεν είναι όμως παράξενο που μια σχετικιστική σχέση ισχύει για τα κβαντικά φωτόνια, αλλά και για τα κλασικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα;

Σχετικότητα-κβαντική φυσική-κλασική φυσική σε μια κοινή σχέση;

Απάντηση

α) Οι θεωρίες μας είναι πολύ καλά ελεγμένες στις περιοχές εκείνες για τις οποίες φτιάχτηκαν. Η καθημέρα «κοιτά» τη Φύση μέσα από τα όριά της, την ερμηνεύει με συνέπεια και προφητεύει θαυμάσια τη συμπεριφορά της. Σημαντικό λοιπόν μέλημα της κάθε καινούριας θεωρίας είναι να συμπίπτει στις προβλέψεις της με εκείνες των παλιών θεωριών όταν πλησιάζει τα όριά τους. Δεν πρέπει λοιπόν να παραξενευόμαστε που υπάρχουν συμπτώσεις ανάμεσα σε διαφορετικές προσεγγίσεις. Πάρθηκε μέριμνα γι' αυτό.

β) Ποιοτικά το περιμέναμε:

Η σχετικιστική σχέση $E = pc$ ισχύει για φωτόνιο συγκεκριμένης ενέργειας E και συγκεκριμένης ορμής p . Αν όμως μαζευτεί ένα τεράστιο πλήθος από N τέτοια ακριβώς ίδια φωτόνια θα φτιάξουν ένα τεράστιο σύνολο για το οποίο θα ισχύει η σχέση $NE = Npc$, δηλαδή κάτι σαν $E_{ολ} = p_{ολ}c$.

Το σύνολο αυτό όμως είναι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα της κλασικής ηλεκτροδυναμικής. Οπότε δεν είναι και τόσο παράξενο μια σχέση που ισχύει για τη μονάδα (φωτόνιο) να ισχύει και για κάποιο τεράστιο σύνολό τους (μονοχρωματικό κύμα).

Ας το δούμε πιο αυστηρά:

Η σχέση $E = pc$ αναφέρεται σε φωτόνιο συγκεκριμένης ορμής και συγκεκριμένης ενέργειας. Βάσει των σχέσεων (5.4) το φωτόνιο αυτό αντιστοιχεί σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα συγκεκριμένου μήκους κύματος λ και συγκεκριμένης συχνότητας f . Άρα **αντιστοιχεί σε μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα** με κυματαριθμό $k=2\pi/\lambda$ και κυκλική συχνότητα $\omega=2\pi f$

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) \vec{j} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t + \theta) \vec{k} \quad (5.11)$$

Για την CED τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι ταχύτατα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά $\vec{E}$ και μαγνητικά πεδία $\vec{B}$ τα οποία μεταφέρουν ενέργεια και ορμή.

Κατά τα γνωστά,

- Η **πυκνότητα ενέργειας** ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$$U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (5.12)$$

- Η **πυκνότητα ροής ενέργειας** $\vec{S}$ (δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα εμβαδού και ανά μονάδα χρόνου) που μεταφέρουν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ενός κύματος δίνεται από το διάνυσμα *Poynting*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (5.13)$$

- Η **πυκνότητα ορμής** $\vec{P}$ πληροί τη σχέση

$$\vec{S} = \vec{P} \cdot c^2 \quad (5.14)$$

Με δεδομένο ότι η ταχύτητα του φωτός συνδέεται με τις ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού με τη σχέση

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

εφαρμόζουμε τις γενικές σχέσεις (5.12), (5.13) και (5.14) στην ειδική περίπτωση του μονοχρωματικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος (5.11) οπότε εύκολα προκύπτουν

Πυκνότητα ενέργειας μονοχρωματικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$U = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \theta) \quad (5.15)$$

Πυκνότητα ροής ενέργειας μονοχρωματικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$\vec{S} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \theta) \vec{i} \quad (5.16)$$

ή λόγω της (5.15)

$$\vec{S} = cU \vec{i} \quad (5.17)$$

Πυκνότητα ορμής μονοχρωματικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$\vec{P} = \frac{U}{c} \vec{i} \quad (5.18)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η πυκνότητα ενέργειας U και το μέτρο P της πυκνότητας ορμής που μεταφέρονται από ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$U = Pc \quad (5.19)$$

Όμως η ενέργεια και η ορμή που μπορεί να μεταφέρει ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι το άθροισμα των ενεργειών και ορμών των φωτονίων στα οποία αντιστοιχεί αυτό το συγκεκριμένο κύμα.

Αν E και p είναι η ενέργεια και η ορμή αντίστοιχα του κάθε φωτονίου η (5.19) δίνει

$$\frac{N \cdot E}{V} = \frac{N \cdot p}{V} c \Rightarrow E = pc$$

Δίνει δηλαδή την ενέργεια του ενός από τα φωτόνια που συνθέτουν το κύμα.

Ερώτηση 5

Αφού τα φωτόνια δεν έχουν μάζα, πώς αισθάνονται τη βαρύτητα;

Απάντηση

Στη σχέση (5.8) που δίνει την (σχετικιστική) ενέργεια ενός σώματος υπάρχει η ποσότητα

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (5.20)$$

την οποία ο Αϊνστάιν είχε αποκαλέσει σχετικιστική μάζα (*)

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την σχέση (5.8) ως εξής:

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (5.21)$$

Η σχέση αυτή λέει ότι μια ενέργεια E , ανεξάρτητα αν το σωματίδιο είναι κινούμενο ή ακίνητο, αντιστοιχεί σε σχετικιστική μάζα m και το αντίστροφο.

Μπορούμε λοιπόν με καλή ερμηνευτική προσέγγιση να πούμε ότι ένα φωτόνιο με ενέργεια $E_{\text{φωτ}}$ έχει σχετικιστική μάζα

$$m_{\text{φωτ}} = \frac{E_{\text{φωτ}}}{c^2} \quad (5.22)$$

με την οποία όχι μόνο καταλαβαίνει κάποιο βαρυτικό πεδίο, αλλά δημιουργεί και το δικό του βαρυτικό πεδίο.

Αν αντιστοιχήσουμε το φωτόνιο με τα μεγέθη της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας (CED) τότε

$$m_{\text{φωτ}} = \frac{hf}{c^2} \quad (5.23)$$

όπου f η συχνότητα του μονοχρωματικού κύματος στο οποίο αντιστοιχεί το φωτόνιο.

Ας μην ξεχνάμε ότι **στη σχετικότητα η βαρύτητα δεν είναι συνδεδεμένη μόνο με τη μάζα, αλλά και με την ενέργεια**. Ακραίο παράδειγμα μιας τέτοιας σύνδεσης είναι η μαύρη τρύπα. Η τρομακτική μέχρι εξαφάνισης συμπίεση την οποία υπέστησαν οι μάζες του αστεριού που κατέρρευσε, δημιούργησε τη μαύρη τρύπα. Δηλαδή έναν αφάνταστα στραβωμένο (καμπυλωμένο) χωρόχρονο, ο οποίος διατηρείται παραμορφωμένος εξαιτίας της τεράστιας ενέργειας που είναι εγκλωβισμένη μέσα του.

Η μαύρη τρύπα δεν έχει πουθενά μάζα, ούτε στην ιδιομορφία (ανωμαλία) που υπάρχει στο κέντρο της ούτε πουθενά αλλού. Όμως η ενέργεια του έντονα καμπυλωμένου χωροχρόνου είναι τεράστια και είναι αυτή που δημιουργεί τις τρομακτικές βαρυτικές έλξεις σαν να υπήρχε κάπου μάζα. Με άλλα λόγια, η τρομακτική ενέργεια του καμπυλωμένου χωροχρόνου είναι εκείνη που κρατά καμπυλωμένο τον χωρόχρονο και δημιουργεί τις τεράστιες βαρυτικές έλξεις της μαύρης τρύπας.

Ερώτηση 6

Στην κλασική ηλεκτροδυναμική (CED) τα κύματα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος ξεχωρίζονται μεταξύ τους (υπεριώδες, ορατό, ραδιοκύματα, ακτίνες Χ κλπ) είτε από το μήκος κύματός τους είτε από τη συχνότητά τους.

Για παράδειγμα αν μας πούνε ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει μήκος κύματος $\lambda = 400 \text{ nm}$, κοιτάμε τους πίνακες με τα μήκη κύματος και συμπεραίνουμε ότι είναι κόκκινο φως. Με τα φωτόνια όμως τι γίνεται; Πώς τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους; Ποιο είναι κόκκινο και ποιο είναι TV ή υπέρυθρο φωτόνιο;

(*) Όταν λέμε μάζα σωματιδίου εννοούμε σχεδόν αποκλειστικά τη μάζα ηρεμίας του η οποία είναι αναλλοίωτη σε σχετικιστικούς μετασχηματισμούς. Αν θέλουμε τη σχετικιστική μάζα αυτό δηλώνεται.

Απάντηση

Κάθε φωτόνιο είναι συνδεδεμένο με μια ορισμένη ορμή και συνεπώς μια ορισμένη ενέργεια. Με αυτές μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα φωτόνια μεταξύ τους.

Για παράδειγμα όλα τα φωτόνια που έχουν ίδια ενέργεια (και προφανώς ίδιο μέτρο ορμής) είναι «ίδια» μεταξύ τους με την έννοια ότι ανήκουν στην ίδια θέση του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Μπορεί βέβαια να διαφέρουν μεταξύ τους σε κάποια άλλα «πραγματάκια» (όπως π.χ. η πόλωση), αλλά κατατάσσονται στην ίδια θέση του φάσματος.

Αν λοιπόν μας πούνε ότι ένα φωτόνιο έχει ενέργεια 3,1 eV, κοιτάμε τους πίνακες με τις ενέργειες, όπως π.χ. εκείνον της σελίδας 68, και συμπεραίνουμε ότι είναι μωβ. Το φωτόνιο με ενέργεια 1,63eV είναι κόκκινο, το φωτόνιο 0,1 eV ανήκει στην υπέρυθη περιοχή κλπ.

Το πρόβλημα είναι ότι οι πίνακες με μέτρα ορμής και ενέργειες φωτονίων είναι πιο σπάνιοι από εκείνους με μήκη κύματος ή συχνότητες ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Άρα η «δυσκολία» στη διάκριση μεταξύ των φωτονίων είναι θέμα συνήθειας και κυρίως του τι κυκλοφορεί στην αγορά. Μακάρι να διαθέταμε πίνακες με ενέργειες ή ορμές φωτονίων στην ίδια αφθονία με τους πίνακες συχνοτήτων και μηκών κύματος ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Αλήθεια δεν είναι άξιο προβληματισμού το γεγονός ότι επιλέγουμε για τους χειρισμούς των φωτονίων το μέτρο (m) ή το χερτζ (HZ) και όχι το ηλεκτρονιοβόλτ (eV); Το eV θα ήταν, αν όχι πιο σωστό, τουλάχιστον πιο διαφανές.

Ερώτηση 7

Λέμε «το φορτίο είναι κβαντισμένο» και με την έκφραση αυτή καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει μια ελάχιστη τιμή φορτίου και όλα τα άλλα φορτία είναι ακέραια πολλαπλάσια αυτής της τιμής.

Αλλά τι κβάντο είναι το φωτόνιο αφού η ενέργειά του, όπως βλέπουμε στη σελίδα 68, μπορεί να πάρει οιαδήποτε τιμή και άρα να έχουμε ό,τι φωτόνιο θέλουμε;

Ποιανής ενέργειας είναι πολλαπλάσια οι ενέργειες των φωτονίων;

Απάντηση

Καταρχήν άλλο η έκφραση «κβαντισμένο μέγεθος» και άλλο η λέξη «κβάντο». Επίσης η φράση «κβαντισμένο μέγεθος A» δε σημαίνει ότι υποχρεωτικά υπάρχει μια ελάχιστη τιμή για το A κι όλες οι άλλες τιμές του είναι ακέραια πολλαπλάσια αυτής της τιμής.

Κβαντισμένο μέγεθος A κάποιου συστήματος σημαίνει ότι οι τιμές του A στο συγκεκριμένο σύστημα είναι συγκεκριμένα διακριτές. Σε άλλα φυσικά συστήματα το ίδιο μέγεθος A μπορεί να έχει άλλες διακριτές τιμές ή και συνεχές φάσμα τιμών. Δηλαδή η έννοια «**κβαντισμένο μέγεθος**» **συνδέεται πάντα με το φυσικό σύστημα που εξετάζουμε.**

Όσον δε αφορά στην έννοια του κβάντου αυτή συνδέεται και με την κβάντωση του πεδίου στο οποίο ανήκει.

Αλλά ας μην πάμε σε πράγματα που θα μας εκτροχιάσουν από τα φωτόνια.

.....

Το φάσμα λοιπόν της ενέργειας των φωτονίων της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι συνεχές με την έννοια ότι στη Φύση μπορούν να «δημιουργηθούν» συστήματα (είτε από τον άνθρωπο είτε με φυσικό τρόπο) που θεωρητικά να μπορούν να παράγουν φωτόνια όλων των ενεργειών.

Όμως σε μια συγκεκριμένη φυσική διαδικασία ή σε κάποιο συγκεκριμένο φυσικό σύστημα η ενέργεια μπορεί να εκπέμπεται ή να απορροφάται με συγκεκριμένα ποσά, δηλαδή με συγκεκριμένα φωτόνια. Το κάθε σύστημα δηλαδή «διαχειρίζεται» την (ηλεκτρομαγνητική) ενέργειά του με συγκεκριμένα φωτόνια, αυτά που του επιτρέπει η κβαντική δομή του. Άλλα φυσικά συστήματα διαχειρίζονται την ενέργειά τους με διαφορετικά φωτόνια. Άρα στα φωτόνια η έννοια της κβάντωσης γίνεται αντιληπτή ως κβάντωση της ενέργειας (διακριτές τιμές ενέργειας) του φυσικού συστήματος από το οποίο προέρχονται.

Δεν είναι η ενέργεια των φωτονίων κβαντισμένη. Κβαντισμένη είναι η ενέργεια του συστήματος με το οποίο έχουν σχέση και συνεπώς κβαντισμένος είναι ο τρόπος που το σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια.

Αν ο τρόπος που το σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια είναι συνεχής, τα φωτόνια που θα εκπέμπει ή θα απορροφά θα καλύπτουν συνεχές φάσμα ενεργειών. Αν ο τρόπος είναι διακριτός, τα φωτόνια θα έχουν ενέργεια με διακριτές τιμές.

Και μη ρωτήσετε αν υπάρχει φωτόνιο με ενέργεια $\pi/2$ eV γιατί θα σας απαντήσουν να ρωτήσετε τη Φύση αν έχει κατασκευάσει ή επιτρέπει να κατασκευασθεί σύστημα που να «διαχειρίζεται» τέτοια φωτόνια (τέτοια ποσά ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας) .

Αν η Φύση σας πει ναι, τότε υπάρχουν.

Με αυτή την έννοια μιλήσαμε προηγουμένως για συνεχές ορατό φάσμα. Όχι με τη μαθηματική έννοια του όρου, όπου σε οποιοδήποτε διάστημα, όσοδήποτε μικρό, πάντα υπάρχουν πάντα άπειροι αριθμοί. Στη Φύση υπάρχουν εκείνα τα φωτόνια, τα οποία δημιουργούν τα φυσικά συστήματα που υπάρχουν στη Φύση.

Και κάτι τελευταίο:

Στην CED λέμε ότι στο ορατό τμήμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας υπάρχει μια «συνεχής» κατανομή μηκών κύματος και εννοούμε ότι υπάρχουν κύματα με μήκος κύματος που παίρνει «όλες» τις τιμές από 400nm έως 760nm.

Ως αντίστοιχη έκφραση στην QED, λέμε ότι στο ορατό τμήμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας υπάρχει μια «συνεχής» κατανομή φωτονίων και εννοούμε ότι υπάρχουν φωτόνια με ενέργεια που παίρνει «όλες» τις τιμές από 3,1eV έως 1,63eV.

Και ενώ η CED κυριολεκτεί με τη λέξη «όλες» ή τη λέξη «συνεχής», η QED τις θέτει με την έννοια που περιγράψαμε προηγουμένως.

Ερώτηση 8

Τα φωτόνια υπάρχουν κάπου και ξεπηδούν; Αφού τα φωτόνια είναι ενέργεια και η ενέργεια διατηρείται δεν πρέπει και ο αριθμός των φωτονίων να διατηρείται;

Απάντηση

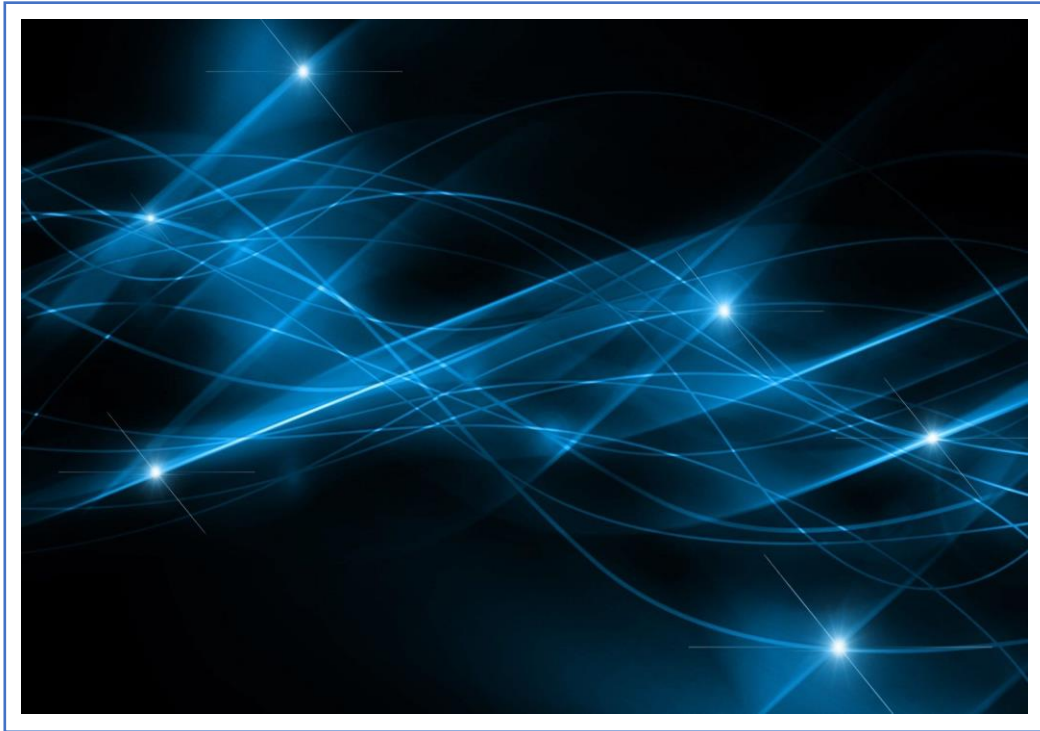
Τα φωτόνια δεν βρίσκονται κάπου και περιμένουν τότε θα ξεπηδήσουν. Δεν υπάρχουν καν μέχρι διάφορες διαδικασίες να τα παράγουν από την ενέργεια που «διαχειρίζονται» αυτές οι διαδικασίες.

Για παράδειγμα, όταν ένα άτομο αποδιεγείρεται το ηλεκτρόνιο δεν έχει μέσα του ένα φωτόνιο και ξαφνικά το πετάει έξω. Απλώς η ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται με τη μορφή φωτονίου. Το φωτόνιο γεννιέται εκείνη τη στιγμή και «ζει» μέχρι να απορροφηθεί.

Με την ευκολία που γεννιούνται τα φωτόνια, με την ίδια και χάνονται (απορροφώνται). Όπως καταλαβαίνουμε λοιπόν ο αριθμός των φωτονίων σαφώς και δεν διατηρείται. Εκείνο που διατηρείται είναι η ενέργεια, μορφή της οποίας είναι και η μάζα.

Υπάρχουν κι άλλες διαδικασίες που δίνουν πλάσματα τα οποία δεν προϋπήρχαν. Τα γεννούν εκείνη τη στιγμή. Για παράδειγμα στην β και γ διάσπαση τα ηλεκτρόνια και τα ποζιτρόνια και τα φωτόνια γεννιούνται εκείνη τη στιγμή που συμβαίνει η διάσπαση. Η ενέργεια μπορεί και γεννά πλάσματα τα οποία δεν χρειάζεται να προϋπάρχουν.

Ας σημειωθεί όμως ότι στην ακτινοβολία α τα σωματίδια α (πυρήνες ηλίου) προϋπήρχαν στον πυρήνα και πετάχτηκαν έξω.



5.5 Μια κουβέντα με ένα λουλούδι

*(έγινε πριν τρία τέσσερα χρόνια,
προς το τέλος της Άνοιξης)*

«.....

- Γεια σου Άνθρωπε
- Γεια σου Παπαρούνα
- Ξέρεις τι σκεφτόμουνα το απόγευμα που έβλεπα το βουνό απέναντι;
- Τι σκεφτόσουνα Κοκκινούλι;

- Ο κύριος, ίσως και μοναδικός, λόγος που βλέπουμε τα πράγματα γύρω μας είναι γιατί τα φωτόνια, τα κβαντικά πλασματάκια του φωτός με τη συγκεκριμένη συμπεριφορά που λες και συ, δεν αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Δεν νοιάζονται το ένα φωτόνιο για το άλλο, γιατί αλλιώς δεν θα βλέπαμε τίποτε...

- Γιατί Παπαρούνα μου;

- Να σου πω ένα παράδειγμα.

Τα φωτόνια (φως) από τον Ήλιο, από το Φεγγάρι κ.λπ πέφτουν πάνω στο βουνό και αλληλοεπιδρούν με αυτό (απορροφούνται, επανεκπέμπονται κλπ). Μετά από όλα αυτά ένα μέρος τους τη «γλιτώνει», δραπετεύει από το βουνό και κουβαλώντας πληροφορίες από αυτό έρχεται στα μάτια μας, οπότε βλέπουμε τις πληροφορίες που αποκόμισαν από το βουνό τα φωτόνια. Τελικά βλέπουμε το βουνό.

- Κι αν βάλω ένα παχύ χαρτόνι ανάμεσα σε μας και το βουνό;

- Τα φωτόνια που ήρθαν από τον Ήλιο και που δραπετεύσαν από το βουνό, πέφτουν αναγκαστικά πάνω στο χαρτόνι και αρχίζουν αλληλεπιδράσεις με τα άτομα (με το υλικό) του χαρτονιού. Και είναι τόσες πολλές αυτές οι αλληλεπιδράσεις που τελικά ή χάνονται στην «πάλη» τους με το χαρτόνι ή δραπετεύουν (σκεδάζονται) προς διάφορες άλλες κατευθύνσεις που είναι όμως πίσω από το χαρτόνι.

Τελικά δεν καταφέρνει κανένα φωτόνιο να περάσει μέσα από το χαρτόνι και να φτάσει στα μάτια μας με πληροφορίες από το βουνό και έτσι δεν βλέπουμε το βουνό

- Κι αν ρε Παπαρούνα μου βάλουμε την ατμόσφαιρα ανάμεσα σε μας και το βουνό;

- Ο αέρας είναι διαφανής. Δηλαδή οι αλληλεπιδράσεις των φωτονίων με τον αέρα είναι πολύ πιο λίγες και λιγότερο «καταστροφικές» από εκείνες με το χαρτόνι. Τεράστιο πλήθος φωτονίων που δραπετεύσε από το βουνό καταφέρνει (παρά τις αλληλεπιδράσεις του) να περάσει μέσα από τον αέρα, να φτάσει σε μας με πληροφορίες για το βουνό και έτσι να δούμε το βουνό.

Εξαρτάται όμως και τι ατμόσφαιρα βάζεις... Μπίχλα ή πεντακάθαρη...

- Κι αν διώξουμε τον αέρα και βάλουμε το κενό όπως π.χ. είναι πάνω στη Σελήνη;

- Τότε θα βλέπουμε το βουνό σχεδόν να λάμπει...

- Κι αν τα φωτόνια αλληλεπιδρούσαν μεταξύ τους τι θα συνέβαινε, Παπαρούνα;

- Τότε κανένα φωτόνιο δεν θα απέφευγε αυτό το χάος των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων, δεν θα ήταν ικανό να κουβαλήσει καμιά πληροφορία από κανένα αντικείμενο γύρω μας και θα ήταν αδύνατο να δούμε οτιδήποτε γύρω μας. Τα φωτόνια θα ήταν εντελώς χαμένα στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Οι πληροφορίες από τα αντικείμενα θα χάνονταν σχεδόν αμέσως, επειδή οι αλληλεπιδράσεις θα ήταν απανωτές.

Όλα θα έμοιαζαν σαν να είχαμε γύρω μας μια πυκνότερη ομίχλη και ακόμη χειρότερα. Δεν θα έφτανε το φως με πληροφορίες στα μάτια μας ούτε καν από τον Ήλιο. Θα ήταν όλα ένα χάος αλληλεπιδράσεων μεταξύ των φωτονίων. Ένα ομιχλώδες πράγμα.

- Δηλαδή βλέπουμε τα αστέρια να λάμπουν πάνω μας, λόγω της ιδιότητας των φωτονίων να μην αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους;

- Ναι, Άνθρωπε... Λόγω αυτής της ιδιότητας του φωτός βλέπουμε γύρω μας. Κι όταν τα γιγαντιαία τηλεσκόπιά μας κοιτάνε τον ουρανό, δηλαδή όταν κοιτάνε πίσω στον χρόνο, μπορούν και βλέπουν το Σύμπαν ακόμη και μωρό 380000 χρονών, εξαιτίας αυτής της ιδιότητας των φωτονίων: Αλληλοεπιδρούν με φορτισμένα σωματίδια και με άλλα πράγματα, αλλά όχι μεταξύ τους



- Δηλαδή δεν μπορούμε να δούμε το Σύμπαν πιο μικρό από 380000 χρονών περίπου όχι γιατί τα φωτόνια αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους αλλά γιατί αλληλοεπιδρούν με άλλα υλικά του νεογέννητου Σύμπαντος;

- Ναι. Τα φωτόνια, από τη στιγμή μηδέν που γεννήθηκε το Σύμπαν μέχρι που έγινε 380000 χρονών (σήμερα είναι 13,72 δισεκατομμυρίων ετών περίπου), αλληλοεπιδρούσαν με τα αρχέγονα υλικά του Σύμπαντος και δεν μπορούσαν να τους ξεφύγουν λόγω των απανωτών αλληλεπιδράσεων στα οποία ήταν αναγκασμένα να συμμετάσχουν.

Όταν όμως το Σύμπαν μεγάλωσε λίγο και έγινε 380000 ετών και κατέβηκε η θερμοκρασία του, τα πράγματα γύρω άλλαξαν, τα πρωτόνια άρπαξαν τα ηλεκτρόνια και τα φωτόνια βρήκαν την ευκαιρία να δραπετεύσουν και φτάνουν σε μας σήμερα δείχνοντάς μας την εικόνα του Σύμπαντος την στιγμή που κατάφεραν να δραπετεύσουν.

- Και ποια πλάσματα αντιστοιχα των φωτονίων, δηλαδή ποιοι φορείς θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και δεν θα βλέπαμε τίποτε, αν περιμέναμε να δούμε κάτι από αυτά;

- Τα γκλουόνια (gluons). Εκεί θα γινότανε χάος... Είναι μποζόνια, φορείς της πιο ισχυρής δύναμης που υπάρχει στην Φύση, αλλά αλληλεπιδρούν έντονα μεταξύ τους. Ευτυχώς είναι φυλακισμένα μέσα στα πρωτόνια και τα νετρόνια και τη γλιτώνουμε...

- Άρα βλέπουμε τα αντικείμενα γύρω μας γιατί τα φωτόνια, που είναι επίσης μποζόνια, όπως τα γκλουόνια, δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Και γιατί τα φωτόνια και τα γκλούονς είναι μποζόνια Παπαρούνα;

- Αντί να σε νοιάζει που είμαι κόκκινη με πράσινο μίσχο και που τα λουλούδια δίπλα μας είναι κυρίως κίτρινα, τα μποζόνια σου μαράνανε; Άλλη φορά αυτά...

- Μα το φως δεν έχει χρώμα παρά μόνο ενέργειες φωτονίων. Τα χρώματα είναι δώρο της ζωής στη Φύση. Των πλασμάτων στον Κόσμο. Η ομορφιά των χρωμάτων είναι δώρο και της δικιά μας παρουσία στη Φύση για να γίνουν όλα πιο όμορφα. Εμείς κάνουμε το φως να αποκτά χρώμα. Αν λείψουμε η Γη θα μείνει χωρίς ηλιοβασίλεμα και χωρίς ουράνιο τόξο και χωρίς μπλε ουρανό και χωρίς ομορφιά στα λουλούδια της που θα φυτρώνουν χωρίς χάρη. Χωρίς εμάς η Γη θα είναι γεμάτη μονότονα φωτόνια με νούμερα 624,7 , 1235,6 , 543,0..., αλλά όχι ομορφιά. Τα ουράνια τόξα θα υπάρχουν με νανομετρ. Η παρουσία μας στη Φύση είναι τόσο ακριβή όσο δε φανταζόμαστε.

5.6 Η ιερή διαδρομή προς μια καινούρια λογική

Στην κλασική Φυσική έχουμε σωματίδια και κύματα με εντελώς διαφορετικούς ρόλους. Τα κλασικά σωματίδια έχουν ακριβείς τροχιές και τα φυσικά τους μεγέθη (ταχύτητα, ορμή, ενέργεια, στροφορμή, δύναμη, επιτάχυνση κλπ) έχουν συγκεκριμένες τιμές, οι οποίες μπορούν όλες θεωρητικά να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια.

Τα κύματα έχουν να επιδείξουν ανακλάσεις, διαθλάσεις, περιθλάσεις, συμβολές, μήκη κύματος, εντάσεις, χειροπιαστές διαδόσεις ενέργειας, κυματοπακέτα, πλάτη, συχνότητες, φασικές ταχύτητες κλπ. Όλα περιγράψιμα, προβλέψιμα, σχετικά απλά και μετρήσιμα.

Και τα κλασικά σωματίδια και τα κύματα καλύπτονται μια χαρά από τους νόμους του Νεύτωνα, του Μάξγουελ, την κυματική θεωρία, την κλασική Φυσική. Η συμπεριφορά τους βρίσκεται σε συμφωνία με όσα ξέρουμε και με όσα βλέπουμε, η ακρίβεια στους υπολογισμούς τους καλύπτει τις απαιτήσεις μας και οι πάμπολλες εφαρμογές τους γίνονται περισσότερες κάθε μέρα. Εξηγούμε και προφητεύουμε πάρα πολλά της καθημερινής μας ζωής με συνέπεια, με αξιοπρέπεια και ακρίβεια γλώσσας, με πεντακάθαρους φυσικούς όρους.

Όμως όταν ετοιμαζόμαστε να «βουτήξουμε» στον ατομικό και υποατομικό κόσμο, πρέπει να προετοιμαστούμε ότι πάμε να κοιτάξουμε τη Φύση από πιο κοντά στις δομές της.

Κατά την ιερή αυτή προσέγγιση θα μπορούμε σε καινούριους ναούς, θα συναντήσουμε άλλες ιερότητες, θα μας πλημμυρίσουν πρωτόγνωρες «εικόνες» τις οποίες μόνο το μυαλό μπορεί να δει. Θα αντιμετωπίσουμε συμπεριφορές που δεν έχουμε ποτέ «ξανααντικρύσει», συμπεριφορές που δεν θα καταλαβαίνουμε και που θα βάλουν σε αμφισβήτηση την παλιά λογική μας, την τόσο συνηθισμένη.

Για το «προσκύνημα» αυτό πρέπει να διώξουμε από πάνω μας εμπειρίες συνδεδεμένες με τις έννοιες κλασικά σωματίδια και κύματα. Οι τροχιές, οι απόλυτες ακρίβειες, τα μήκη κύματος, οι συχνότητες και η διδασκαλία με χειροπιαστές περιγραφές και με παραδείγματα του τύπου «αυτό μοιάζει σαν...» δεν υφίστανται εκεί κάτω.

Εδώ πάνω τα πράγματα είναι απλά, συνηθισμένα και η διδασκαλία μας σχετικά εύκολη γιατί μπορούμε να την υποστηρίξουμε με εύκολες παρομοιώσεις.

Λέμε για παράδειγμα, ο πλανήτης είναι κάτι **σαν** ένα μπαλάκι που γυρίζει γύρω από τον εαυτό του και συγχρόνως περιφέρεται γύρω από ένα άλλο μεγαλύτερο μπαλάκι που είναι ο ήλιος, ο οποίος επίσης γυρίζει γύρω από τον εαυτό του. Και αυτό το τόσο λίγο φτάνει για να σχηματίσει ο οποιοσδήποτε μια υποφερτή εικόνα του ηλιακού μας συστήματος.

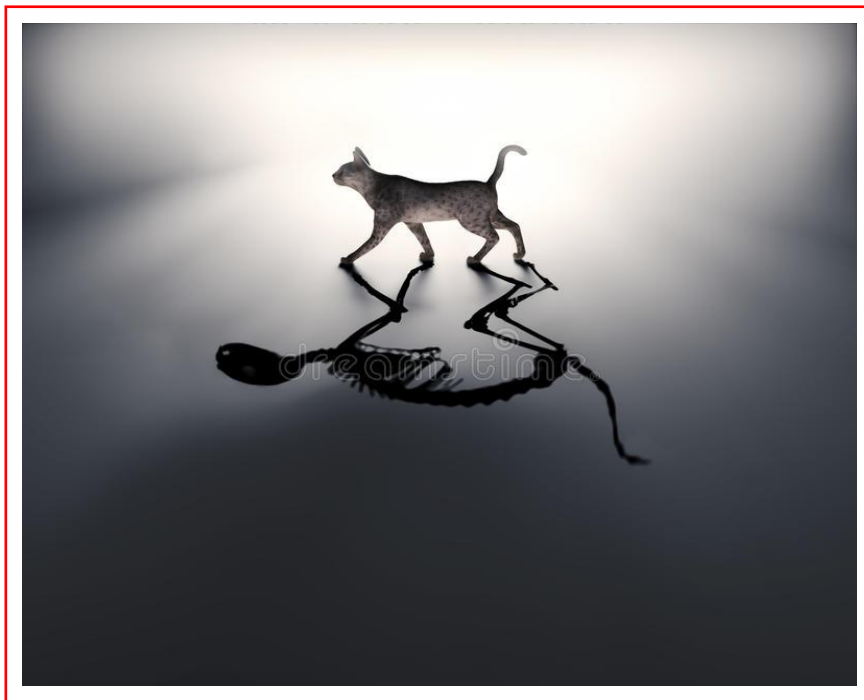
Μιλάμε για κύματα και φέρνουμε παράδειγμα τα κύματα της θάλασσας με τα όρη και τις κοιλάδες τους και δείχνουμε το μήκος κύματος και την συχνότητά τους.

Εκεί «κάτω» όμως, στον ατομικό και υποατομικό κόσμο, πρέπει να εγκαταλείψουμε τις τροχιές, πρέπει να εγκαταλείψουμε τα μήκη κύματος, πρέπει να αφήσουμε πίσω μας τα

παραδείγματα του τύπου «...είναι σαν...».

Εκεί κάτω δεν υπάρχει τίποτε που να μπορεί να αποδοθεί με παρομοίωση του τύπου «...είναι σαν...». Τα πράγματα είναι δύσκολα, διαφορετικά, απίστευτα! Δεν υπάρχουν τροχιές, δεν υπάρχουν μπαλάκια, δεν γυρίζουν πράγματα γύρω από τον εαυτό τους και οι οντότητες αν δεν αλληλοεπιδρούν δεν υπάρχουν. Εκεί κάτω υπάρχουν οι αβεβαιότητες, τα σπιν, οι πιθανότητες, οι κβαντικές ενέργειες με τα φευγαλέα φωτόνια, οι κβαντικές στροφορμές που τα διανύσματά τους έχουν αδιανόητη συμπεριφορά. Εκεί «κάτω» η λέξη σωματίδιο δεν έχει καμιά απολύτως σχέση με την κλασική έννοια του όρου.

Εκεί «κάτω» υπάρχει ένας κόσμος κβαντικός, που απαιτεί άλλη ματιά και καινούρια σκέψη με πιο δυνατές και πιο υποσχόμενες λέξεις. Εκεί «κάτω» υπάρχει άλλη λάμψη και σαν λάμψη του καινούριου πρέπει να μεταφερθεί στα μάτια μας.



Ενότητα 6

Εφαρμογές των αρχών αβεβαιότητας (*)

6.1 Η αβεβαιότητα στα ασταθή συστήματα

Έστω ένα ασταθές σύστημα (ένας ραδιενεργός πυρήνας, ένα διηγερμένο άτομο, ένα βραχύβιο στοιχειώδες σωματίδιο κ.λπ.) για το οποίο δεν ξέρουμε λεπτομέρειες, ώστε να στήσουμε εξισώσεις και να μπούμε σε ακριβείς υπολογισμούς. Αλλά και να ξέραμε δεν είναι εύκολη υπόθεση, χώρια που η εξίσωση του Schrödinger έχει όρια εφαρμογής.

Παρόλα αυτά όμως μπορούμε να κάνουμε ικανοποιητικές προβλέψεις χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αβεβαιότητας στην προσεγγιστική τους μορφή:

Επειδή το σύστημα είναι ασταθές έχει χαρακτηριστικό χρόνο μεταβολής(**), υπάρχει δηλαδή χρονική διάρκεια τ μετά την οποία το σύστημα θα παρουσιάζει αξιόλογη μεταβολή. Για παράδειγμα, ο ραδιενεργός πυρήνας θα εκπέμψει, η διηγερμένη κατάσταση θα αποδιεγερθεί, το βραχύβιο σωματίδιο θα «σπάσει», το σύστημα θα εμφανίσει μια αξιοσημείωτη μεταβολή έστω κι αν η μεταβολή του είναι περιοδική κ.λπ.

Αφού λοιπόν ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος είναι τ , η ενέργεια της κατάστασης στην οποία βρίσκεται δε μπορεί να έχει μία συγκεκριμένη τιμή, αλλά ένα φάσμα ενεργειών με εύρος (αβεβαιότητα)

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$$

(*) Όπως μέχρι τώρα έτσι και στα επόμενα δε θα χρησιμοποιηθούν για υποατομικά σωματίδια (ηλεκτρόνια, νουκλεόνια κλπ) οι χωρίς κανένα νόημα σχέσεις των υλικών κυμάτων $p=h/\lambda$ και $E=hf$. Αντιθέτως οι σχέσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά και μόνο για τα φωτόνια για τα οποία έχουν νόημα (σελ. 67)

(**) Ο χαρακτηριστικός χρόνος τ ονομάζεται και μέση ζωή ή μέσος χρόνος ζωής του ασταθούς συστήματος (σελ. 44). Όταν δεν έχουμε τη δυνατότητα να τον υπολογίσουμε θεωρητικά, τον προσδιορίζουμε πειραματικά ως μέση τιμή μεγάλου δείγματος πανομοιότυπων ασταθών συστημάτων.

6.2 Πλάτος ενεργειακών σταθμών

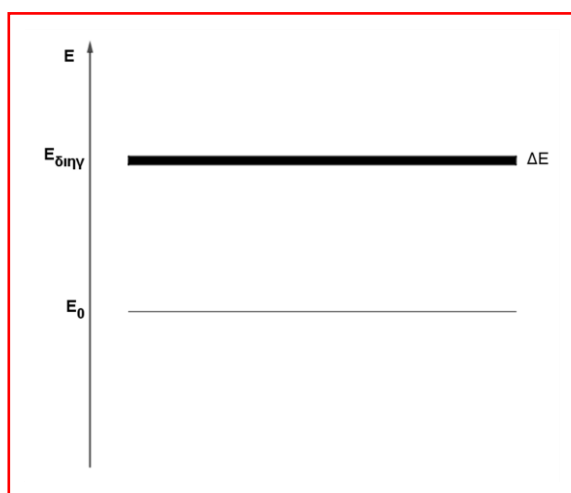
Σε ένα διηγεμένο άτομο, κάποιο ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε υψηλή ενεργειακή στάθμη πέφτει στη θεμελιώδη εκπέμποντας φωτόνιο.

Το άτομο αυτό ήταν ένα **ασταθές σύστημα**. Συνεπώς η ενέργεια της διηγεμένης κατάστασης στην οποία βρισκόταν **αποκλείεται** να έχει μια απολύτως συγκεκριμένη τιμή, αλλά θα παρουσιάζει ένα φάσμα τιμών με εύρος (αβεβαιότητα) ΔE γύρω από κάποια «κεντρική τιμή» $E_{\text{διηγ}}$.

Αν τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής του ατόμου στη διηγεμένη κατάσταση, τότε η ενεργειακή διαπλάτυνση αυτής της κατάστασης θα είναι

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$$

Αντιθέτως η θεμελιώδης κατάσταση ενός ατόμου είναι σταθερή, οπότε ο χαρακτηριστικός χρόνος ζωής της τείνει στο άπειρο ($\tau \rightarrow \infty$). Άρα η αβεβαιότητα της θεμελιώδους ενεργειακής στάθμης είναι $\Delta E = 0$ και επομένως η ενέργειά της έχει συγκεκριμένη τιμή και διαπλάτυνση μηδέν.



Σχήμα 6.1: Οι διηγεμένες καταστάσεις ενός ατόμου και γενικότερα ενός συστήματος παρουσιάζουν πάντα ενεργειακή διαπλάτυνση. Η θεμελιώδης όχι.

Συμπέρασμα

Αν τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής τ ενός συστήματος σε μια διηγεμένη κατάσταση, τότε η ενεργειακή της διαπλάτυνση (το εύρος της) είναι $\Delta E \approx \hbar/\tau$. Όσο μικρότερος είναι ο μέσος χρόνος ζωής της διηγεμένης κατάστασης τόσο μεγαλύτερο είναι το ενεργειακό της εύρος.

6.3 Σχέσεις αβεβαιότητας στα φωτόνια

Ας φανταστούμε κάποιες εφαρμογές των σχέσεων αβεβαιότητας στα φωτόνια

α) Ρίχνουμε αμυδρό φως σε ένα πολύ στενό διάφραγμα, που διατηρείται ανοικτό για μικρό χρονικό διάστημα Δt τέτοιο ώστε να προλαβαίνει να περάσει μέσα από αυτό έστω κι ένα μόνο φωτόνιο.

Ισχύουν οι σχέσεις

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

όπου τις αβεβαιότητες Δx , Δy και Δz τις καθορίζουν οι διαστάσεις του διαφράγματος.

Αφού το διάφραγμα είναι πολύ στενό και κλείνει γρήγορα, ο χωροχρονικός εντοπισμός των φωτονίων είναι μεγάλος και συνεπώς οι αβεβαιότητες ενέργειας και ορμής τους μετά την δίοδο από το διάφραγμα θα είναι επίσης μεγάλες.

β) Στο **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** απορροφάται φωτόνιο από ηλεκτρόνιο δεσμευμένο γενικά σε κάποιο σύστημα (μεταλλικό ή μη μεταλλικό στερεό, υγρό, αέριο) και το ηλεκτρόνιο αποδεσμεύεται (εκπέμπεται).

Το γινόμενο της αβεβαιότητας ΔE της ενέργειας του φωτονίου που απορροφάται από το ηλεκτρόνιο του συστήματος επί τον χρόνο τ που απαιτείται για να γίνει η απορρόφηση φωτονίου και η εξαγωγή του ηλεκτρονίου είναι τουλάχιστον της τάξης του $\hbar$

γ) Όπως είδαμε στην προηγούμενη εφαρμογή, αν τ είναι ο μέσος χρόνος ζωής ενός συστήματος σε διηγερμένη κατάσταση τότε η ενεργειακή διαπλάτυνση αυτής της κατάστασης είναι $\Delta E \approx \hbar/\tau$.

Λόγω διατήρησης της ενέργειας το εύρος του φάσματος των ενεργειών των φωτονίων που εκπέμπονται κατά την αποδιέγερση του συστήματος είναι επίσης $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$

Συνεπώς

- Η φασματική γραμμή που θα δώσουν τα παραπάνω φωτόνια θα έχει εύρος ΔE .
- Οι φασματικές γραμμές που εκπέμπονται από βραχύβιες διηγερμένες καταστάσεις είναι πλατύτερες από εκείνες που εκπέμπονται από μακροβιότερες.
- Τα πλάτη των φασματικών γραμμών βρίσκονται πάντα σε συμφωνία με τις αρχές αβεβαιότητας

6.4 «Σφάλμα μέτρησης» της ενέργειας διηγερμένης κατάστασης ατόμου. Η αρχή αβεβαιότητας στο πείραμα Frank-Hertz

Η ακρίβεια ΔE σε μια ενεργειακή μέτρηση συνδέεται με τον χρόνο τ που απαιτείται για τη μέτρηση, με τη γνωστή μας σχέση αβεβαιότητας.

Παράδειγμα

Για τη μέτρηση της ενέργειας της πρώτης διηγερμένης κατάστασης του ατόμου του υδρογόνου, το βομβαρδίζουμε με ηλεκτρόνια και μετράμε την απώλεια ενέργειάς τους καθώς συγκρούονται ανελαστικά με το άτομο του υδρογόνου^(*).

Η διάρκεια της «μέτρησης» είναι τουλάχιστον ίση με τον χρόνο «σύγκρουσης», δηλαδή με

^(*) Προφανώς ο στόχος δεν είναι ένα μόνο άτομο, αλλά ένα μεγάλο πλήθος ατόμων υδρογόνου στην ίδια θεμελιώδη κατάσταση

το χρόνο τ που χρειάζεται το προσπίπτον ηλεκτρόνιο να περάσει από τον χώρο όπου βρίσκεται το άτομο του υδρογόνου. Ουσιαστικά είναι ο χρόνος που διαρκεί η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-βλήματος και ατόμου-στόχου.

Το ενδογενές «σφάλμα της μέτρησης» είναι τουλάχιστον ίσο με την αβεβαιότητα ΔE στην απώλεια ενέργειας των προσπιπτόντων ηλεκτρονίων και ισχύει $\tau \cdot \Delta E \approx \hbar$

Σε συνδυασμό με την εφαρμογή 2 λέμε ότι η μέτρηση της ενέργειας της πρώτης διηγεμένης κατάστασης παρουσιάζει αβεβαιότητα ΔE («σφάλμα μέτρησης»; Δε νομίζω.)

.....

Το πείραμα Frank-Hertz έγινε αρχικά βομβαρδίζοντας άτομα υδραργύρου με ηλεκτρόνια. Σε μια παραλλαγή του πειράματος τα ηλεκτρόνια συγκρούονταν με άτομα υδρογόνου και έχαναν ξαφνικά ενέργεια, προφανώς όταν γίνονταν ικανά να διεγείρουν τα άτομα στην πρώτη τους διηγεμένη κατάσταση.

Οι διακυμάνσεις στην ενέργεια που έχαναν τα ηλεκτρόνια ήταν της τάξεως του 10^{-7} eV.

Άρα

- Η 1η διηγεμένη κατάσταση του υδρογόνου παρουσιάζει μια ενεργειακή διαπλάτυνση της τάξης του 10^{-7} eV
- Ο μέσος χρόνος ζωής της 1ης διηγεμένης κατάστασης του ατόμου υδρογόνου είναι

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \approx \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{10^{-7} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 6,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

6.5 Η υπέρθεση κβαντικών καταστάσεων προκαλεί εξέλιξη

Έστω ότι ένα σωματίδιο με συγκεκριμένη ενέργεια E βρίσκεται σε κάποιο πεδίο δυνάμεων. Η κατάσταση του περιγράφεται από κυματοσυνάρτηση της μορφής

$$\psi_E(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας της θέσης του σωματιδίου είναι

$$|\psi_E(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$$

και συνεπώς είναι **ανεξάρτητη του χρόνου**.

Για το σωματίδιο ισχύει $\Delta E = 0$ και συνεπώς ο χαρακτηριστικός χρόνος εξέλιξής του μέσα στο πεδίο είναι $\tau \rightarrow \infty$. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι οι φυσικές του ιδιότητες είναι χρονοανεξάρτητες, το σύστημα είναι σε σταθερή κατάσταση και άρα το αποτέλεσμα οποιασδήποτε μέτρησης αφορά στο σωματίδιο δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή που θα γίνει η μέτρηση.

.....

Έστω ότι το προηγούμενο σύστημα (σωματίδιο σε πεδίο) βρίσκεται σε υπέρθεση δύο σταθερών κβαντικών καταστάσεων ψ_{E_1} και ψ_{E_2} των οποίων οι ενέργειες E_1 και E_2 έχουν πιθανότητα εμφάνισης α_1 και α_2 αντίστοιχα.

Τότε η κατάσταση του σωματιδίου περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x, t) = C_1 \psi_1(x) \cdot e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + C_2 \psi_2(x) \cdot e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$$

όπου $|C_1|^2 = \alpha_1$ και $|C_2|^2 = \alpha_2$

Χωρίς να μπούμε σε θεωρητικούς υπολογισμούς, μπορούμε να προβλέψουμε:

- Αφού υπάρχει αβεβαιότητα ενέργειας της τάξης του $\Delta E \approx |E_1 - E_2|$, οι ιδιότητες του συστήματος θα αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Το σύστημα δεν είναι σε σταθερή κατάσταση, αλλά εξελίσσεται.
Ο χαρακτηριστικός χρόνος τ μεταβολής του συστήματος είναι της τάξης

$$\tau \approx \frac{\hbar}{|E_1 - E_2|}$$

- Η στατιστική κατανομή των αποτελεσμάτων κάποιας μέτρησης του συστήματος σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t' και t θα είναι πρακτικώς ίδια αν

$$|t' - t| < \tau$$

Συνεπώς για να υπάρξει αξιοσημείωτη μεταβολή στις φυσικές ιδιότητες του συστήματος θα πρέπει οι μετρήσεις να διαρκέσουν χρονικό διάστημα

$$\Delta t \approx \tau \Rightarrow \Delta t \approx \frac{\hbar}{|E_1 - E_2|}$$

Οι παραπάνω συλλογισμοί ισχύουν και στη γενικότερη περίπτωση όπου το σωματίδιο είναι σε υπέρθεση περισσότερων των δύο σταθερών καταστάσεων διαφόρων ενεργειών.

Παρατηρήσεις

α) Όπως είδαμε στη σελίδα 39 η αβεβαιότητα ΔA ενός φυσικού μεγέθους A δεν μπορεί να ξεπεράσει το μισό της απόστασης των δύο ακραίων πιθανών του τιμών

$$\Delta A \leq \frac{A_{max} - A_{min}}{2}$$

Άρα στην προκείμενη περίπτωση της υπέρθεσης των δύο σταθερών καταστάσεων η μέγιστη τιμή της αβεβαιότητας της ενέργειας είναι

$$\Delta E_{max} = \frac{|E_1 - E_2|}{2}$$

Η μέγιστη αυτή τιμή ΔE_{max} αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι δύο καταστάσεις ψ_{E_1} και ψ_{E_2} έχουν ίδια πιθανότητα εμφάνισης, δηλαδή όταν $\alpha_1 = \alpha_2$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η προσέγγιση τάξης μεγέθους $\Delta E \approx |E_1 - E_2|$ που κάναμε για την αβεβαιότητα είναι ανεκτή.

β) Όταν λέμε μέσος χρόνος ζωής τ ενός ασταθούς συστήματος δεν εννοούμε απαραιτήτως ότι μετά από χρόνο τ το σύστημα θα «καταστραφεί» (διάσπαση) ή ότι θα φύγει από την κατάσταση που ήταν (αποδιέγερση) κ.λπ.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει (σελ.81), μέσος χρόνος ζωής μπορεί να είναι και κάποιος χαρακτηριστικός χρόνος μεταβολής ενός περιοδικώς μεταβαλλόμενου συστήματος. Για παράδειγμα το σύστημα της υπέρθεσης των δύο σταθερών καταστάσεων ψ_{E_1} και ψ_{E_2} , στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως, είναι ένα τέτοιο περιοδικά μεταβαλλόμενο σύστημα με περίοδο

$$T = \frac{2\pi\hbar}{|E_1 - E_2|}$$

Άρα ένας αυστηρά προσδιορισμένος χαρακτηριστικός χρόνος μεταβολής του είναι ο

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\hbar}{|E_1 - E_2|}$$

Συνεπώς ο χαρακτηριστικός χρόνος μεταβολής του συστήματος

$$\tau \approx \frac{\hbar}{|E_1 - E_2|}$$

που υπολογίσαμε παραπάνω με τη βοήθεια των προσεγγιστικών ισοτήτων της αρχής αβεβαιότητας είναι σίγουρα μια πολύ καλή εκτίμηση.

γ) Στην παραπάνω υπέρθεση των δύο καταστάσεων η μέση τιμή της ενέργειας είναι

$$\langle E \rangle = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$$

ενώ η μέση τιμή των τετραγώνων της ενέργειας είναι

$$\langle E^2 \rangle = \alpha_1 E_1^2 + \alpha_2 E_2^2$$

Άρα η αβεβαιότητα της ενέργειας ΔE πληροί τη σχέση (σελ.39 σχέση 4.2)

$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \alpha_1 E_1^2 + \alpha_2 E_2^2 - (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)^2$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η αβεβαιότητα ενός μεγέθους εξαρτάται όχι μόνο από τις πιθανές τιμές του μεγέθους, αλλά και από τις πιθανότητες να εμφανιστούν αυτές οι τιμές.

δ) Η αβεβαιότητα στην ενέργεια οδηγεί σε αστάθεια το σύστημα και συνεπώς προκαλεί την «εξέλιξη» του.

6.6 Η αβεβαιότητα συνοδεύεται από φαινόμενα περίθλασης

Δέσμη από ηλεκτρόνια συγκεκριμένης ορμής p_x περνά από μικρή σχισμή με γ-άνοιγμα α (σχήμα 6.2). Είτε το πείραμα είναι στημένο από ανθρώπους (ύπαρξη παρατηρητή) είτε όχι (ανυπαρξία παρατηρητή) θα συμβούν τα παρακάτω:

«Ακριβώς» πριν το ηλεκτρόνιο μπει στη σχισμή υποθέτουμε ότι έχει $p_{y,\alpha\rho\chi} = 0$ και συνεπώς άπειρη αβεβαιότητα y -θέσης. Όταν όμως το ηλεκτρόνιο περνά από τη σχισμή,

επιχειρείται εντοπισμός της y -θέσης του με αβεβαιότητα Δy , περίπου ίση με το y -άνοιγμα της σχισμής

$$\Delta y \approx a \quad (*)$$

Λόγω των σχέσεων Heisenberg, η y -ορμή του ηλεκτρονίου, ευθύς μόλις βγει από τη σχισμή θα παρουσιάζει αβεβαιότητα Δp_y γύρω από την αρχική της τιμή $p_{y, αρχ} = 0$

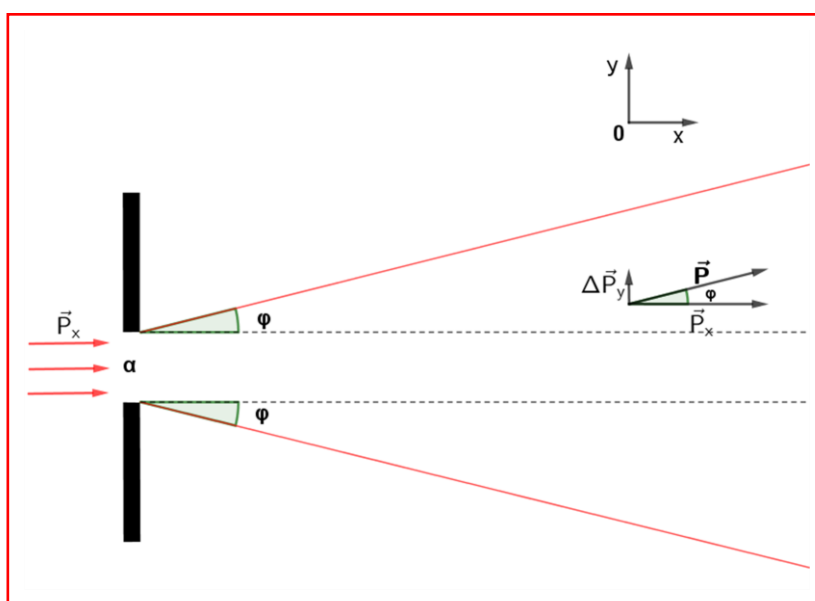
$$\Delta p_y \approx \frac{\hbar}{\Delta y} \approx \frac{\hbar}{a} \quad (6.1)$$

Η αβεβαιότητα αυτή της ορμής θα προκαλέσει ανεξέλεγκτη εκτροπή των σωματιδίων σε διάφορες γωνίες (σχήμα 6.2) που οι τιμές τους θα φτάνουν μέχρι την «τάξη μεγέθους» μιας γωνίας φ τέτοιας ώστε

$$\Delta p_y = p_x \cdot \tan \varphi \quad (6.2)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\tan \varphi \approx \frac{\hbar}{a \cdot p_x} \quad (6.3)$$



Σχήμα 6.2: Η αρχή της αβεβαιότητας προκαλεί φαινόμενα περίθλαση των σωματιδίων

Άρα το πέρασμα σωματιδίων από σχισμή συνοδεύεται από φαινόμενα περίθλασης, δηλαδή από τυχαίες εκτροπές των σωματιδίων από την αρχική τους κατεύθυνση.

(*) Πιο σωστό θα ήταν να γράφαμε $\Delta y \approx a/2$. Αλλά ας μείνουμε στην τάξη μεγέθους, την οποία ουσιαστικά επιδιώκουμε σε όλες σχεδόν τις εφαρμογές αυτού του βιβλίου.

Παρατηρήσεις

α) Για δεδομένο p_x , όταν μικραίνει το άνοιγμα a της σχισμής, η γωνία φ μεγαλώνει και άρα η περίθλαση των σωματιδίων λόγω αβεβαιότητας ενισχύεται. Η κατανομή των ηλεκτρονίων γύρω από την «κεντρική» τους αρχική x -πορεία, θα είναι πιο «απλωμένη».

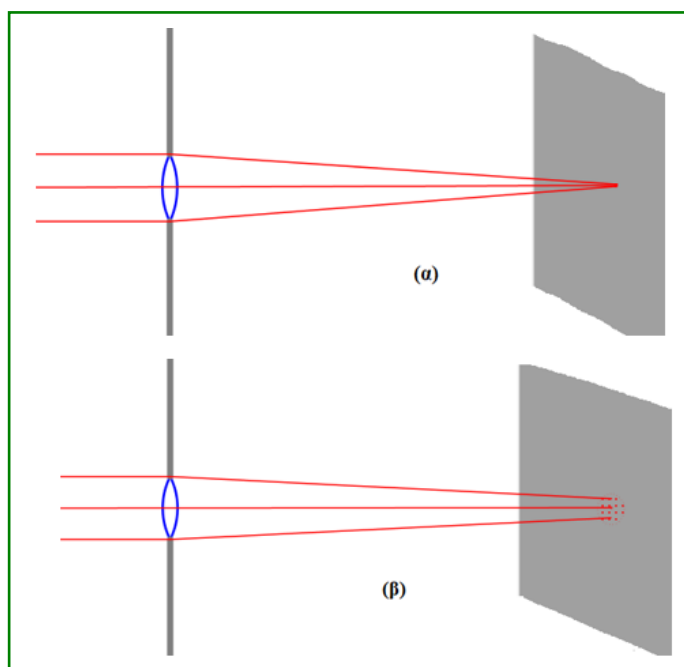
β) Για δεδομένο a , όσο πιο μεγάλη είναι η αρχική ορμή p_x των σωματιδίων τόσο λιγότερο θα «καταλάβουν» την προσθήκη Δp_y , που τους επέβαλε η αρχή της αβεβαιότητας όταν πέρασαν από τη σχισμή και συνεπώς τόσο μικρότερη θα είναι η περίθλασή τους.

Το φαινόμενο προφανώς αφορά και στα φωτόνια. Όσο μεγαλύτερη είναι η ορμή p_x των φωτονίων (άρα όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργειά τους) τόσο μικρότερη θα είναι η περίθλαση που θα υποστούν κατά τη διδοδό τους από τη συγκεκριμένη σχισμή a .

γ) Η περίθλαση λόγω αβεβαιότητας είναι τελικά ένας συνδυασμός των διαστάσεων a της σχισμής και της x -ορμής p_x των σωματιδίων. Στον παρονομαστή της σχέσης 6.3 υπάρχει το γινόμενο $a p_x$.

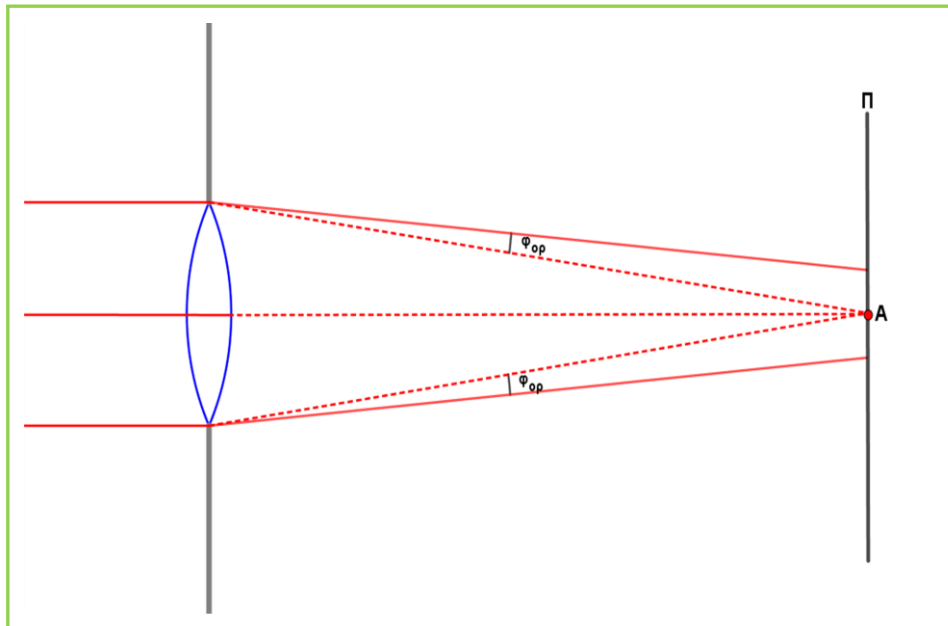
6.7 Τα οπτικά όργανα έχουν διακριτικό όριο

Ένας ιδανικός φακός εστιάζει σε ένα μόνο σημείο (σχήμα 6.3α). Ένας πραγματικός φακός όμως, λόγω περίθλασης του φωτός, δε μπορεί να εστιάσει με απόλυτη ακρίβεια. Συνεπώς γύρω από το σημείο ιδανικής εστίασης (ίχνος) θα υπάρχει πάντα μια θολούρα (σχήμα 6.3β).



Σχήμα 6.3: (α) Εστίαση ιδανικού φακού. Το ίχνος είναι σημείο.
(β) Στον πραγματικό φακό, η αρχή αβεβαιότητας προκαλεί περίθλαση των φωτονίων δημιουργώντας ανεξέλεγκτη «θολούρα» γύρω από το ίχνος ιδανικής εστίασης

Η ακρίβεια λοιπόν με την οποία μπορεί να εστιάσει ένας πραγματικός φακός καθορίζεται από μια οριακή γωνία φ_{op} που ονομάζεται **διακριτικό όριο** του φακού (σχήμα 6.4)



Σχήμα 6.4: Ένας πραγματικός φακός δε μπορεί να εστιάσει στο ιδανικό σημείο A με ακρίβεια μεγαλύτερη από μια οριακή γωνία φ_{op} η οποία αποτελεί το διακριτικό του όριο. Όσο μικρότερο είναι το διακριτικό όριο τόσο καλύτερη η εστίαση, δηλαδή τόσο μεγαλύτερη η διακριτική ικανότητα του φακού.

Όσο πιο μικρή είναι η γωνία φ_{op} , όσο δηλαδή πιο μικρό είναι το διακριτικό όριο του φακού, τόσο πιο μικρή θα είναι η διάμετρος της «θολούρας», τόσο πιο καλή η εστίαση του και άρα τόσο μεγαλύτερη θα είναι η διακριτική του ικανότητα.

Άρα

Μικρό διακριτικό όριο φ_{op} = Μεγάλη διακριτική ικανότητα φακού^(*)

Αυτό ουσιαστικά ισχύει για κάθε «φακό» (ραδιοτηλεσκόπια, ηλεκτρονικό μικροσκόπιο κ.λπ.) μιας και μέσω αυτού γίνεται προσπάθεια εντοπισμού θέσης. Η διακριτική ικανότητα των διαφόρων οπτικών οργάνων περιορίζεται, λόγω της περίθλασης του φωτός στο φακό.

Χρησιμοποιώντας κυματικές έννοιες αποδεικνύεται ^(**) ότι το διακριτικό όριο φ_{op} ενός φακού διαμέτρου D, όταν πέσει πάνω του φως μήκους κύματος λ , δίνεται από τη σχέση

$$\sin \varphi_{op} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.4)$$

^(*) Ένας πραγματικός φακός δε μπορεί να ξεχωρίσει αντικείμενα που έχουν μεταξύ τους γωνιακή απόσταση μικρότερη από φ_{op} (διακριτικό όριο).

^(**) Η απόδειξη βρίσκεται εύκολα σε βιβλία Φυσικής που έχουν κεφάλαιο οπτικής

Επειδή η διάμετρος ενός φακού είναι πάντοτε πολύ μεγαλύτερη του μήκους κύματος του φωτός η γωνία φ_{op} είναι πολύ μικρή και συνεπώς η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\varphi_{op} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.5)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την κυματική θεωρία όσο μεγαλώνει το μήκος κύματος λ του χρησιμοποιούμενου φωτός τόσο μεγαλώνει το διακριτικό όριο φ_{op} του φακού και συνεπώς τόσο περισσότερο μικραίνει η διακριτική του ικανότητα.

Αυτό λίγο ως πολύ το περιμέναμε γιατί με μεγάλα μήκη κύματος δεν μπορείς να ξεχωρίσουμε λεπτομέρειες αντικειμένων.

Όμως το φως δεν είναι κύματα, αλλά φωτόνια. Ας δούμε λοιπόν πώς αποδεικνύεται η παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας φωτόνια.

Αν στην εφαρμογή 6.6 χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, δηλαδή φωτόνια των οποίων η ορμή στον x -άξονα είναι $p_{\text{φωτ}}$, τότε η αρχή αβεβαιότητας, μετά τη διόδό τους από τη σχισμή, θα έχει προκαλέσει εκτροπή τους σε διάφορες τυχαίες γωνίες μέχρι την «τάξη μεγέθους» μιας γωνίας που πληροί τη σχέση 6.3.

Στην περίπτωση του φακού αυτό μεταφράζεται ότι το πέρασμα των φωτονίων από το φακό θα τους προκαλέσει ανεξέλεγκτη εκτροπή από την ιδανική εστίαση σε διάφορες γωνίες μέχρι μια τάξη μεγέθους $\approx \varphi_{op}$ τέτοια ώστε

$$\tan \varphi_{op} \approx \frac{h}{D \cdot p_{\text{φωτ}}} \quad (6.3\alpha)$$

όπου τη θέση του ανοίγματος a της σχισμής στη σχέση (6.3), πήρε το άνοιγμα D του φακού. Όμως φωτόνια ορμής $p_{\text{φωτ}}$ αντιστοιχούν σε μήκος κύματος λ ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

$$p_{\text{φωτ}} = \frac{h}{\lambda}$$

Άρα το διακριτικό όριο φ_{op} , ουσιαστικά το μέτρο της εκτροπής από την ιδανική εστίαση μετά το φακό, θα πληροί τη σχέση

$$\tan \varphi_{op} \approx \frac{\lambda}{D}$$

και επειδή $0 < \varphi_{op} \ll \pi/2$ και $\lambda \ll D$

$$\varphi_{op} \approx 1 \cdot \frac{\lambda}{D} \quad (6.6)$$

Η ομοιότητα των σχέσεων (6.5) και (6.6) είναι εμφανής. Η αρχή αβεβαιότητας δημιουργεί φαινόμενα περίθλασης περιορίζοντας τη διακριτική ικανότητα των οπτικών, και όχι μόνο, οργάνων.

Παρατήρηση

Επειδή $E_{\text{φωτ}} = p_{\text{φωτ}} c$ η σχέση (6.3α) δίνει

$$\tan \varphi_{op} \approx \frac{hc}{D \cdot E_{\text{φωτ}}}$$

Άρα όσο μεγαλώνει η ενέργεια $E_{\phi\omega\tau}$ των χρησιμοποιούμενων φωτονίων τόσο μικραίνει το διακριτικό όριο ϕ_{op} του φακού και συνεπώς τόσο μεγαλώνει η διακριτική του ικανότητα. Αυτό λίγο ως πολύ το περιμέναμε γιατί με φωτόνια μεγάλων ενεργειών (δηλαδή μικρών μηκών κύματος) μπορείς πιο εύκολα να ξεχωρίσεις λεπτομέρειες αντικειμένων.

Τελικά η διακριτική ικανότητα ενός οργάνου είναι ένας συνδυασμός των διαστάσεων D του «φακού» και της ενέργειας $E_{\phi\omega\tau}$ των φωτονίων που χρησιμοποιούνται. Στον παρονομαστή της παραπάνω σχέσης υπάρχει το γινόμενο $D \cdot E_{\phi\omega\tau}$.

6.8 Οι μετρητικές συσκευές είναι κβαντικά συστήματα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στη σελίδα 55, για να δούμε πιο καθαρά τη λειτουργία των σχέσεων αβεβαιότητας θα πρέπει κάποιες φορές να πάρουμε υπόψη μας ότι όλα γύρω μας, άρα και οι πειραματικές μας διατάξεις, είναι κβαντικά συστήματα και επομένως υπακούουν στις ίδιες σχέσεις αβεβαιότητας με το μετρούμενο σύστημα.

Παράδειγμα

Στην εφαρμογή 6.6 κάθε ηλεκτρόνιο πριν τη σχισμή είχε μια εντελώς συγκεκριμένη αρχική y -ορμή $p_{y, αρχ} = 0$ και συνεπώς μια εντελώς απροσδιόριστη αρχική y -θέση.

Για κάθε ηλεκτρόνιο λοιπόν, πριν μπει στη σχισμή, ίσχυε

$$\Delta y_{αρχ} \rightarrow \infty \quad \text{και} \quad \Delta p_{y, αρχ} = 0$$

Η σχισμή, είτε ως ενσυνείδητη κατασκευή ανθρώπου είτε ως τυχαία φυσική διαμόρφωση, κάτι εντελώς αδιάφορο για τη Φύση, «επιχείρησε να μετρήσει» την y -θέση των ηλεκτρονίων. Μείωσε λοιπόν δραματικά την αβεβαιότητα της y -θέσης τους από το ∞ , που ήταν αρχικά, σε $\Delta y \approx a$. Αυτό αύξησε την αβεβαιότητα της y -ορμής τους από 0 που ήταν αρχικά, σε $\Delta p_y \approx \hbar/a$.

Η y -ορμή των ηλεκτρονίων λοιπόν, την οποία αρχικά υποθέσαμε ως απόλυτα γνωστή και ίση με το μηδέν ($p_{y, αρχ} = 0$), απέκτησε μετά τη δίοδο από τη σχισμή ένα ολόκληρο συνεχές φάσμα πιθανών τιμών γύρω από το 0 με εύρος $\Delta p_y \approx \hbar/a$.

Αυτό το εντελώς ανεξέλεγκτο ποσό ορμής που προστέθηκε στα ηλεκτρόνια οφείλεται στο πέτασμα και **πιθανώς κάποιος να σκεφτεί ότι** αν πάρουμε ένα πάρα πολύ βαρύ πέτασμα και το στερεώσουμε πολύ καλά και με κατάλληλο τρόπο στο πάτωμα ώστε να είναι εντελώς ακίνητο, τότε δε θα μπορέσει να μεταδώσει y -ορμή στα ηλεκτρόνια, οπότε θα ισχύει $\Delta p_y = 0$ και έτσι θα έχει ακυρωθεί η αρχή της αβεβαιότητας.

Όμως δεν είναι καθόλου έτσι τα πράγματα. Το εύρος $\Delta p_y \approx \hbar/a$ των ορμών των ηλεκτρονίων είναι αδύνατο να το κάνουμε μικρότερο ό,τι και να κάνουμε στη συσκευή μέτρησης.

Ας δούμε:

Για να είναι σωστός ο εντοπισμός της y -θέσης του ηλεκτρονίου (και άρα για να δούμε να λειτουργούν οι αρχές αβεβαιότητας) πρέπει η y -θέση της σχισμής και συνεπώς η y -θέση του πετάσματος, να είναι «γνωστές» με ακρίβεια πολύ μεγαλύτερη από το άνοιγμα a της σχισμής.

Συνεπώς η αβεβαιότητα της y -θέσης του πετάσματος πρέπει να είναι

$$\Delta y_{\text{πέτασμα}} \ll \alpha$$

Όμως το πέτασμα (και όλη η «μετρητική συσκευή») είναι τμήμα της Φύσης και συνεπώς ελέγχεται από την αρχή της αβεβαιότητας

$$\Delta y_{\text{πέτασμα}} \cdot \Delta p_{y,\text{πέτασμα}} \approx \hbar$$

ή

$$\Delta p_{y,\text{πέτασμα}} \approx \frac{\hbar}{\Delta y_{\text{πέτασμα}}}$$

και τελικά

$$\Delta p_{y,\text{πέτασμα}} \gg \frac{\hbar}{\alpha} \quad (6.7)$$

Η τελευταία ανισότητα μας λέει ότι το πέτασμα όχι μόνο είναι αδύνατο να κρατηθεί ακίνητο, αλλά και ότι η ορμή του είναι αδύνατο να ελεγχθεί με ακρίβεια μεγαλύτερη από αυτή που του επιτρέπει η αρχή της αβεβαιότητας με τη σχέση (6.7).

Αν με κάποιο τρόπο χαλάσουμε τη σχέση (6.7) για το πέτασμα αμέσως καταρρέει όλο το πείραμα, γιατί η y -θέση του πετάσματος θα γίνει εντελώς αβέβαιη και ανεξέλεγκτη, **ο γ-εντοπισμός των ηλεκτρονίων μέσω της σχισμής δεν θα είναι σωστός** και συνεπώς οι σχέσεις αβεβαιότητας δε θα έχουν καμιά υποχρέωση να «επιβεβαιωθούν».

Παρατηρήσεις

α) Η διάταξη (πέτασμα, σχισμή, ηλεκτρόνια κλπ) είτε θεωρηθεί μετρητική συσκευή είτε τυχαίο φυσικό σύστημα που παρεμβλήθηκε στην πορεία των σωματιδίων, δεν παύει να ελέγχεται ολόκληρη από τις αρχές της αβεβαιότητας.

β) Κατά το πέρας των ηλεκτρονίων από τη σχισμή α , η αρχή της αβεβαιότητας μέσω του πετάσματος μεταφέρει στην ορμή τους μια ανεξέλεγκτη ποσότητα μεγαλύτερη από $\hbar/\alpha$. Λόγω διατήρησης της ορμής και στην ορμή του πετάσματος μεταφέρεται ίδιο ανεξέλεγκτο ποσό το οποίο είναι αδύνατο να μειωθεί ή να μηδενιστεί, αν δεν χαλάσει όλο το πείραμα.

Τελικά πρέπει να υπάρξει οπωσδήποτε αβεβαιότητα στην y -ορμή του πετάσματος και να είναι μεγαλύτερη από $\hbar/\alpha$. Αυτό είναι δομική απαίτηση της Φύσης που είναι κβαντική και που επιβάλλει παντού, και στα μετρούμενα συστήματα και στις «μετρητικές» συσκευές, τους νόμους της (νόμοι διατήρησης, αρχές αβεβαιότητας κ.λπ.)

γ) Η σχέση (6.7) μας λέει και κάτι άλλο πολύ πιο γενικό:

Αν σε κάποιο σύστημα «επιχειρηθεί» ακριβής εντοπισμός της θέσης σωματιδίων κατά τη διέλευσή τους μέσα από κάποιο άνοιγμά του («σχισμές», «φακοί» κλπ), θα υπάρξει οπωσδήποτε αβεβαιότητα **και** στην ορμή των σωματιδίων **και** στην ορμή του συστήματος. Και αυτό θα συνοδευθεί από φαινόμενα περίθλασης σωματιδίων.

Αν βέβαια υπάρξουν και άλλα κατάλληλα ανοίγματα στο φυσικό σύστημα, θα προκληθεί ακόμη μεγαλύτερη αλλαγή των πιθανοτήτων παρουσίας των (κβαντικών) σωματιδίων σε διάφορα σημεία του χώρου («συμβολή»). Πιθανότητα παρουσίας κβαντικών πλασμάτων και όχι συμβολή κυμάτων. Το πείραμα της διπλής σχισμής είναι μια όμορφη περίπτωση.

6.9 Η αρχή αβεβαιότητας στο πείραμα Stern-Gerlach

Όπως είδαμε στην εφαρμογή 6.6 το πέρασμα (κβαντικών) σωματιδίων από μια σχισμή δημιουργεί αβεβαιότητα στην ορμή τους.

Αν p_x είναι η ορμή των σωματιδίων λίγο πριν μπουν στη σχισμή και a το γ-άνοιγμα της σχισμής τότε η αβεβαιότητα της ορμής αμέσως μόλις βγουν από αυτή θα είναι (σχέση 6.1, σελ.87)

$$\Delta p_y \approx \frac{\hbar}{\Delta y} \approx \frac{\hbar}{a} \quad (6.1)$$

Η αβεβαιότητα αυτή της ορμής θα προκαλέσει ανεξέλεγκτη εκτροπή των σωματιδίων σε διάφορες γωνίες που οι τιμές τους θα φτάνουν μέχρι την «τάξη μεγέθους» μιας γωνίας φ τέτοιας ώστε

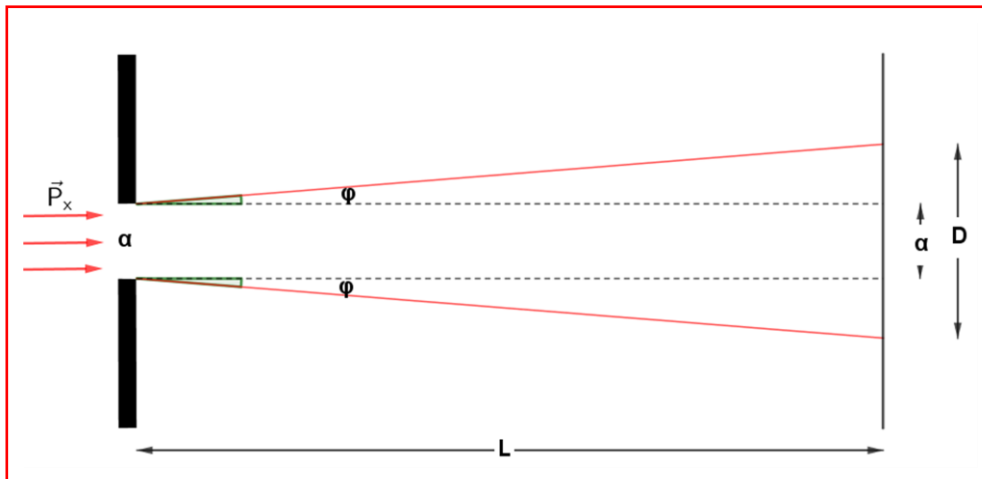
$$\tan \varphi \approx \frac{\hbar}{a \cdot p_x} \quad (6.3)$$

Αν πέτασμα Π βρίσκεται σε απόσταση L από τη σχισμή (σχήμα 6.5), τότε η διάμετρος D του ίχνους (της «θολούρας») που θα σχηματίσει η δέσμη των σωματιδίων πάνω στο Π είναι

$$D = a + 2L \tan \varphi \approx a + 2L \frac{\hbar}{a \cdot p_x} \quad (6.8)$$

Η σχέση (6.8) δείχνει ότι η διάμετρος D του ίχνους των σωματιδίων στο πέτασμα Π

- Είναι πάντα μεγαλύτερη από το άνοιγμα a της σχισμής
- Δε μπορεί να μικρύνει όσο θέλουμε μικραίνοντας το άνοιγμα a της σχισμής, γιατί το a υπάρχει και στον παρονομαστή του δεύτερου προσθετέου της σχέσης (6.8)



Σχήμα 6.5: Η εκτροπή των σωματιδίων που πέρασαν από σχισμή είναι ανεξέλεγκτη (τυχαία) και βρίσκεται μέσα στα όρια μιας μέγιστης γωνίας τάξης μεγέθους φ (σχέση 6.3) γύρω από την κεντρική πορεία ανοίγματος a . Στο πέτασμα δημιουργείται ίχνος διαμέτρου D

Για να ελαχιστοποιήσουμε τα φαινόμενα περίθλασης τα οποία προκαλεί η αρχή της αβεβαιότητας θα πρέπει να βρούμε ένα βέλτιστο άνοιγμα σχισμής το οποίο θα κάνει τη διάμετρο του ίχνους στο πέτασμα ελάχιστη.

Στη σχέση (6.8) λοιπόν βρίσκουμε το ακρότατο της διαμέτρου D (ελάχιστο όπως δείχνει η θετικότητα της 2ης παραγώγου)

$$\frac{dD}{da} = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2L\hbar}{p_x}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.8) προκύπτει

$$D_{min} \approx 2 \sqrt{\frac{2L\hbar}{p_x}} = 2\alpha$$

Άρα η πιο μικρή τιμή της διαμέτρου του ίχνους (βέλτιστη τιμή) είναι D_{min} και επιτυγχάνεται όταν το άνοιγμα της σχισμής είναι

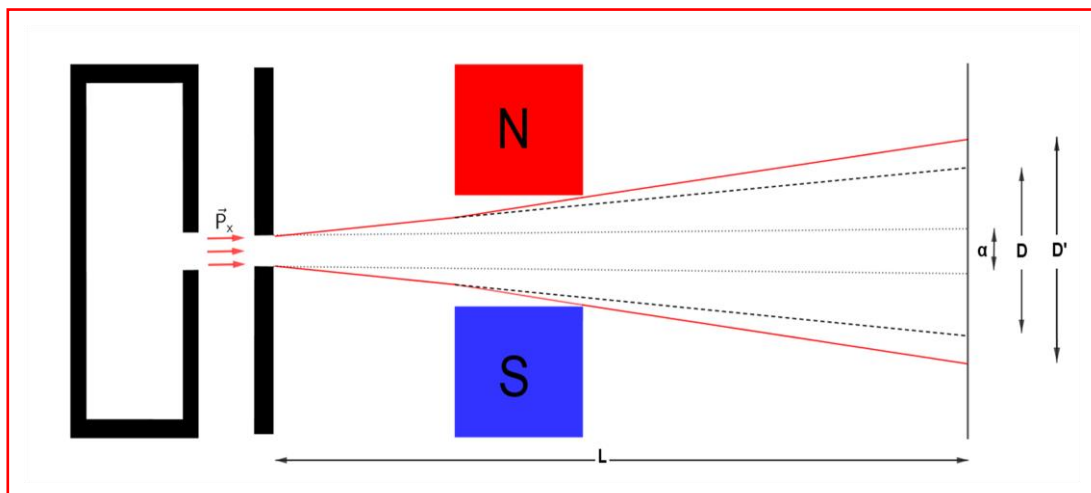
$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2L\hbar}{p_x}} \quad (6.9)$$

οπότε

$$D_{min} \approx 2 \sqrt{\frac{2L\hbar}{p_x}} = 2\alpha \quad (6.10)$$

Πείραμα Stern-Gerlach

Ως γνωστό, στο πείραμα Stern-Gerlach δέσμη ατόμων αργύρου έβγαινε από το άνοιγμα ενός φούρνου θερμοκρασίας T και έμπαινε σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο (σχήμα 6.6).



Σχήμα 6.6: Στο πείραμα Stern-Gerlach η δέσμη των ατόμων αργύρου διαχωρίζεται από το μαγνητικό πεδίο σε δύο δέσμες που τα ίχνη τους στο Π απέχουν D' μεταξύ τους. Ο διαχωρισμός οφείλεται στους 2 διαφορετικούς προσανατολισμούς του σπιν του 47ου ηλεκτρονίου του που βρίσκεται σε μια s-κατάσταση (τα άλλα 46 ηλεκτρόνια φτιάχνουν ζευγάρια και γίνεται εξουδετέρωση μαγνητικών ροπών). Ο διαχωρισμός D' που προκαλεί το μαγνητικό πεδίο είναι πολύ μεγαλύτερος από τις χαοτικές εκτροπές μεγέθους D των ατόμων που προκαλεί η αρχή της αβεβαιότητας κατά το πέρασμα από τη σχισμή εισόδου στο πεδίο. Άρα η αρχή της αβεβαιότητας στο συγκεκριμένο πείραμα ελέγχεται απόλυτα.

Στο σχήμα δεν αποδίδεται το μέγεθος της διαφοράς των αποκλίσεων D και D' .

Σημαντικοί παράγοντες για το πείραμα ήταν και οι

- Τα άτομα του αργύρου να έχουν όσο πιο καλά προσδιορισμένη ορμή p_x
- Η δέσμη των ατόμων, πριν μπει στο μαγνητικό πεδίο, να είναι όσο γίνεται πιο καλά ευθυγραμμισμένη.

Για τους λόγους αυτούς λοιπόν η θερμοκρασία του φούρνου ήταν σταθερή, το άνοιγμα του στενό και η δέσμη των ατόμων, πριν μπει στο μαγνητικό πεδίο, περνούσε από μια-δυο σχισμές (οι οποίες προφανώς την εστίαζαν, αλλά και την εξασθένιζαν συγχρόνως).

Εφόσον η δέσμη των ατόμων αργύρου περνούσε από σχισμή, για να πετύχουμε την όσο πιο καλή ευθυγράμμιση της πριν μπει στο μαγνητικό πεδίο, θα έπρεπε να ελαχιστοποιήσουμε τις επιπτώσεις της αρχής της αβεβαιότητας.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν το άνοιγμα a της τελευταίας σχισμής από την οποία περνά η δέσμη πριν μπει στο πεδίο είναι βέλτιστο, δηλαδή αυτό της σχέσης (6.9). Τότε στο πέτασμα Π θα δημιουργηθεί η πιο μικρή ανεξέλεγκτη διάμετρος D_{min} η οποία δίνεται από τη σχέση (6.10).

Αριθμητικό παράδειγμα

Αν $T=1200\text{ K}$ η θερμοκρασία του φούρνου, m η μάζα του ατόμου Ag και p'_x η ορμή του ατόμου μόλις βγαίνει από το φούρνο, το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας δίνει

$$\frac{p'_x{}^2}{2m} = \frac{kT}{2}$$

και συνεπώς

$$p'_x = \sqrt{kTm} \quad (6.11)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.11) βρίσκουμε την ορμή των ατόμων αργύρου τη στιγμή που βγαίνουν από το φούρνο

$$p'_x = \sqrt{kTm} = \sqrt{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1200 \cdot 1,79 \cdot 10^{-25}} = 5,44 \cdot 10^{-23} \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Υποθέτουμε ότι η ορμή αυτή p'_x είναι η ορμή με την οποία τα άτομα του αργύρου φτάνουν στην τελευταία σχισμή^(*) πριν μπουν στο μαγνητικό πεδίο και ότι η διαδρομή τους από την τελευταία σχισμή μέχρι το πέτασμα Π είναι $L=1\text{ m}$.

Τότε το βέλτιστο άνοιγμα που πρέπει να έχει η σχισμή για να έχουμε τις μικρότερες αναπόφευκτες επιπτώσεις της αρχής της αβεβαιότητας στην ευθυγράμμιση της δέσμης των

^(*) Η ορμή p_x με την οποία τα άτομα φτάνουν στην τελευταία σχισμή είναι γενικά μικρότερη από την ορμή p'_x με την οποία βγαίνουν από το φούρνο λόγω και της παρουσίας του αέρα. Συνεπώς στην σχέση (6.11) πρέπει μάλλον να βάλουμε μια θερμοκρασία της τάξης της θερμοκρασίας περιβάλλοντος (να κάνουμε και ένα δυο ακόμη προσεγγίσεις) ώστε να βρούμε το κατάλληλο p_x που θα βάλουμε στις (6.9) και (6.10). Στους παραπάνω υπολογισμούς όμως εμείς υποθέσαμε ουσιαστικά ότι τα άτομα του αργύρου με το που βγαίνουν από το φούρνο περνούν αμέσως μέσα από τη σχισμή εισόδου στο μαγνητικό πεδίο. Είναι και αυτό μια πειραματική περίπτωση ή έστω μια καλή προσέγγιση για όσα θέλουμε να πούμε για την αβεβαιότητα

ατόμων μέχρι το πέτασμα Π δίνεται από τη σχέση (6.9)

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{2L\hbar}{p'_x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34}}{5,44 \cdot 10^{-23}}} \approx 2 \cdot 10^{-6} m$$

Η διάμετρος του ίχνους στο Π θα είναι τότε βέλτιστη

$$D_{min} \approx 2\alpha \approx 4 \cdot 10^{-6} m$$

Παρατήρηση

Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου προκαλεί διαχωρισμό της δέσμης των ατόμων αργύρου σε δύο δέσμες των οποίων τα ίχνη πάνω στο πέτασμα Π απέχουν D' . Η κατάλληλη επιλογή της βαθμίδας μεταβολής του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας των ατόμων με την οποία μπαίνουν στο πεδίο δημιουργεί μια απόσταση D' ανάμεσα στα ίχνη της τάξεως του χιλιοστού.

Άρα η αβεβαιότητα προκαλεί μια ανεξέλεγκτη «θολούρα» D_{min} στο πέτασμα Π της τάξεως το πολύ του εκατοστού του χιλιοστού, ενώ το πεδίο διαχωρίζει τη δέσμη λόγω του σπιν σε απόσταση τάξης χιλιοστού.

Συνεπώς στο πείραμα αυτό μπορούμε να διαχειριστούμε πάρα πολύ καλά την αβεβαιότητα, γεγονός που το καθιστά σχετικά εύκολο στην εκτέλεσή του.

6.10 Ο εγκλωβισμός δημιουργεί «νευρικότητες»

Έστω σωματίδια παγιδευμένα σε χώρο ο οποίος προσδιορίζεται από ένα μήκος περίπου α (π.χ. ο χώρος μιας σφαίρας προσδιορίζεται από την ακτίνα της, ο χώρος ενός παραλληλεπίπεδου προσδιορίζεται από ένα μήκος κάπου ανάμεσα στα μήκη των τριών ακμών του, ο χώρος του κύβου από την ακμή του κλπ)

Για να παραμείνουν τα σωματίδια παγιδευμένα θα πρέπει η μέση τιμή της ορμής τους να είναι μηδέν (αλλιώς θα δραπετεύαν).

Αφού η αβεβαιότητα στον εντοπισμό τους είναι $\Delta x \approx \alpha$ οι πιθανές ορμές τους θα παρουσιάζουν γύρω από το μηδέν μια στατιστική κατανομή με εύρος

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\alpha}$$

Άρα οι πιθανές ορμές των εγκλωβισμένων σωματιδίων θα έχουν τιμές από 0 μέχρι $\hbar/\alpha$ προς όλες τις κατευθύνσεις.

Με άλλα λόγια, μπορεί η διανυσματικότητα της ορμής να μηδενίζει τη μέση τιμή της ορμής των σωματιδίων, αλλά δεν μπορεί να μηδενίσει ούτε την πίεση που ασκούν τα σωματίδια, ούτε την ενέργεια που έχουν, γιατί αυτά τα μεγέθη δεν «ενδιαφέρονται» για την κατεύθυνση κίνησης.

Αυτό σημαίνει ότι

- Στο χώρο εγκλωβισμού αναπτύσσονται σημαντικές πιέσεις

- Η μέση (κινητική) ενέργεια των σωματιδίων είναι

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (6.12)$$

δηλαδή είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου του μεγέθους a που προσδιορίζει το χώρο εγκλωβισμού

Συμπέρασμα

Τα εγκλωβισμένα σε κάποιον χώρο σωματίδια

- έχουν διάφορες πιθανές ορμές με μέση τιμή (διανυσματικής) ορμής μηδέν
- ασκούν πίεση στο χώρο εγκλωβισμού και συνεπώς αντιστέκονται στη σύνθλιψη
- έχουν σημαντικές τιμές ενέργειας

Περαιτέρω σμίκρυνση του χώρου εγκλωβισμού των σωματιδίων οδηγεί

- σε αύξηση των πιθανών τιμών των ορμών τους
- σε αύξηση της πίεσης στον χώρο και συνεπώς σε αύξηση της αντίστασης σε κάθε περαιτέρω σύνθλιψη
- σε θεαματική αύξηση της εγκλωβισμένης ενέργειας

6.11 Το άτομο είναι Άτλας. Κρατά στους ώμους του τη Γη

(...το μήκος που προσδιορίζει τον χώρο

- ενός ατόμου είναι της τάξης του $10^{-10}m$
- ενός πυρήνα είναι της τάξης του $10^{-15}m$
- ενός νουκλεονίου είναι μικρότερο σε τάξη μεγέθους από $10^{-15}m$...)

Τα βασικά συστατικά ενός ατόμου είναι τα νουκλεόνια (πρωτόνια και νετρόνια) και τα ηλεκτρόνια. Τα νουκλεόνια είναι «φυλακισμένα» με ισχυρότατες δυνάμεις (ισχυρή πυρηνική αλληλεπίδραση) στον πυρήνα του ατόμου, δηλαδή σε μια περιοχή με ακτίνα 100000 φορές περίπου μικρότερη από εκείνη του ατόμου. Τα ηλεκτρόνια είναι στοιχειώδη σωματίδια με ακτίνα σχεδόν «μηδενική» (άγνωστο αν έχουν «ακτίνα». Κι αν έχουν, είναι άγνωστο πόσο μικρότερη από $10^{-18}m$ είναι).

Το άτομο λοιπόν, έχοντας στον χώρο του ηλεκτρόνια με μηδενική ακτίνα και έναν πάρα πάρα πολύ μικρό πυρήνα, είναι κατά 99,999999999...% κενό. Όμως παρόλο που είναι σχεδόν κενό, οι δυνάμεις που απαιτούνται για να το συμπιέσουν έστω και λίγο είναι κολλοσιαίες. Ακόμη κι όλη τη Γη «να βάλουμε» πάνω στα άτομα να τα πατήσει (άτομα που βρίσκονται στον εσωτερικό πυρήνα της Γης) η παραμόρφωση που θα υποστούν θα μειώσει την ακτίνα τους κάπου 40% το πολύ.

Γιατί τα άτομα είναι ασυμπίεστα ενώ είναι κενά;

Όσα συμβαίνουν στον υποατομικό (και όχι μόνο) κόσμο τα συν-ελέγχουν σε μεγάλο βαθμό η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg και η απαγορευτική αρχή του Pauli.

- Λόγω της αρχής της αβεβαιότητας τα σωματίδια αντιδρούν έντονα σε κάθε προσπάθεια εντοπισμού τους, δηλαδή σε κάθε προσπάθεια περιορισμού του χώρου τους.
- Λόγω της αρχής του Pauli τα σωματίδια ύλης (ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια) απαγορεύεται να βρεθούν όλα μαζί στην ίδια (κβαντική) κατάσταση, αλλά πρέπει να «απλωθούν» και σε άλλες διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις, οι οποίες όμως πιάνουν μεγαλύτερο χώρο.

Επομένως τα ηλεκτρόνια ενός ατόμου βρίσκονται ανάμεσα σε τρεις ισχυρότατους ανταγωνιστικούς παράγοντες

- 1) Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις του πυρήνα θέλουν να τραβήξουν όλα τα ηλεκτρόνια πάνω στον πυρήνα, περιορίζοντάς τους τον διαθέσιμο χώρο και στριμώχνοντάς τα όλα στην ίδια κβαντική κατάσταση, εκείνη του πιο μικρού χώρου. Τη θεμελιώδη.
- 2) Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg αντιδρά στον περιορισμό του χώρου των ηλεκτρονίων, δηλαδή αντιδρά στον εντοπισμό της θέσης τους, αυξάνοντας πολύ την πίεση που ασκούν και άρα αυξάνοντας την αντίστασή τους στη σύνθλιψη.
- 3) Η απαγορευτική αρχή του Pauli αντιδρά στον περιορισμό του χώρου των ηλεκτρονίων. Απαγορεύει στα ηλεκτρόνια να βρεθούν όλα μαζί στον ίδιο μικρό χώρο της θεμελιώδους κβαντικής κατάστασης και επιδιώκει να τα κατανείμει σε διαφορετικές κβαντικές καταστάσεις, οι οποίες όμως είναι όλο και πιο μεγάλων χωρικών διαστάσεων.

Άρα μέσα στο άτομο λαμβάνει χώρα ένα μπρα-ντε-φερ ισορροπίας ανάμεσα στις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις από τη μια πλευρά που θέλουν να συνθλίψουν το άτομο ρίχνοντας όλα τα ηλεκτρόνια πάνω στον πυρήνα και στις αρχές αβεβαιότητας και Pauli από την άλλη που αντιστέκονται.

Οποιαδήποτε προσπάθεια αλλαγής στο μέγεθος του χώρου του ατόμου, είτε μείωση είτε αύξηση, οδηγεί σε ισχυροποίηση του ενός έναντι του άλλου αντίπαλου και έτσι γρήγορα επανέρχεται ισορροπία. Εξαιτίας αυτής της ισορροπίας τα άτομα διατηρούν τον χώρο τους ή γενικότερα αντιστέκονται ισχυρότατα στη μείωσή του. Τα άτομα είναι ουσιαστικά ασυμπίεστα.

Αριθμητικό παράδειγμα

Ας βρούμε με εντελώς απλοϊκούς υπολογισμούς τη μικρότερη τάξη μεγέθους της πίεσης που απαιτείται για να μειωθεί η ακτίνα ενός ατόμου στο μισό.

Απάντηση

Για ευκολία ας πάρουμε το άτομο του υδρογόνου. Η ακτίνα του είναι $a \approx 10^{-10} \text{ m}$.

Από τη σχέση 6.12 η ενέργεια του ηλεκτρονίου του, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, είναι της τάξης του

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Αν το άτομο αυτό συμπιεστεί ώστε η ακτίνα του να γίνει $\alpha' \approx 0,5\alpha$ η ενέργεια του ηλεκτρονίου θα γίνει

$$\langle E'_{κιν} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m\alpha'^2} = \frac{1}{0,25} \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}$$

Η μεταβολή ΔU της «εσωτερικής» ενέργειας του ατόμου είναι

$$\Delta U = \Delta E = \langle E'_{κιν} \rangle - \langle E_{κιν} \rangle = 3 \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}$$

Η μεταβολή του όγκου του ατόμου του υδρογόνου είναι

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(\alpha'^3 - \alpha^3) = -\frac{7\pi\alpha^3}{6}$$

Υποθέτουμε ότι η παραπάνω μεταβολή ΔU της «εσωτερικής» ενέργειας του ατόμου υδρογόνου και συνεπώς η μεταβολή ΔV του όγκου του έγινε με πίεση P και με τρόπο ώστε να δικαιολογεί την παρακάτω «αδιαβατική» γραφή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου

$$PdV = -dU \Rightarrow P\Delta V = -\Delta U \Rightarrow P \frac{7\pi\alpha^3}{6} = 3 \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει

$$P \approx 5 \cdot 10^6 atm$$

Άρα για να μειωθεί στο μισό η ακτίνα ενός ατόμου απαιτούνται πιέσεις εκατομμυρίων ατμοσφαιρών. Για μια αντίληψη του μεγέθους αυτής της πίεσης ας σκεφτούμε ότι οι πιέσεις στον πυρήνα της Γης είναι περίπου $3,2 \cdot 10^6 atm$

Άρα το άτομο είναι πάρα πολύ δύσκολο να παραμορφωθεί. Μπορεί και κρατά πάνω στους «ώμους» του όλο το βάρος της Γης. Το άτομο είναι ένας Άτλας.

Παρατηρήσεις

α) Καταλαβαίνετε τώρα γιατί μπορούμε να περπατάμε πάνω στο έδαφος χωρίς να κινδυνεύουμε να υποχωρήσουν τα ηλεκτρόνια των κενών ατόμων του και να βουλιάξουμε.

Στα αέρια και στα υγρά δεν μπορούμε να περπατήσουμε, γιατί παραμερίζουν ολόκληρα τα άτομα των υγρών και των αερίων ως συγκροτήματα και μας επιτρέπουν να περάσουμε ανάμεσά τους. Συμβαίνει κάτι όπως όταν βαδίζουμε μέσα σε πλήθος ανθρώπων, όπου παραμερίζουν οι άλλοι για να περάσουμε.

β) Ευτυχώς που τα άτομα είναι ασυμπίεστα, γιατί αν τα άτομα συμπιέζονταν και «έφευγε» το κενό από μέσα τους όλα γύρω μας θα γίνονταν αφάνταστα μικρά. Τα σώματά μας δε θα μπορούσαμε να τα διακρίνουμε και συνεπώς δεν θα υπήρχαμε. Άρα το ότι υπάρχουμε και υπάρχουν τόσα όμορφα πράγματα γύρω μας το οφείλουμε και στην αρχή της αβεβαιότητας που δεν αφήνει τα άτομα να συνθλιβούν.

6.12 Η πυρηνική ενέργεια είναι εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη της χημικής

Στην εφαρμογή 6.10 είχαμε αναφέρει ότι αν σωματίδιο εγκλωβιστεί σε χώρο που προσδιορίζεται από μήκος a , τότε η μέση (κινητική) του ενέργεια είναι

$$\langle E_{κιν} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (6.12)$$

Τα νουκλεόνια είναι εγκλωβισμένα στον ατομικό πυρήνα που έχει ακτίνα $a \approx 10^{-15}m$ και συνεπώς η μέση ενέργεια του καθενός από αυτά είναι τάξης μεγέθους

$$\langle E_{νουκ} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m_{νουκ}a_{\piυρ}^2}$$

Αντικαθιστώντας

$$\langle E_{νουκ} \rangle \approx \frac{(1,055 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (10^{-15})^2} = 3,33 \cdot 10^{-12} \text{ joules}$$

και τελικά

$$\langle E_{νουκ} \rangle \approx 20 \text{ MeV}$$

Τα ηλεκτρόνια είναι εγκλωβισμένα σε πιο μεγάλο χώρο, το χώρο του ατόμου ο οποίος έχει ακτίνα $a \approx 10^{-10}m$. Συνεπώς η μέση ενέργεια του κάθε ηλεκτρονίου είναι

$$\langle E_{ηλεκ} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m_{ηλεκ}a_{ατομ}^2}$$

Αντικαθιστώντας

$$\langle E_{ηλεκ} \rangle \approx \frac{(1,055 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-10})^2} = 6,11 \cdot 10^{-19} \text{ joules}$$

και τελικά

$$\langle E_{ηλεκ} \rangle \approx 3,8 \text{ eV}$$

Άρα η ενέργεια των ηλεκτρονίων των ατόμων είναι μερικά eV, ενώ των νουκλεονίων του πυρήνα είναι εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη.

Παρατήρηση

Οι πυρηνικές αντιδράσεις, οι οποίες ουσιαστικά ελευθερώνουν την ενέργεια των νουκλεονίων των πυρήνων, συνοδεύονται από ενέργειες εκατομμύρια φορές μεγαλύτερες από τις ενέργειες των χημικών αντιδράσεων, που ουσιαστικά ελευθερώνουν την ενέργεια των ηλεκτρονίων των ατόμων.

Γι' αυτό οι πυρηνικές βόμβες είναι συντριπτικά ισχυρότερες από τις χημικές βόμβες α-κόμη και της νιτρογλυκερίνης. Μια πυρηνική βόμβα αντιστοιχεί σε τόνους νιτρογλυκερίνης

6.13 Άσπροι νάνοι και αστέρες νετρονίων

Όπως είπαμε, ένας λόγος που υπάρχουν τα άτομα, και άρα υπάρχουν τόσα όμορφα πράγματα γύρω μας, είναι και γιατί στο εσωτερικό τους διαδραματίζεται μια καταπληκτική ισορροπία που τα κάνει ασυμπίεστα, τουλάχιστον για τα καθημερινά μας δεδομένα. Από τη μια μεριά οι ηλεκτρομαγνητικές έλξεις που θέλουν να τα συνθλίψουν τραβώντας όλα τα ηλεκτρόνια πάνω στον πυρήνα του ατόμου και από τη μια μεριά οι αρχές αβεβαιότητας (κυρίως) και Pauli που αντιστέκονται.

Για τα άτομα όμως που βρίσκονται στο εσωτερικό της Γης οι πιέσεις είναι πολύ μεγάλες. Στις ηλεκτρομαγνητικές έλξεις του πυρήνα των ατόμων έχει προστεθεί και το βάρος των υπερκειμένων μαζών (βουνά, θάλασσες, πετρώματα κ.λπ.) που σπρώχνει τα ηλεκτρόνια του κάθε ατόμου προς τον πυρήνα του. Σε αυτές τις συνθήκες τα άτομα παραμορφώνονται, το μέγεθος τους μικραίνει, αλλά μπορούν ακόμη να αντιστέκονται και να διατηρούν την ταυτότητά τους. Κυριολεκτικά κρατάνε τη Γη «στους ώμους» τους (βλέπε σελ.97).

Στο εσωτερικό των άστρων τα πράγματα για τα άτομα είναι δύσκολα. Το βάρος των υπερκειμένων μαζών που τα πιέζει είναι τεράστιο και οι διαδικασίες που συμβαίνουν γύρω τους είναι σφοδρότατες: υψηλές θερμοκρασίες, σφοδρότατες συγκρούσεις μεταξύ σωματιδίων, πυρηνικές αντιδράσεις, ραδιενέργειες, βίαιες εκρήξεις τοπικές ή καθολικές κλπ. Σε τέτοιες συνθήκες τα άτομα δεν αντέχουν, σπάνε και όλα μαζί (πυρήνες, ηλεκτρόνια, φωτόνια, νουκλεόνια κλπ) γίνονται μια νέα κατάσταση ύλης που ονομάζεται **πλάσμα**.

Όμως σε κάποιες περιπτώσεις άστρων οι συνθήκες στο εσωτερικό τους είναι τόσο δύσκολες, που τα άτομα όχι μόνο έχουν ήδη σπάσει, αλλά όλο το αστρικό υλικό έχει γίνει μια «σούπα» με διάφορα σωματίδια, πυρήνες, νουκλεόνια, φωτόνια, ηλεκτρόνια κλπ, η οποία λόγω των τεράστιου βάρους των υπερκειμένων μαζών συνεχώς συρρικνώνεται. Μαζί με τη «σούπα» που μικραίνει σε όγκο, καταρρέει και ολόκληρο το αστέρι.

Τα ηλεκτρόνια, στο εσωτερικό ενός τέτοιου άστρου σε κατάρρευση, έχοντας ήδη χάσει τον τεράστιο κενό χώρο των ατόμων όπου κάποτε «ζούσαν», «νιώθουν» τώρα πάρα πολύ στριμωγμένα. Και το κακό είναι ότι ο χώρος που αναλογεί στο κάθε ηλεκτρόνιο γίνεται όλο και πιο μικρός, καθώς η τρομερή βαρύτητα κάνει το αστέρι να καταρρέει.

Τότε είναι που οι αρχές αβεβαιότητας και Pauli αντιδρούν εντονότατα στον παραπέρα εντοπισμό της θέσης των ηλεκτρονίων και στον εκφυλισμό τους (δηλαδή στο στρίμωγμά τους σε κβαντικές καταστάσεις «μικρότερου χώρου»), αυξάνοντας πάρα πολύ την ενέργειά τους και την πίεση που ασκούν στο εσωτερικό του άστρου. Έτσι σταματά η περαιτέρω σύνθλιψη του χώρου τους και άρα η κατάρρευση του αστεριού.

Το αστρικό πτώμα που προκύπτει σε αυτή την περίπτωση λέγεται **λευκός νάνος**.

Στο εσωτερικό λοιπόν ενός λευκού νάνου δημιουργούνται νέες ισορροπίες με πρωταγωνιστές τα υπερβολικά στριμωγμένα ηλεκτρόνια,:

- 1) Οι ηλεκτρομαγνητικές έλξεις^(*) των νουκλεονίων των πυρήνων και η τεράστια βαρύτητα θέλουν να σπρώξουν όλα τα ηλεκτρόνια πάνω στα νουκλεόνια περιορίζοντας τους ακόμη περισσότερο τον διαθέσιμο χώρο και στριμώχνοντάς τα όλα σε όσο το δυνατό πιο «στενόχωρες» κβαντικές καταστάσεις.

^(*) Τα πράγματα με τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις είναι πιο «περίεργα» τώρα, γιατί λόγω της μείωσης του χώρου έχουν αυξηθεί και οι έλξεις των πρωτονίων αλλά και οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των ηλεκτρονίων.

- 2) Η αρχή της αβεβαιότητας αντιδρά έντονα στον επιπλέον περιορισμό του χώρου των ηλεκτρονίων (δηλαδή αντιδρά στον εντοπισμό τους) αυξάνοντας κατά πολύ την πίεσή τους και άρα την αντίστασή τους στη σύνθλιψη.
- 3) Η αρχή του Pauli αντιδρά εντονότατα στον περιορισμό του χώρου των ηλεκτρονίων απαγορεύοντας στα ηλεκτρόνια να βρεθούν όλα μαζί στον ίδιο μικρό χώρο κάποιας θεμελιώδους κβαντικής κατάστασης. Τα θέλει κατανεμημένα σε διαφορετικές καταστάσεις όλο και πιο μεγάλων χωρικών διαστάσεων, όσο βέβαια γίνεται.

Άρα στο εσωτερικό του λευκού νάνου παίζεται ένα καινούριο μπρα-ντε-φερ ισορροπίας ανάμεσα στις ηλεκτρομαγνητικές και βαρυτικές δυνάμεις από τη μια πλευρά και στις αρχές αβεβαιότητας και Pauli από την άλλη. Οποιαδήποτε προσπάθεια αλλαγής στο μέγεθος του διαθέσιμου χώρου, είτε μείωση είτε αύξηση, οδηγεί σε ισχυροποίηση του αντιπάλου που πάει να «αδικηθεί» έναντι του άλλου και έτσι γρήγορα επανέρχεται ισορροπία.

Αυτός, με απλά λόγια, είναι ο λόγος που οι λευκοί νάνοι αποφεύγουν τη βαρυτική κατάρρευση. Κυριολεκτικά στηρίζονται στους ώμους των ηλεκτρονίων, τα οποία έγιναν ικανά να παίξουν αυτόν τον τόσο δυσβάστακτο ρόλο από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg και την απαγορευτική αρχή του Pauli.

Όμως η βαρύτητα είναι ανελέητη και μπορεί να μεγαλώνει ασταμάτητα. Αν λοιπόν προστεθεί και άλλη μάζα πάνω από τα ηλεκτρόνια του εσωτερικού ενός λευκού νάνου, αυτά δεν θα αντέξουν το βάρος. Θα σπρωχτούν βίαια προς τα νουκλεόνια, θα «αντιδράσουν» με τα πρωτόνια και θα μετατραπούν όλα σε νετρόνια.

Το καινούριο αστρικό πτώμα, λέγεται **αστέρι νετρονίων** και είναι ουσιαστικά ένας μεγάλος πυρήνας, σαν εκείνο του ατόμου, αλλά έχοντας μέσα του μόνο νετρόνια. Τα νετρόνια βρίσκονται τώρα στο μικρό χώρο του εσωτερικού ενός τρομερά συμπαγούς αστρικού αντικειμένου όπου επικρατούν τρομακτικές βαρυτικές δυνάμεις. Το κακό όμως δεν είναι που τα νετρόνια είναι πάρα πολύ στριμωγμένα, ας πούμε όπως ήταν κάποτε μέσα στον πυρήνα ενός ατόμου, αλλά το ότι η βαρύτητα θέλει να τα συμπιέσει ακόμη περισσότερο και να τους περιορίσει ακόμη πιο πολύ τον διαθέσιμο χώρο τους.

Το νέο μπρα ντε φερ για ακόμη πιο ισχυρούς παίχτες φτάνει σε ισορροπία:

- 1) Η βαρύτητα θέλει να περιορίσει τον ήδη ελάχιστο διαθέσιμο χώρο των νετρονίων
- 2) Η αρχή της αβεβαιότητας αντιδρά στον εντοπισμό τους και στην επιπλέον σύνθλιψη του χώρου των νετρονίων
- 3) Η αρχή του Pauli απαγορεύει να βρεθούν όλα τα νετρόνια στην ίδια κβαντική κατάσταση

Αυτός, με απλά λόγια, είναι ο λόγος που οι αστέρες νετρονίων αποφεύγουν τη βαρυτική κατάρρευση. Κυριολεκτικά στηρίζονται στους ώμους των νετρονίων, τα οποία έγιναν ικανά να παίξουν αυτόν τον τόσο δυσβάστακτο ρόλο από την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg και την απαγορευτική αρχή του Pauli.

Ερώτηση

Κι αν προστεθεί κι άλλη αστρική μάζα πάνω από τα νετρόνια; Πόσο θα αντέξουν οι δύο αρχές απέναντι στη βαρύτητα η οποία με τη συνεχή προσθήκη μάζας μπορεί να μεγαλώνει ακατάπαυστα και άρα να πιέζει όλο και πιο πολύ;

Απάντηση

Αν μεγαλώσει και άλλο η μάζα του αστέρα νετρονίων, τα νετρόνια δεν θα αντέξουν και όλα θα συνθλιβούν-εξαφανιστούν σε έναν ασύλληπτα παραμορφωμένο χωρόχρονο, όπου δεν θα υπάρχει πια πουθενά μάζα, αλλά μόνο μια τρομερή αυτοσυντηρούμενη χωροχρονική παραμόρφωση. Θα δημιουργηθεί μια **μαύρη τρύπα**

Επειδή όμως κανείς δεν ξέρει με σιγουριά τι γίνεται μέσα σε μια μαύρη τρύπα, παρά μόνο θεωρίες υπάρχουν, βρίσκω την ευκαιρία να διατυπώσω και γω τις «ελπίδες» μου:

Κάπου εκεί μέσα στη μαύρη τρύπα, ίσως κάποιες οντότητες (παράξενα, υπερβολικά μικρά σωματίδια χώρου, τα χωρόνια ας πούμε) αντιστέκονται στην βαρύτητα λόγω των αρχών της αβεβαιότητας και του Pauli. Θέλω να ελπίζω δηλαδή ότι η Βαρύτητα και οι δύο Αρχές πάλι συναντιούνται, κάπου μέσα στη μαύρη τρύπα, με παράξενους παράλληλους ρόλους και σε μια παράξενη, πρωτόγνωρη ισορροπία. Πάντα έχουμε δικαίωμα στην ιδέα, όσο παράξενη και να είναι. Ειδικά όταν ακόμη δεν έχουμε στα χέρια μας μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας.

6.14 Φορτισμένο σωματίδιο σε μαγνητικό πεδίο

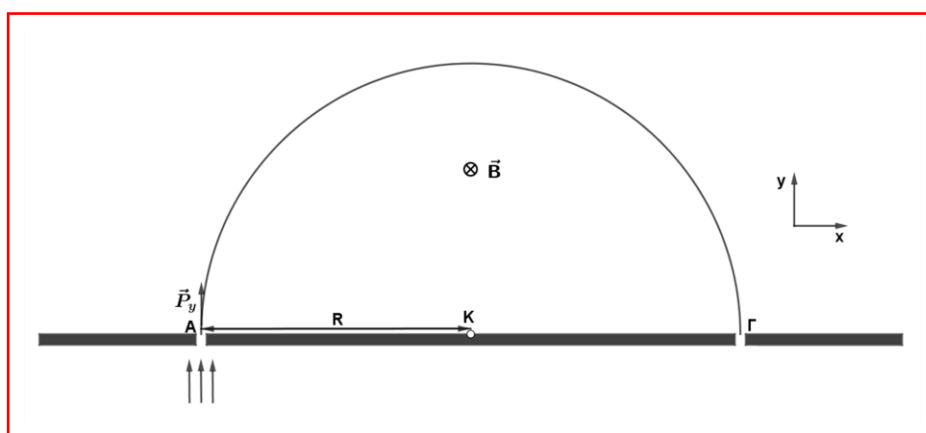
Φορτισμένο σωματίδιο, ας πούμε ηλεκτρόνιο, εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο σταθερής έντασης $\vec{B}$ και αφού διαγράψει ημικύκλιο φτάνει στην έξοδο Γ (σχήμα 6.7). Τα ανοίγματα των σχισμών Α και Γ είναι αντίστοιχα $2a$ και 2γ .

Σκοπός του πειράματος

Θα «μετρήσουμε» ταυτόχρονα την γ-ορμή p_y και την γ-θέση του ηλεκτρονίου εκείνη ακριβώς τη στιγμή που το ηλεκτρόνιο μόλις έχει βγει από τη σχισμή και μπει στο πεδίο για να δούμε αν επαληθεύεται η αρχή της αβεβαιότητας στον άξονα γ.

Υπενθυμίσεις

1) Αν το ηλεκτρόνιο μπει στο πεδίο με ορμή p_y αυστηρά κατά τον ημιάξονα Ογ θα διαγράψει ημικύκλιο ακτίνας R.



Σχήμα 6.7: Μια κλασική (μη κβαντική) εικόνα εισόδου ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο. Η ακριβής μέτρηση της ακτίνας δίνει ακριβή τιμή του μέτρου της p_y

Το μέτρο της ορμής του ηλεκτρονίου συνδέεται με την ακτίνα

$$p_y = BeR \quad (6.13)$$

Η διάρκεια της κίνησής του μέχρι τη σχισμή Γ είναι ανεξάρτητη της ορμής του

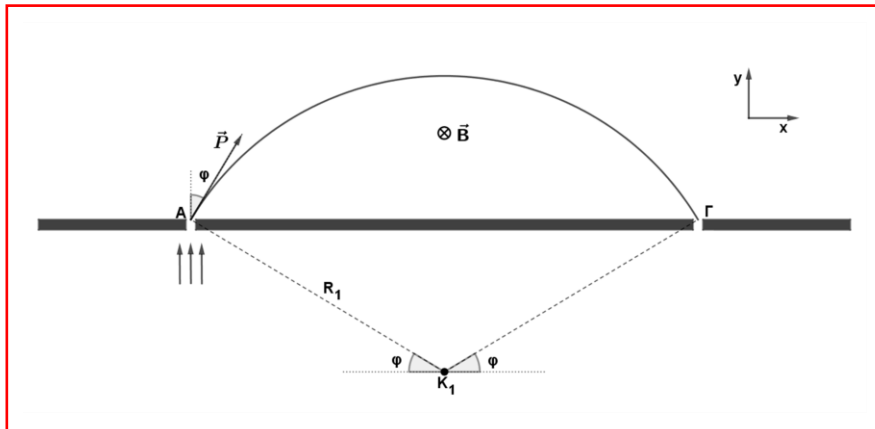
$$t' = \frac{\pi m}{eB} \quad (6.14)$$

2) Αν το ηλεκτρόνιο μπει στο πεδίο υπό γωνία φ ως προς τον ημιάξονα Oy (σχήμα 6.8) θα διαγράψει τόξο και ο χρόνος που θα χρειαστεί για να φτάσει στη σχισμή Γ θα είναι

$$t = \frac{(\pi \pm 2\varphi)m}{eB} \quad (6.15)$$

(Το $\pm$ αναφέρεται στο γεγονός ότι η γωνία φ μπορεί να είναι και «αριστερά» του Oy.)

Άρα ο χρόνος t που απαιτείται για να φτάσει το ηλεκτρόνιο στο Γ είναι ανεξάρτητος της ορμής και εξαρτάται αποκλειστικά από τη γωνία φ .



Σχήμα 6.8: Το ηλεκτρόνιο μπαίνει υπό γωνία φ και διαγράφει τόξο. Η διαφορά της χρονικής διάρκειας της κίνησής του από εκείνη του σχήματος 6.7 εξαρτάται αποκλειστικά από τη γωνία εισόδου φ

Συνεπώς η διαφορά χρόνου άφιξης στο Γ μεταξύ εκείνων των ηλεκτρονίων που μπαίνουν στο μαγνητικό πεδίο ακριβώς με την κατεύθυνση του Oy και εκείνων που μπαίνουν με γωνία φ ως προς τον Oy είναι

$$|t' - t| = \frac{2\varphi m}{eB} \quad (6.16)$$

3) Σύμφωνα με την εφαρμογή 6.6 της σελίδας 86 **η διέλευση του ηλεκτρονίου από τη σχισμή Α είναι καθαρά κβαντικό φαινόμενο, ανεξέλεγκτο και συνοδεύεται από φαινόμενα περίθλασης**

Αν ηλεκτρόνια ορμής p_y επιχειρήσουν να περάσουν από σχισμή που έχει x -άνοιγμα α , τότε η x -ορμή τους θα διαταραχθεί ανεξέλεγκτα και η είσοδό τους στο μαγνητικό πεδίο θα

γίνει με ανεξέλεγκτες γωνίες (ως προς τον ημιάξονα Oy) που οι τιμές τους θα φτάνουν μέχρι την «τάξη μεγέθους» μιας γωνίας φ τέτοιας ώστε να πληρείται η σχέση (6.3)

$$\tan\varphi \approx \frac{\hbar}{\alpha p_y}$$

Επειδή η φ είναι γενικά μικρή, το φάσμα $\Delta\varphi$ των γωνιών εισόδου στο μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$\Delta\varphi \approx \frac{\hbar}{\alpha p_y} \quad (6.17)$$

«Το πείραμα»- Θεωρητικοί υπολογισμοί

Μια στιγμή «πριν» αρχίσει η μέτρηση, δηλαδή «μια στιγμή πριν από εκείνη» που το ηλεκτρόνιο βγαίνει από τη σχισμή και μπαίνει στο πεδίο, η κατάσταση έχει ως εξής:

- Η κατεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου είναι ορισμένη με ακρίβεια και λαμβάνεται ως ημιάξονας Oy
- Η y -θέση του ηλεκτρονίου είναι ακριβώς y_A
- Η y -ορμή του ηλεκτρονίου είναι απροσδιόριστη
- Η x -ορμή και η z -ορμή του ηλεκτρονίου είναι μηδέν

Η μέτρηση:

Μετράμε την απόσταση των δύο οπών A και Γ. Η ακτίνα R του ημικυκλίου που διαγράφει το ηλεκτρόνιο είναι το μισό αυτής της απόστασης και συνεπώς η ορμή του ηλεκτρονίου είναι

$$p_y = BeR$$

Επειδή τα ανοίγματα των δύο οπών A και Γ είναι αντίστοιχα 2α και 2γ η μέτρηση της ακτίνας R συνοδεύεται από αβεβαιότητα $\Delta R = \alpha + \gamma$ και συνεπώς η μέτρηση της ορμής του ηλεκτρονίου έγινε με αβεβαιότητα

$$\Delta p_y = Be\Delta R = Be(\alpha + \gamma) \quad (6.18)$$

Με το που περνά το ηλεκτρόνιο από τη σχισμή A θα έχει εισαχθεί στην ορμή του μια ανεξέλεγκτη γωνία με τον Oy η οποία θα έχει φάσμα τιμών (σχέση 6.17)

$$\Delta\varphi \approx \frac{\hbar}{\alpha p_y}$$

και συνεπώς η στιγμή που το ηλεκτρόνιο θα φτάσει στη σχισμή Γ θα έχει απροσδιοριστία σε σχέση με την ιδανική κατάσταση του σχήματος 6.7 (σχέση 6.16)

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \Delta\varphi \cdot m}{e \cdot B} \approx \frac{2 \cdot \hbar \cdot m}{e \cdot B \cdot \alpha \cdot p_y} \quad (6.19)$$

Η απροσδιοριστία αυτή έχει να κάνει με τη γ -θέση του ηλεκτρονίου ευθύς μόλις πέρασε την σχισμή A και είχε πιθανή τιμή p_y της γ -ορμής που μετρήθηκε μέσω της ακτίνας R.

Άρα η απροσδιοριστία στη θέση του ηλεκτρονίου είναι

$$\Delta y \approx \frac{p_y}{m} \Delta t = \frac{2\hbar}{\alpha e B} \quad (6.20)$$

Επομένως

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \frac{2\hbar}{\alpha e B} \cdot Be(\alpha + \gamma)$$

δηλαδή

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx 2\hbar \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Προφανώς η καλύτερη προσέγγισή θα ήταν να κλείσουμε τη σχισμή Γ οπότε $\gamma=0$. Τότε «οι μετρήσεις» θα δώσουν

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx 2\hbar$$

Εξάλλου, αν το καλοσκεφτούμε, το άνοιγμα της Γ δεν έπαιξε κάποιο ρόλο στις μετρήσεις μας και συνεπώς όλο το πρόβλημά είναι το άνοιγμα της σχισμής A.

Παρατήρηση

Αν τα σημεία εισόδου και εξόδου A και Γ ήταν μαθηματικά σημεία θα μπορούσαμε θεωρητικά να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια την ακτίνα R και συνεπώς θα είχαμε μια απόλυτα ακριβή τιμή και για την γ -ορμή εισόδου p_y του ηλεκτρονίου.

Κατόπιν από τη σχέση (6.14) θα βρίσκαμε ακριβώς τη διάρκεια κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στο πεδίο και συνεπώς την ακριβή τιμή της γ -θέσης εισόδου.

Όμως τα A και Γ δεν είναι μαθηματικά σημεία, αλλά ανοίγματα σχισμών που περιορίζουν την ακρίβεια στη μέτρηση της ακτίνας και συνεπώς την ακρίβεια στην μέτρηση της p_y . Αλλά αυτό το πρόβλημα ελέγχεται γιατί θα μπορούσαμε, έστω και θεωρητικά, να μικρύνουμε όσο θέλουμε τα ανοίγματα A και Γ ώστε η μέτρηση της R, άρα και η μέτρηση της p_y , να γίνουν όσο ακριβείς θέλουμε. Στο θεωρητικό όριο που τα ανοίγματα των σχισμών A και Γ θα έτειναν στο μηδέν η ακρίβεια στη μέτρηση της p_y θα γινόταν απόλυτη.

Το βασικό πρόβλημα μέτρησης σε αυτό το πείραμα είναι το πέρασμα του ηλεκτρονίου από τη σχισμή το οποίο είναι καθαρά κβαντικό φαινόμενο και συνεπώς εντελώς ανεξέλεγκτο, ακόμη και θεωρητικά.

Το πέρασμα από τη σχισμή A δημιουργεί αβεβαιότητα Δp_x στην x -ορμή εισόδου του ηλεκτρονίου στο πεδίο και άρα ανεξέλεγκτη γωνία εισόδου. Αυτό σημαίνει ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης στο μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια ό,τι και να κάνουμε, γεγονός που δημιουργεί αβεβαιότητα στην αρχική γ -θέση εισόδου.

6.15 «Ανακαλύπτοντας» σωματίδια αλληλεπιδράσεων

Οι αρχές της αβεβαιότητας εφαρμόζονται σε πολλές περιπτώσεις, ακόμη κι αν αγνοούμε τις λεπτομέρειες κάποιας διαδικασίας.

Ας υποθέσουμε ότι ένα κβάντο M μιας αλληλεπίδρασης (π.χ. ασθενούς, ισχυρής, ηλεκτρομαγνητικής, άγνωστης ακόμη) είναι υπεύθυνο π.χ. για μια σκέδαση ή για μια «αντίδραση» ή για μια μετατροπή σωματιδίων σε άλλα κ.λπ.

Αν ΔE είναι το εύρος των πιθανών ενεργειών που μπορούν για κάποιο λόγο (συνήθως νόμοι διατήρησης) να αποδοθούν στο υπό «ανακάλυψη» κβάντο, τότε ο μέσος χρόνος ζωής του είναι

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E}$$

Προφανώς όσο πιο μεγάλο είναι το εύρος ενεργειών ΔE που συνδέεται με το (κβαντικό) σωματίδιο M , τόσο πιο βραχύβιο είναι και άρα τόσο πιο γρήγορα τελειώνει η διαδικασία (το φαινόμενο) στην οποία συμμετέχει.

1ο παράδειγμα: Το μποζόνιο Z^0

Το εύρος του φάσματος των ενεργειών που είναι συνδεδεμένο με πειράματα του φορέα Z^0 της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι της τάξεως των μερικών GeV.

Άρα για το Z^0 μποζόνιο

$$\Delta E \approx 10^9 eV = 1,602 \cdot 10^{-10} J$$

και συνεπώς ο μέσος χρόνος ζωής του είναι της τάξεως

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \approx \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{1,602 \cdot 10^{-10}} \approx 10^{-24} s$$

2ο παράδειγμα: Το π-μεσόνιο

Οι δυνάμεις που συγκρατούν τα νουκλεόνια στον πυρήνα είναι οι ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις μεταξύ των κουάρκ των νουκλεονίων. Με άλλα λόγια οι δυνάμεις μεταξύ των νουκλεονίων οφείλονται ουσιαστικά σε ανταλλαγή γκλουονίων μεταξύ των κουάρκ τους.

Υπάρχουν όμως λόγοι που μπορούμε να αγνοήσουμε τη δομή των νουκλεονίων και να θεωρήσουμε ότι η ισχυρή πυρηνική έλξη μεταξύ τους οφείλεται σε ανταλλαγή κάποιων σωματιδίων, όπως είχε προβλέψει ο Yukawa

Η εμβέλεια των ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων είναι

$$\alpha \approx 1,5 fm = 1,5 \cdot 10^{-15} m$$

Θεωρώντας ότι η ταχύτητα διάδοσης των ισχυρών πυρηνικών δυνάμεων είναι συγκρίσιμη με αυτή του φωτός, μπορούμε να πούμε ότι ο μέσος χρόνος ζωής του φορέα τους είναι της τάξεως

$$\tau \approx \frac{\alpha}{c} \approx \frac{1,5 \cdot 10^{-15}}{3 \cdot 10^8} = 0,5 \cdot 10^{-23} s$$

και συνεπώς η ενέργεια του φορέα θα είναι της τάξης της αβεβαιότητας των ενεργειών

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \cdot 2}{10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^{-11} J$$

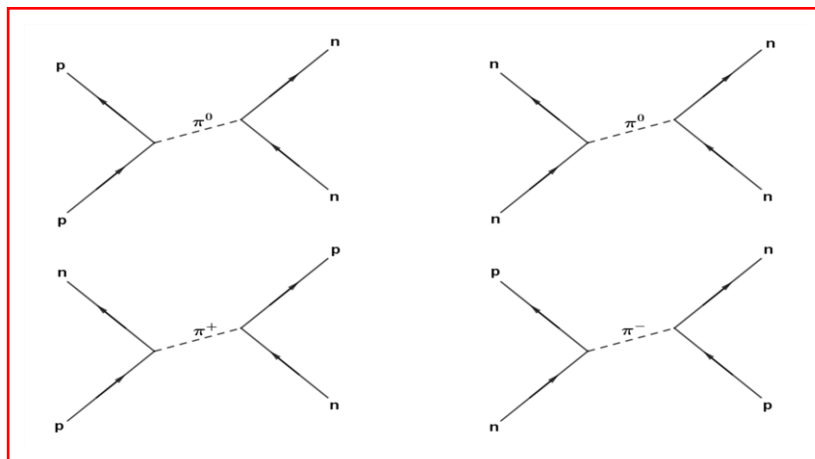
Άρα η μάζα του θα είναι

$$m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx \frac{2 \cdot 10^{-11}}{9 \cdot 10^{16}} = 0,22 \cdot 10^{-27} Kg$$

Με δεδομένο ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} Kg$ προκύπτει ότι η μάζα του φορέα των πυρηνικών δυνάμεων κατά Yukawa είναι

$$m \approx 240 m_e$$

Επειδή η μάζα του «άγνωστου» σωματιδίου ήταν μεγαλύτερη της μάζας του ηλεκτρονίου, αλλά μικρότερη εκείνης του πρωτονίου ($m_p \approx 1836 m_e$) ονομάστηκε **μεσόνιο**.



Σχήμα 6.9: Ισχυρές αλληλεπιδράσεις νουκλεονίων τύπου θεωρίας Yukawa. Ουσιαστικά πρόκειται για ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των κουάρκ των νουκλεονίων, οι οποίες εκλήφθηκαν ως ανταλλαγή π-μεσονίων μεταξύ των νουκλεονίων. Τα παραπάνω είναι κάτι σαν «πυρηνικά» διαγράμματα τύπου Feynman.

Παρατηρήσεις

α) Τελικά το σωματίδιο που ανταλλάσσεται είναι το π-μεσόνιο κι η θεωρία του Yukawa προέβλεπε 3 μεσόνια. Τα π^0 , π^+ και π^- τα οποία σύντομα ανακαλύφθηκαν με μεγάλη ακρίβεια στις μάζες τους

β) Τα π-μεσόνια (πιόνια) δεν είναι στοιχειώδη σωματίδια αλλά, όπως όλα τα μεσόνια, αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ.

Παρόλο που δεν είναι στοιχειώδη διασπώνται τελικά σε στοιχειώδη σωματίδια, όπως είναι τα λεπτόνια (ηλεκτρόνια και νετρίνα, ύλης και αντιύλης)

γ) Τα π- μεσόνια αλληλοεπιδρούν ισχυρά με την ύλη. Ο τρόπος αλληλεπίδρασης των νουκλεονίων μέσω π-μεσονίων δίνεται απλά στο σχήμα 6.9.

6.16 Διαλύοντας την έννοια της τροχιάς

Έστω σώμα του οποίου το μέγεθος χαρακτηρίζεται από ένα μήκος α (π.χ. το μέγεθος του κύβου χαρακτηρίζεται από την ακμή του). Αν δε επιμείνουμε σε μαθηματικές αυστηρότητες, το να πούμε ότι το σώμα κινείται πάνω σε τροχιά, εννοούμε ότι βρίσκεται πάνω σε μια γραμμή της οποίας το «πάχος» είναι μικρότερο από το α .

Άρα στη μία τουλάχιστον από τις τρεις διαστάσεις του χώρου (σε κείνη που μετράμε το «πάχος» της τροχιάς), την οποία ας πούμε x -άξονα, γνωρίζουμε τη θέση του σώματος με ακρίβεια μικρότερη από το μήκος α , που χαρακτηρίζει το μέγεθος του σώματος

Τότε στον άξονα αυτόν ξέρω τη θέση του σώματος με αβεβαιότητα $\Delta x \approx \alpha$ και συνεπώς η αβεβαιότητα της x -ορμής θα είναι

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\alpha}$$

και συνεπώς η αβεβαιότητα στην ταχύτητα είναι

$$\Delta v_x \approx \frac{\hbar}{m\alpha}$$

Αριθμητικό παράδειγμα

Ένας μικροοργανισμός (π.χ. πιο μικρός και από άκαρι) με μέγεθος 1 χιλιοστό του χιλιοστού του μέτρου (αυτό το πλάσμα δε φαίνεται με γυμνό μάτι) ας υποθέσουμε ότι έχει μάζα 1 χιλιοστό του χιλιοστού του γραμμαρίου.

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η κίνηση του μικροοργανισμού σε τροχιά δημιουργεί αβεβαιότητες στην ταχύτητα της τάξης του

$$\Delta v_x \approx \frac{10^{-34}}{10^{-9} \cdot 10^{-6}} = 10^{-19} m/s$$

Η αβεβαιότητα αυτή είναι τόσο μικρή που μας επιτρέπει να γνωρίζουμε πάρα πολύ καλά τη θέση και την ταχύτητά του μικροοργανισμού και άρα να μιλάμε για την «τροχιά» του.

Για ένα υποατομικό σωματίδιο όμως τα πράγματα είναι δραματικά.

Το ηλεκτρόνιο π.χ. είναι ένα σωματίδιο που δε φαίνεται να έχει δομή και οι διαστάσεις του είναι μικρότερες από $\sim 10^{-18} m$.

Αν λοιπόν το ηλεκτρόνιο είχε τροχιά τότε η αβεβαιότητα στην ταχύτητά του σε έναν τουλάχιστον άξονα, τον x ας πούμε, θα ήταν

$$\Delta v_x > \frac{10^{-34}}{10^{-30} \cdot 10^{-18}} = 10^{14} m/s$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το ηλεκτρόνιο είχε τροχιά η αρχή της αβεβαιότητας θα του επέβαλε, ταχύτητες εκατοντάδες χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από την ταχύτητα του φωτός. Τα ίδια ισχύουν και για τα άλλα υποατομικά σωματίδια όπως τα πρωτόνια, νετρόνια κ.λπ.

Άρα η αρχή της αβεβαιότητας δεν επιτρέπει στα υποατομικά σωματίδια να έχουν τροχιές!

6.17 Η αποτυχία του ατομικού μοντέλου Rutherford

Το πείραμα του Rutherford έδωσε σημαντικές πληροφορίες για το εσωτερικό του ατόμου. Μεταξύ άλλων απέδειξε

- άμεσα την ύπαρξη ενός θετικά φορτισμένου πυρήνα, πάρα πολύ μικρού σε σχέση με τις διαστάσεις του ατόμου
- έμμεσα την εκτός πυρήνα παρουσία των ηλεκτρονίων σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από αυτόν ή έστω σε περιοχή πολύ μεγαλύτερη από τον πυρήνα.

Υπήρχε όμως μια «ευλογημένη» αυθαιρεσία που «έφερε» θεωρίες σε σύγκρουση και τελικά απρόσμενη λύτρωση.

Η αυθαιρεσία

Μετά το πείραμα, η εικόνα που κυκλοφόρησε για το άτομο ήταν ότι τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από τον θετικά φορτισμένο πυρήνα σε κυκλικές ή ελλειπτικές **τροχιές**. Το άτομο δηλαδή έμοιαζε με ένα μικρό πλανητικό σύστημα (γι' αυτό το συγκεκριμένο ατομικό μοντέλο ονομάστηκε πλανητικό).

Όμως καμιά ένδειξη του πειράματος Rutherford και κανένα άλλο πείραμα από όσα ακολούθησαν όχι μόνο δεν απέδειξε, αλλά ούτε καν επέτρεψε στο ελάχιστο την υποψία ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται σε τροχιές.

Η έννοια της τροχιάς για τα ηλεκτρόνια δεν είχε καμιά μα καμιά πειραματική βάση. Ήταν μια αυθαιρεσία.

Η σύγκρουση

Η εικόνα αρνητικά φορτισμένων ηλεκτρονίων που περιφέρονται σε τροχιές γύρω από έναν θετικό πυρήνα οδήγησε αμέσως το ατομικό μοντέλο του Rutherford σε σύγκρουση με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία (CED). Τα ηλεκτρόνια, κινούμενα σε καμπυλόγραμμες τροχιές, επιταχύνονται και συνεπώς έπρεπε να ακτινοβολούν. Άρα να χάνουν συνεχώς ενέργεια με αποτέλεσμα να πέσουν ταχύτατα πάνω στον πυρήνα.

Προφανώς κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε κατάρρευση όλων των ατόμων και επομένως σε εξαφάνιση των ίδιων των Φυσικών και των συσκευών τους, κάτι όμως που διέψευδε η πραγματικότητα.

Η προσπάθεια

Χωρίς να εγκαταλείψουν την αυθαιρεσία για την ύπαρξη τροχιάς, οι Φυσικοί κοίταξαν να γλιτώσουν και το πλανητικό μοντέλο του Rutherford και την ηλεκτρομαγνητική θεωρία καταφεύγοντας σε σολομώντεια λύση:

- Τα ηλεκτρόνια κινούνται σε ορισμένες μόνο τροχιές που είναι επιτρεπόμενες.
- Τα ηλεκτρόνια ακτινοβολούν όταν επιταχύνονται, αλλά όταν οι τροχιές είναι επιτρεπόμενες δεν ακτινοβολούν.

Δηλαδή κατέφυγαν σε μια απόλυτα δικαιολογημένη αντίδραση με πολύ κλασική φυσική απέναντι στον τεράστιο σεισμό που άρχισε να κουνά σιγά σιγά το έδαφος της λογικής τους.

Το πρόβλημα για όλα τα ατομικά μοντέλα είχε ήδη ξεκινήσει. Όχι από το πάρα πολύ καλό πείραμα του Rutherford, όχι από τη σύγκρουση με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, αλλά

από το ότι χρησιμοποιήθηκε για τα ηλεκτρόνια η έννοια της τροχιάς χωρίς να έχει απολύτως καμιά πειραματική θεμελίωση.

Η δικαιολογία

Όλη η μηχανική του Νεύτωνα και όλη η μέχρι τότε (κλασική) Φυσική στηρίζονταν εξ ολοκλήρου στην έννοια της τροχιάς και στη συνέχεια των γραμμών γενικότερα. Νεύτωνα και γενικότερα κλασική Φυσική χωρίς την έννοια της τροχιάς δεν μπορεί να υπάρξει. Ο μαθηματικός φορμαλισμός τους απαιτεί συναρτήσεις τροχιάς και μάλιστα συνεχείς.

Η «λύτρωση»

Κανένα πείραμα δεν μπορεί να εξετάσει τροχιές ηλεκτρονίων στο άτομο. Και όσο μικρότερος είναι ο κατά Bohr κβαντικός αριθμός n της υπό εξέταση τροχιάς, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αποτυχία του πειράματος.

Οι αρχές αβεβαιότητας υποδεικνύουν ότι η έννοια της τροχιάς στα ατομικά σωματίδια τουλάχιστον, πρέπει να εγκαταλειφθεί γιατί δεν υφίσταται.

Παράδειγμα

Στην υποενότητα 6.16 ήδη αναλύθηκε η παραπάνω διαπίστωση. Ας τη δούμε όμως και με έναν άλλο τρόπο, εξετάζοντας για ευκολία το άτομο του υδρογόνου.

Για να αποκομίσουμε πειραματικά στοιχεία για την τροχιά του ηλεκτρονίου μέσα στο άτομο του υδρογόνου θα πρέπει να κάνουμε πολλές διαδοχικές μετρήσεις της θέσης του ηλεκτρονίου. Να κάνουμε δηλαδή μετρήσεις σε χώρο πολύ μικρότερο από την μέση ακτίνα a της τροχιάς του ηλεκτρονίου μέσα στο άτομο, ας πούμε σε χώρο $0,01a$.

Αν λοιπόν επιχειρήσουμε μετρήσεις τροχιάς με φωτόνια θα πρέπει να έχουν αβεβαιότητα θέσης $\Delta x \ll 0,01a$ και άρα φάσμα ορμών με εύρος $\Delta p \gg \hbar/0,01a$. Όμως για το φωτόνιο ισχύει $E = pc$ και άρα το εύρος του φάσματος ενεργειών τους θα είναι

$$\Delta E \gg \frac{\hbar c}{0,01a}$$

Όμως η μέση ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου εκφράζει και την τάξη της ακτίνας του ατόμου του υδρογόνου και συνεπώς $a \approx 10^{-10}m$.

Οι ενέργειες λοιπόν των φωτονίων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να μετρήσουν την τροχιά των ηλεκτρονίων στο άτομο είναι πολύ μεγαλύτερες από

$$E \gg \frac{\hbar c}{0,01a} = 3,165 \cdot 10^{-14}J$$

Όμως η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου σε χώρο μεγέθους a είναι τάξης μεγέθους

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} = 6 \cdot 10^{-19}J$$

Η ενέργεια αυτή αντιπροσωπεύει ουσιαστικά και την τάξη μεγέθους της ενέργειας ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι ενέργειες των φωτονίων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της τροχιάς των ηλεκτρονίων μέσα στο άτομο είναι δεκάδες χιλιάδες φορές μεγαλύτερες από τις ενέργειες ιονισμού του ατόμου. Άρα οποιαδήποτε

πειραματική προσπάθεια εντοπισμού της τροχιάς του ηλεκτρονίου θα οδηγήσει σε σφοδρότατο ιονισμό του ατόμου και άρα σε σφοδρότατη διαταραχή αυτού που θέλουμε να μετρήσουμε.

Η αποτυχία θα είναι όλο και πιο μεγάλη όσο πιο μικρό θα είναι το κρίσιμο μέγεθος α . Όσο μικρότερος δηλαδή είναι ο κατά Bohr κβαντικός αριθμός n .

Το συμπέρασμα

Αφού κανένα πείραμα δεν μας επιτρέπει να υποστηρίξουμε ότι το ηλεκτρόνιο έχει μια καλά προσδιορισμένη τροχιά, κανένας δε μας εμποδίζει να «ζήσουμε» ως Φυσικοί και χωρίς τροχιά ηλεκτρονίου. Όταν κάτι δεν έχει πειραματική θεμελίωση δεν είναι και απαραίτητο στη ζωή μας. **Το άτομο έχει μια πολύ καλά ορισμένη ενέργεια και μια συγκροτημένη παρουσία γενικότερα χωρίς τα ηλεκτρόνια του να έχουν καλά ορισμένες ούτε θέσεις ούτε ορμές.**

Άρα ακόμη κι αν όλα στις δομές μας είναι εντελώς αβέβαια, οι μονάδες (άτομα, μόρια κλπ) που χρειαζόμαστε για να μας δώσουν μορφή είναι πολύ καλά «οριοθετημένες».

6.18 Βγάζοντας καθαρές αναμνηστικές φωτογραφίες με τα κουάρκς

Για να «δούμε» αν ένα νουκλεόνιο έχει δομή ή όχι και τι συμβαίνει μέσα του αρκεί να πάρουμε μια «φωτογραφία» από το εσωτερικό ενός πρωτονίου, ενός χώρου δηλαδή με ακτίνα μικρότερη από $1 fm = 10^{-15} m$.

Οι δυσκολίες

- 1) Ο χώρος που θέλουμε να φωτογραφήσουμε είναι «απελπιστικά» μικρός και συνεπώς πρέπει τα φωτόνια μας να έχουν πολύ μεγάλη διακριτική ικανότητα
- 2) Αν υπάρχουν οντότητες (κβαντικά πλάσματα) μέσα στο πρωτόνιο, επειδή ο χώρος που «ζουν» είναι πάρα πολύ μικρός, θα έχουν μεγάλη βεβαιότητα στον εντοπισμό τους και άρα τεράστια αβεβαιότητα στην ορμή τους. Συνεπώς θα πρέπει να έχουν τεράστιες ορμές και άρα να κινούνται με ταχύτητες κοντά σε εκείνη του φωτός. Το πιο πιθανό λοιπόν είναι η «φωτογραφία» μας να είναι θολή. Εκτός αν ο χρόνος της φωτογράφισης είναι πάρα πάρα πολύ μικρός.
- 3) Πώς όμως θα προλάβουμε να δούμε τι συμβαίνει μέσα στο νουκλεόνιο όταν ο χρόνος φωτογράφισης είναι τόσο μικρός; Τι προλαβαίνει να συμβεί σε έναν τόσο μικρό χρονικό διάστημα, σε μια τόσο μικρή περιοχή;
Πιθανώς τίποτε σημαντικό, αλλά εμείς θα πάρουμε πολλά στιγμιότυπα, θα τα συγκρίνουμε μεταξύ τους και θα βγάλουμε συμπεράσματα.

Οι προδιαγραφές των εργαλείων μας

Τα φωτόνια που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να «μπουν και να μας πουν τι βλέπουν» σε ένα χώρο όσο το πρωτόνιο.

Άρα πρέπει να αποκτήσουν αβεβαιότητα θέσης

$$\Delta x \ll 10^{-15} m$$

και συνεπώς να διαθέτουν φάσμα πιθανών ορμών με εύρος

$$\Delta p \gg \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-15}} = 10^{-19} \text{ Kg} \cdot \text{m/sec}$$

Όμως η ενέργεια ενός φωτονίου συνδέεται με την ορμή του

$$E = pc$$

Άρα πρέπει να διαθέτουν φάσμα ενεργειών με εύρος

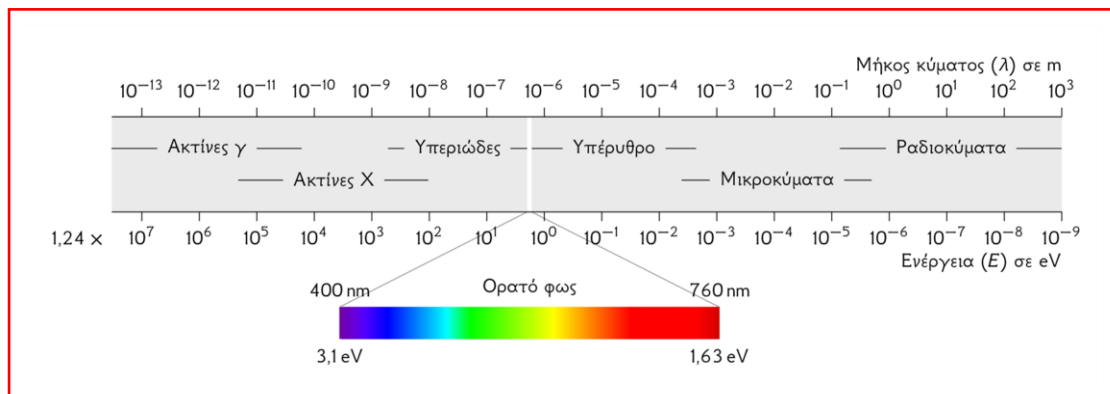
$$\Delta E = \Delta p \cdot c \gg 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ joules} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ eV}$$

και μέσο χρόνο ζωής

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta E} \ll \frac{10^{-34}}{3 \cdot 10^{-11}} \approx 3 \cdot 10^{-24} \text{ sec}$$

Τα φωτόνια λοιπόν που χρειαζόμαστε πρέπει να διαθέτουν ενέργειες μεγαλύτερες των 10^8 eV και να ζουν πολύ λιγότερο από 10^{-24} sec .

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ότι τέτοιες ενέργειες αφορούν σε «σκληρά» φωτόνια γ



Σχήμα 6.10: Οι ενέργειες των φωτονίων σε eV και η αντιστοιχία τους με τα μήκη κύματος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα φωτόνια καλύπτουν ένα φάσμα ενεργειών δισεκατομμυρίων eV. Τα ορατά σε εμάς καλύπτουν μια περιοχή με πλάτος ενεργειών μόνο 1,5

Δύσκολα τα πράγματα, γιατί τόσο σύντομα και τόσο ενεργειακά φωτόνια είναι μάλλον αδύνατο να παρατηρηθούν άμεσα. Δεν είναι συνηθισμένα φωτόνια.

Όμως **το φωτόνιο είναι φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης**, μίας δηλαδή από τις 4 θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της Φύσης. Μπορεί λοιπόν τα συνηθισμένα φωτόνια να μην προσφέρονται για τη φωτογράφιση του εσωτερικού του πρωτονίου, αλλά υπάρχουν φωτόνια αλληλεπίδρασης με ακραίες δυνατότητες, όπως π.χ. εξαιρετικά ενεργειακά και βραχύβια ή άλλα με οριακά μηδενική ενέργεια που ζουν όμως σχεδόν αιώνια. Τα «παράξενα» αυτά φωτόνια (αλληλεπίδρασης) λέγονται **δυνάμει ή εικονικά φωτόνια**

(virtual), αλλά η ονομασία τους τα αδικεί^(*) γιατί τελικά δεν είναι ούτε εν δυνάμει φωτόνια ούτε εικονικά. Είναι πραγματικά, όπως και αυτά που μας κάνουν και βλέπουμε το ηλιοβασίλεμα, αλλά με παράξενη ίσως συμπεριφορά.

Η λύση!!!

Αντί να «φωτογραφήσουμε» το εσωτερικό του πρωτονίου στέλνοντας συνηθισμένο φωτόνιο κατευθείαν επάνω του, θα στείλουμε ηλεκτρόνιο να «συγκρουστεί» με το πρωτόνιο. Όμως «σύγκρουση» σε τέτοιες μικρές περιοχές, όπου δεν υπάρχουν επιφάνειες, σημαίνει σκέδαση και τελικά αλληλεπίδραση.

Άρα θα στείλουμε ηλεκτρόνιο να αλληλοεπιδράσει με το πρωτόνιο, ώστε να δημιουργηθεί ανάμεσά τους δυνάμει φωτόνιο.

Αν το πρωτόνιο έχει δομή τότε το φωτόνιο αυτό δεν θα αλληλεπιδράσει με το πρωτόνιο ως σύνολο αλλά με κάποιο πλάσμα της δομής του και έτσι θα «φωτογραφήσει» το εσωτερικό του πρωτονίου.

Όπως είπαμε οι ενέργειες που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι τόσο μεγάλες που συνήθως οδηγούν σε διάσπαση του πρωτονίου και σε μια απελπιστική εικόνα θραυσμάτων. Όμως εμείς δεν θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο «χάος» με τα θραύσματα, αλλά **θα παρακολουθήσουμε τη ροή ενέργειας και ορμής από το ηλεκτρόνιο στο πρωτόνιο μέσω του δυνάμει φωτονίου της αλληλοεπίδρασής τους.**

Η «φωτογράφιση»

Ηλεκτρόνια με τεράστιο εύρος ορμών και ενεργειών Δp και ΔE αντίστοιχα στέλνονται να αλληλοεπιδράσουν με πρωτόνια. Τα Δx και Δt της αλληλεπίδρασής τους προφανώς είναι πάρα πολύ μικρά και συνεπώς τα ηλεκτρόνια βρέθηκαν (εντοπίστηκαν) πάρα πολύ κοντά στο πρωτόνιο και για πάρα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Άρα τα ηλεκτρόνια αλληλοεπιδράσαν με τα πρωτόνια γρήγορα και στοχευμένα.

Μετρώντας τις ενέργειες και τις ορμές των ηλεκτρονίων μετά την σύγκρουση τις βρίσκουμε, όπως ήταν αναμενόμενο, μικρότερες από τις αρχικές. Επειδή όμως η ενέργεια και η ορμή διατηρούνται πρέπει οι απώλειες ενέργειας και ορμής των ηλεκτρονίων, καθώς και οι αβεβαιότητές τους, να έχουν μεταφερθεί τελικά στα πρωτόνια ως σύνολο ή στη δομή τους, μέσω των δυνάμει φωτονίων.

Συμπερασματικά

- η τεράστια αβεβαιότητα στην ενέργεια των (δυνάμει) φωτονίων αλληλεπίδρασης τούς εξασφάλισε πολύ μικρό χρόνο ζωής κι άρα τεράστια ταχύτητα φωτογράφισης
- η τεράστια αβεβαιότητα στην ορμή των φωτονίων αλληλεπίδρασης τούς εξασφάλισε πολύ μικρή αβεβαιότητα θέσης και άρα τεράστια διακριτική ικανότητα

Τα δυνάμει φωτόνια αλληλεπίδρασης με την τεράστια χωροχρονική διακριτική ικανότητα που τους εξασφάλισαμε «φωτογράφησαν» το εσωτερικό του πρωτονίου.

^(*) Στην κβαντομηχανική, η αβουλία μας να απαγκιστρωθούμε από ιστορικότητες που φτάνουν τα όρια της μεταφυσικής και η απροθυμία μας να συνειδητοποιήσουμε ότι κατέχουμε μια πρωτοφανή λογική, κάνουν πολλές φορές ατυχείς τις εκφράσεις μας. Και χρησιμοποιούμε όρους που αδικούν κατάφωρα αυτό που κατέχουμε ως γνώση και αυτό που διακινούμε ως πολιτισμό.

Η επεξεργασία

Μελετώντας τη ροή ενέργειας και ορμής σε όλο το πείραμα, μελετώντας δηλαδή τις διαφορετικές ενέργειες κι ορμές κι άρα τους διαφορετικούς χρόνους ζωής και τις διαφορετικές διακριτικές ικανότητες των δυνάμει φωτονίων, ανακαλύψαμε τι είδους δυνάμει φωτόνιο συμμετείχε σε κάθε συμβάν μολονότι δεν το είχαμε «δει» ποτέ άμεσα.

Κατόπιν υπολογίσαμε την πιθανότητα τα διαφορετικά είδη δυνάμει φωτονίων να συνάντησαν κάποια οντότητα μέσα στο πρωτόνιο και να απορροφήθηκαν από αυτή. Έτσι ανασυνθέσαμε το εσωτερικό του πρωτονίου και φτιάξαμε ένα στιγμιότυπό του.

Κάναμε δηλαδή ό,τι κάνουμε στην ακτινογραφία με ακτίνες Χ. Από το τι συναντάνε στο διάβα τους τα φωτόνια των ακτίνων Χ και τη συμπεριφορά τους κατά τις συναντήσεις αυτές βγάζουμε συμπεράσματα για το εσωτερικό ενός αντικειμένου.

Βέβαια η φωτογραφία του πρωτονίου δε έμοιαζε με τίποτε από όσα ξέραμε. Άρα η επεξεργασία της απαιτούσε τρομερή ικανότητα και ιδιαίτερη ευφυΐα, με περίεργους αλγόριθμους και έτσι ο **Richard Feynman** ορίστηκε υπεύθυνος για ένα μεγάλο μέρος της εικόνας.

Οι τελικές «φωτογραφίες» του εσωτερικού του πρωτονίου (που σημειωτέον καμιά δεν έμοιαζε με την άλλη) **ήταν το λιγότερο συγκλονιστικές!** Σκέτη αποκάλυψη! Ανταμοιβή πλούσια:

- Μέσα στο πρωτόνιο υπήρχαν μικρότερα «πλάσματα» που είχαν τεράστιες ενέργειες. Υπήρχαν οντότητες!!! Υπήρχαν βέβαια τα κουάρκ, τα οποία ταυτοποιήθηκαν αργότερα από το κλασματικό τους φορτίο και από το σπιν τους, αλλά υπήρχαν και άλλα «πλάσματα» που δεν ήταν κουάρκ. Ονομάστηκαν γκλουόνια (gluons) και ήταν οι φορείς της ισχυρής αλληλεπίδρασης, της έλξης δηλαδή μεταξύ των κουάρκ και τελικά μεταξύ των νουκλεονίων.
- Στο εσωτερικό του πρωτονίου υπήρχε έντονη δραστηριότητα, όλα ήταν ανήσυχα και άλλαζαν ταχύτατα. «Πλάσματα» στριμωγμένα σε απελπιστικά μικρό χώρο, φευγαλέα, γεννιόνταν και ξαναχάνονταν για να παρουσιαστούν από το πουθενά άλλα. Όλα στιγμιαία, προσωρινά, «μορφές» αλλόκοτες.
- Όσο αυξανόταν η διακριτική ικανότητα των δυνάμει φωτονίων τόσο πιο πολλά και περίεργα «έβλεπες». Εκεί που πριν έβλεπες να υπάρχει ένα μόνο πλάσμα, όταν μεγάλωνε η ανάλυση «έβλεπες» να υπάρχουν περισσότερα πλάσματα στη θέση του. Για παράδειγμα, εκεί που έβλεπες ένα κουάρκ τελικά διαπίστωνες ότι δεν ήταν ένα κουάρκ, αλλά ένα κουάρκ και ένα γκλουόνιο ή εκεί που έβλεπες ένα γκλουόνιο μόνο του ήταν τελικά ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ μαζί!

Στο εσωτερικό του πρωτονίου υπήρχαν όντως παρτόνια (partons), όπως τα είχαν προβλέψει. Κουάρκ και γκλουόνια και αντισωματίδια και σωματίδια να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται. Όλα φευγαλέα, προσωρινά!!!

.....

Όπως καταλαβαίνετε όλα αυτά δεν ήταν μια εύκολη υπόθεση. Γι' αυτό οι **Jerome Friedman, Henry Kendall** και **Richard Taylor**, που σκέφτηκαν και έστησαν ένα τόσο δύσκολο πείραμα, πήραν το Νόμπελ Φυσικής 1990.

Παρατηρήσεις

α) Για να πάρουμε βραχύβια στιγμιότυπα υψηλής διακριτικής ικανότητας πρέπει να χειριστούμε μεγάλο εύρος ενεργειών και ορμών και άρα να χρησιμοποιήσουμε μεγάλες ενέργειες και ορμές. Πρέπει δηλαδή να συνδυάσουμε αποτελέσματα από πολλές συγκρούσεις κατά τις οποίες να αποδίδονται διαφορετικά ποσά ενέργειας και ορμής. Μια δειγματοληψία με πολλές διαφορετικές ενέργειες κι ορμές μπορεί να συναγάγει με ακρίβεια θέσεις και χρονικές στιγμές.

Άρα **μια εικόνα υψηλής χωροχρονικής διακριτικής ικανότητας απαιτεί, λόγω των αρχών αβεβαιότητας, τεράστιο φάσμα ορμών και ενεργειών.**

β) Το εσωτερικό κάθε νουκλεονίου είναι ένα πανηγύρι των αρχών της αβεβαιότητας. Μια καταπληκτική **δυναμική ισορροπία** μεταξύ πάμπολλων φευγαλέων πλασμάτων και πολλών κβαντικών καταστάσεων. Είναι μια συνεχής δραστηριότητα και μια έντονη αλλαγή, η οποία όμως γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η εξωτερική εικόνα του νουκλεονίου να παραμένει ίδια. Το νουκλεόνιο εμφανίζει σταθερά χαρακτηριστικά όπως είναι η μάζα ηρεμίας του, το φορτίο του, το σπιν του κλπ.

Όταν κοιτάμε από μακριά το πρωτόνιο ή το νετρόνιο είναι σαν να κοιτάμε από μακριά την επιφάνεια μιας ήρεμης θάλασσας, όπου δεν βλέπουμε καμιά ρυτίδωση. Από πιο κοντά όμως καμιά εικόνα της προηγούμενης χρονικής στιγμής δεν είναι ίδια με εκείνη της επόμενης. Έτσι και στο νουκλεόνιο οι κβαντικές καταστάσεις των πλασμάτων που ζουν μέσα σε ένα νουκλεόνιο αλλάζουν ταχύτατα και διαρκώς με τρόπο που εξωτερικά να φαίνεται ότι τίποτε δεν αλλάζει! Τα ίδια ισχύουν για όλα τα σωματίδια που διαθέτουν δομή. Και για το άτομο. Όλα αλλάζουν ταχύτατα αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούν την ταυτότητά τους.

6.19 Ακτίνα ατόμου υδρογόνου και ενέργεια ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση

Έστω α η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου σε μια τυχαία κβαντική κατάσταση. Τότε η «μέση κινητική ενέργεια» του ηλεκτρονίου είναι (βλέπε σελ.93 σχέση 6.12)

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (6.12)$$

και άρα η «ολική» του ενέργεια είναι

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \quad (6.21)$$

Στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου η ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι ελάχιστη.

$$\frac{dE}{da} = 0 \Rightarrow \alpha_{\text{θεμελ}} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

Άρα η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου στη θεμελιώδη κατάσταση είναι

$$\alpha_{\text{θεμελ}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad (6.22)$$

και συνεπώς η «ολική» ενέργεια του ηλεκτρονίου του είναι

$$E_{\theta\epsilon\mu\epsilon\lambda} \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2_{\theta\epsilon\mu\epsilon\lambda}} \quad (6.23)$$

Αντικαθιστώντας

$$\alpha_{\theta\epsilon\mu\epsilon\lambda} \approx \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,0546^2 \cdot 10^{-68}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6022^2 \cdot 10^{-38}} = 5,286 \cdot 10^{-11} m = 0,5286 \text{ \AA}$$

$$E_{\theta\epsilon\mu\epsilon\lambda} \approx -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{1,0546^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 5,286^2 \cdot 10^{-22}} = -0,00218 \cdot 10^{-15} J$$

ή

$$E_{\theta\epsilon\mu\epsilon\lambda} \approx -13,635 eV$$

Άρα στη θεμελιώδη κατάσταση το άτομο του υδρογόνου έχει ακτίνα της τάξεως του 0,5 Å και ενέργεια ηλεκτρονίου περίπου -13,6 eV

Παρατήρηση

Στην κλασική φυσική η ενέργεια ενός σωματιδίου είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας. Η κινητική προσδιορίζεται από την ορμή του σωματιδίου και η δυναμική από τη θέση του.

Όμως **στην κβαντομηχανική** δεν είναι δυνατός ο ταυτόχρονος προσδιορισμός ορμής και θέσης και συνεπώς **δεν είναι δυνατός ο ταυτόχρονος προσδιορισμός κινητικής και δυναμικής ενέργειας**.

Άρα στην κβαντομηχανική δεν έχει νόημα η διάκριση της ενέργειας ενός σωματιδίου σε κινητική και δυναμική. Η ενέργεια μιας κβαντικής κατάστασης δεν αποτελείται από δύο προσθετέους, αλλά είναι μια ενιαία ποσότητα που αφορά ενιαία το σύστημα.

Προφανώς δεν έχει νόημα και το να συγκρίνουμε μεταξύ τους κινητικές, δυναμικές ή ολικές ενέργειες κλπ.

Στην κβαντομηχανική υπάρχει μόνο ενέργεια! Ούτε κινητική ούτε δυναμική.

Στους παραπάνω λοιπόν υπολογισμούς μας δεν δικαιολογείται η σχέση (6.22) ούτε βέβαια χαρακτηρισμοί όπως ολική ενέργεια, κινητική κλπ. Αλλά σε αυτό το μικρό βιβλίο ενδιαφερόμαστε για τάξεις μεγέθους και έτσι δεν είμαστε τόσο αυστηροί στην ορολογία και στις σχέσεις που χρησιμοποιούμε. Το τόλμημα μας ενθαρρύνεται από το γεγονός ότι μέχρι τώρα οι «χαλαρές» προβλέψεις μας δεν ήταν απογοητευτικές. Μάλλον το αντίθετο.

6.20 Ακτίνα ατόμων ή ιόντων με 2 ηλεκτρόνια και ενέργεια θεμελιώδους κατάστασης

Έστω άτομο ή ιόν X με ατομικό αριθμό Z, του οποίου τα 2 ηλεκτρόνια βρίσκονται γύρω από τον πυρήνα σε χώρους που προσδιορίζονται από «απόσταση» r_1 και r_2 αντίστοιχα.

Οι αβεβαιότητες της ορμής των ηλεκτρονίων είναι

$$\Delta p_1 \approx \frac{\hbar}{r_1} \quad \text{και} \quad \Delta p_2 \approx \frac{\hbar}{r_2}$$

Η μέση «κινητική» τους ενέργεια είναι

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \approx \frac{(\Delta p_1)^2}{2m} + \frac{(\Delta p_2)^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)$$

ενώ η «δυναμική» τους

$$\langle E_{\text{δυν}} \rangle \approx -Ze^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{e^2}{r_1 + r_2}$$

όπου ο πρώτος προσθετέος δίνει μια αντίληψη της ενέργειας λόγω της αλληλεπίδρασης του καθενός ηλεκτρονίου με τον πυρήνα και ο δεύτερος της ενέργειας λόγω της μεταξύ τους ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης.

Άρα η τάξη μεγέθους της μέσης ενέργειας των ηλεκτρονίων είναι (*)

$$\langle E \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Ze^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{e^2}{r_1 + r_2}$$

Στη θεμελιώδη κατάσταση το άτομο ή ιόν X θα έχει τις μικρότερες διαστάσεις και την μικρότερη ενέργεια.

Επειδή τα r_1 και r_2 στην παραπάνω σχέση έχουν συμμετρικούς ρόλους, στο ακρότατο της ενέργειας (ελάχιστο, όπως δείχνει η δεύτερη παράγωγος) θα συμβαίνει $r_1 = r_2$.

Όμως κάθε φορά που συμβαίνει $r_1 = r_2 = r$ η μέση ενέργεια είναι

$$\langle E \rangle \approx \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{e^2(4Z - 1)}{2r}$$

Στη θεμελιώδη λοιπόν κατάσταση η παραπάνω ενέργεια γίνεται ελάχιστη. Άρα

$$\frac{dE}{dr} = 0 \Rightarrow r = \frac{4\hbar^2}{me^2(4Z - 1)}$$

Συνεπώς η ακτίνα του ατόμου ή ιόντος στη θεμελιώδη κατάσταση είναι

$$r_{\text{θεμ}} = \frac{4\hbar^2}{me^2(4Z - 1)}$$

(*) Η ενέργεια είναι μεγαλύτερη γιατί οι αλληλεπιδράσεις δεν είναι μόνο ηλεκτροστατικές. Αλλά είμαστε ικανοποιητικά κοντά στην πραγματική τιμή.

και η ενέργεια είναι

$$E_{\theta\epsilon\mu} = -\frac{me^4}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2$$

Η παραπάνω τιμή της ενέργειας των ατόμων ή ιόντων Χ με 2 ηλεκτρόνια όταν βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση είναι μια καλή προσεγγιστική σχέση για πολλές περιπτώσεις.

Παραδείγματα

- Για το ιόν B^{+++} η παραπάνω σχέση δίνει $E_{\theta\epsilon\mu} \approx -609\text{eV}$, ενώ η πειραματική τιμή είναι -595eV .
- Για το ιόν C^{++++} η παραπάνω σχέση δίνει $E_{\theta\epsilon\mu} \approx -892,6\text{eV}$, ενώ η πειραματική τιμή είναι $-874,8\text{eV}$.

6.21 Τα ίχνη των «τροχιών» σε καταγραφικά συστήματα

Σε συσκευές όπου θέλουμε να καταγραφεί η «τροχιά» ενός σωματιδίου (π.χ. φωτογραφικές πλάκες, θάλαμος Ουίλσον κλπ) οι αρχές αβεβαιότητας βάζουν όρια.

Η αβεβαιότητα στον εντοπισμό του σωματιδίου, καθώς συγκρούεται με το άτομο που ionίζει, είναι της τάξεως των διαστάσεων α του ατόμου (ουσιαστικά ακόμη μεγαλύτερη).

Επιπλέον το άτομο μεταφέρει στο σωματίδιο με το οποίο συγκρούεται μια απρόβλεπτη και ανεξέλεγκτη αβεβαιότητα ορμής Δp .

Η «τροχιά» λοιπόν του σωματιδίου μπορεί να παρατηρηθεί μόνο μέσα στα όρια που θέτει η αρχή της αβεβαιότητας

$$\alpha \cdot \Delta p \approx \hbar$$

6.22 Οι αρχές αβεβαιότητας εξασφαλίζουν τη δημιουργία

Το κενό για την κλασική φυσική είναι ένας χώρος χωρίς τίποτε μέσα του. Ούτε ύλη, ούτε ακτινοβολία. Χώρος απόλυτης ανυπαρξίας.

Για την κβαντική φυσική όμως και για τα πειράματα που τη δικαιώνουν τέτοιος χώρος δεν μπορεί να υπάρξει. Όλο το Σύμπαν, με τις απέραντες «κενές» εκτάσεις του, είναι γεμάτο με πεδία (βαρυτικό, ηλεκτρομαγνητικό κ.λπ.) τα οποία, ακόμη και εκεί όπου δεν έχουν «διεγερθεί» ώστε να «εκδηλωθούν» κάποια από τα σωματίδια που τους αντιστοιχούν, εξακολουθούν να περικλείουν ενέργεια.

Οι αρχές αβεβαιότητας ελέγχουν το κβαντικό κενό. Αυτό σημαίνει ότι οι διακυμάνσεις ΔE της ενέργειας του κενού σε κάποια μικροσκοπική περιοχή (σημείο περίπου) πληρούν τη σχέση

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Άρα στο (κβαντικό) κενό, που κυριολεκτικά γεμίζει το Σύμπαν, συμβαίνουν ανεξέλεγκτες, τυχαίες ενεργειακές διακυμάνσεις ΔE , οι οποίες όσο πιο μεγάλες είναι, τόσο πιο μικρός είναι ο χρόνος Δt που διαρκούν.

Αυτό για την κλασική φυσική δεν είναι αποδεκτό γιατί παραβιάζει τη διατήρηση της ενέργειας. Για την κβαντική φυσική όμως επιτρέπεται να εμφανίζεται ξαφνικά ενέργεια ή μάζα από το «πουθενά» (από το κενό δηλαδή), αρκεί να εξαφανιστεί τόσο γρήγορα ώστε να μην παραβιαστεί η εγγενής στο Σύμπαν αρχή της αβεβαιότητας.

Με άλλα λόγια,

Όσες παραβιάσεις νόμων διατήρησης και κάποιων φυσικών αρχών γίνονται, πρέπει να γίνονται στα πλαίσια ισχύος των αρχών αβεβαιότητας ($\Delta E \cdot \Delta t \approx h$, $\Delta p \cdot \Delta x \approx h$ κ.λπ.) ώστε στο τέλος να ισχύσουν οι συμμετρίες της Φύσης, δηλαδή οι νόμοι και οι αρχές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διατήρηση του φορτίου δεν παραβιάζεται ποτέ και ότι πάντα βγαίνει από το κενό ύλη και αντιύλη μαζί.

Αν η διακύμανση της ενέργειας είναι αρκετά μεγάλη ώστε να καλύψει τις σχετικιστικές απαιτήσεις της σχέσης $E = mc^2$, είναι δυνατό να εμφανιστεί από το κενό ζευγάρι σωματιδίου αντισωματιδίου (ύλη-αντιύλη) το οποίο όμως σύντομα πρέπει να εξαφανιστεί. Και μάλιστα όσο πιο μεγάλη ενέργεια απαιτήσει η μάζα των σωματιδίων που θα εμφανιστούν τόσο πιο σύντομος είναι ο χρόνος ζωής τους.

Για παράδειγμα, αν εμφανιστεί κάπου ένα ζευγάρι ηλεκτρόνιο-ποζιτρόνιο η διακύμανση της ενέργειας του κενού είναι της τάξης του

$$\Delta E = 2mc^2 = 163,8 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

και συνεπώς ο χρόνος μέσα στον οποίο πρέπει να εξαφανιστεί αυτό το ζευγάρι είναι

$$\Delta t \approx \frac{h}{\Delta E} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{163,8 \cdot 10^{-15}} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

Προφανώς για χρονικά διαστήματα που τείνουν στο μηδέν οι ενέργειες που μπορούν να εμφανιστούν είναι τεράστιες, ίσως και συμπαντικής κλίμακας (*).

“Το κενό είναι χώρος πολύ βίαιων φυσικών εκδηλώσεων” (John Wheeler).

Η αρχή της αβεβαιότητας μετατρέπει το κενό από μια ατέλειωτη κλασική ανυπαρξία σε έναν δυναμικό χώρο ενεργειακών διακυμάνσεων κάθε τάξης μεγέθους.

Το (κβαντικό) κενό είναι μια θάλασσα απίστευτης δραστηριότητας, δημιουργίας και καταστροφής. Κάθε λογής σωματίδια ύλης και αντιύλης (πρωτόνια, ηλεκτρόνια, αντιπρωτόνια, αντινετρόνια κ.λπ) εμφανίζονται από το πουθενά κατά ζεύγη (ύλη-αντιύλη) και εξαφανίζονται γρήγορα.

(*) Σοβαρές έρευνες υποστηρίζουν ότι ισχυρές ενεργειακές διακυμάνσεις του κενού στο αρχέγονο Σύμπαν έγιναν για κάποιους λόγους «κέντρα βαρύτητας», συγκέντρωσαν ύλη κοντά τους και εξελίχθηκαν με την πάροδο του χρόνου στα σμήνη και στους γαλαξίες που σήμερα παρατηρούμε στο Σύμπαν.

Κάποιοι άλλοι Φυσικοί υποστηρίζουν ακόμη πιο «προχωρημένες» ιδέες, ότι δηλαδή ολόκληρο το Σύμπαν ξεπήδησε από μια τεράστια ενεργειακή αβεβαιότητα του κενού. Ένα Σύμπαν δηλαδή από το κενό. Ιδέες υπάρχουν πάρα πολλές και το καλό είναι ότι σήμερα όλες αυτές οι ιδέες και δημοσιοποιούνται γρήγορα και υπάρχει υποσχόμενη τεχνολογική δυνατότητα ελέγχου.

6.23 Οι αρχές αβεβαιότητας επιτρέπουν «παρανομίες» και «εξωφρενικούς» μηχανισμούς

A. Τα δεδομένα-Η ιδέα

α) Σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας όσο πιο ακριβής είναι ο χωροχρονικός εντοπισμός ενός σωματιδίου τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα της ορμής και της ενέργειάς του και συνεπώς τόσο πιο μεγάλες είναι οι πιθανές ορμές και ενέργειες με τις οποίες μπορεί να εμφανιστεί το σωματίδιο. Άρα είναι δυνατό για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα κάποιο σωματίδιο να αποκτήσει ταχύτητα μεγαλύτερη εκείνης του φωτός.

β) Η ταχύτητα του φωτός θεωρείται αξεπέραστο όριο ταχύτητας στη Φύση. Ένας λόγος είναι και το ότι αν κάποιο σωματίδιο μπορούσε να τρέξει πιο γρήγορα από το φως σε κάποιο σύστημα αναφοράς, τότε σε κάποιο άλλο θα συμπεριφερόταν σα να κινείται προς τα πίσω στο χρόνο, κάτι που θα δημιουργούσε προβλήματα στην αιτιότητα.

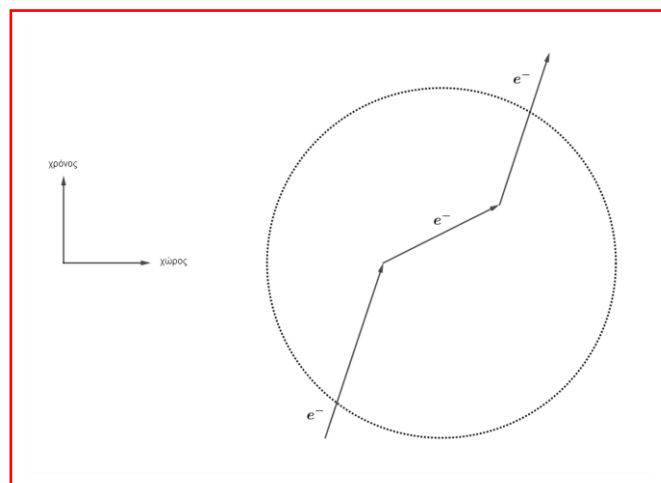
γ) Ένα φορτισμένο σωματίδιο (ύλη) που τρέχει πίσω στο χρόνο είναι ισοδύναμο με το αντισωματίδιό του (αντιύλη) που τρέχει προς τα μπροστά στο χρόνο.

B. Η αρχική και τελική εικόνα ίδιες, αλλά οι «μηχανισμοί» διαφορετικοί

Σχήμα 6.11:

Σε κάποιο σύστημα αναφοράς ένα ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα μικρότερη του φωτός και μπαίνει σε μια πολύ μικρή περιοχή A του χωροχρόνου όπου οι συνθήκες (πείραμα, φυσικό σύστημα, ανεξέλεγκτη κατάσταση κ.λπ.) «επιχειρούν» ακριβή χωροχρονικό εντοπισμό του. Επιχειρούν δηλαδή να «βρουν» με μεγάλη ακρίβεια τη θέση του ηλεκτρονίου και τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε αυτή τη θέση.

Τότε οι αρχές αβεβαιότητας προκαλούν τεράστιες απροσδιοριστίες στην ορμή και την ενέργεια του ηλεκτρονίου και συνεπώς είναι δυνατό, έστω και για πολύ λίγο, να εξασφαλίσουν στο ηλεκτρόνιο ταχύτητα μεγαλύτερη εκείνης του φωτός.

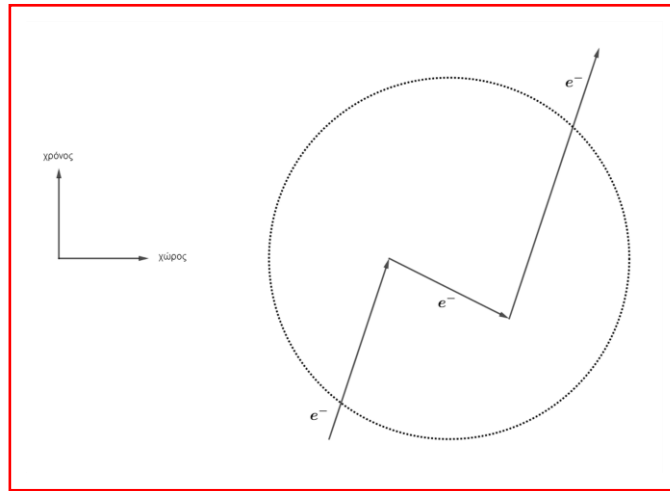


Σχήμα 6.11: Σε κάποιο σύστημα αναφοράς ένα ηλεκτρόνιο, λόγω των αρχών αβεβαιότητας, αποκτά σε μια πολύ μικρή χωροχρονική περιοχή ταχύτητα μεγαλύτερη εκείνης του φωτός.

Άρα στο σχήμα 6.11 το ηλεκτρόνιο κινούμενο κανονικά με ταχύτητα μικρότερη του φωτός μπήκε σε μια ελάχιστη χωροχρονική περιοχή A, κινήθηκε για λίγο με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός προς τα μπροστά στο χρόνο (προς το μέλλον) και ξαναβγήκε από την περιοχή A κινούμενο κανονικά με ταχύτητα μικρότερη του φωτός.

Σχήμα 12:

Ισοδύναμα με το σχήμα 6.11, λέμε ότι ως προς κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς το ηλεκτρόνιο κινούμενο κανονικά με ταχύτητα μικρότερη του φωτός μπήκε σε μια ελάχιστη χωροχρονική περιοχή, κινήθηκε προς τα πίσω στο χρόνο (προς το παρελθόν) και ξαναβγήκε από την περιοχή κινούμενο κανονικά με ταχύτητα μικρότερη του φωτός.



Σχήμα 6.12: Σε άλλο σύστημα αναφοράς, το ηλεκτρόνιο του σχ.6.11 φαίνεται να κινήθηκε προς το παρελθόν.

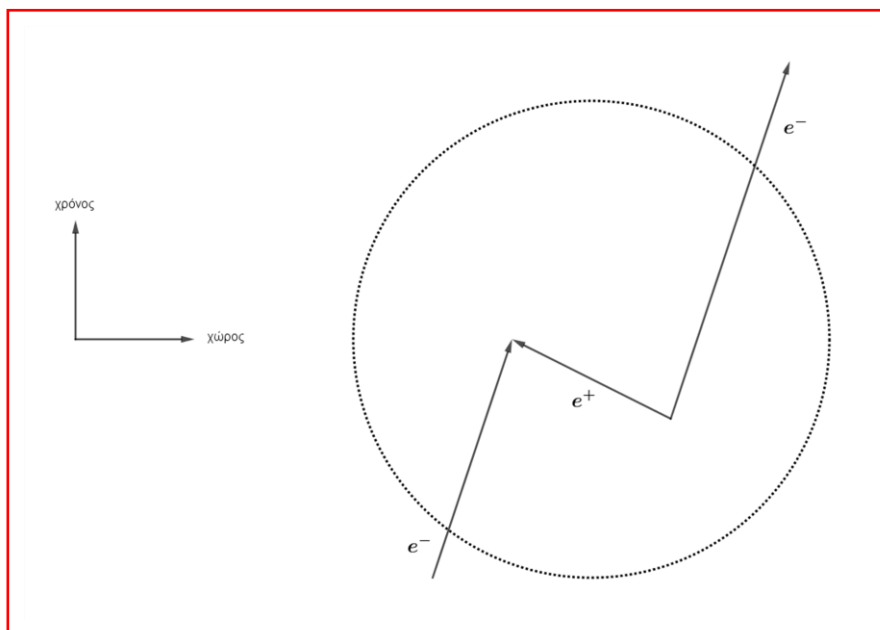
Σχήμα 13:

Όμως ένα ηλεκτρόνιο που κινείται προς τα πίσω στο χρόνο είναι ισοδύναμο με το αντισωματίδιό του, με ένα ποζιτρόνιο δηλαδή, το οποίο όμως κινείται προς τα μπροστά στο χρόνο. Επομένως, στα όρια της ελάχιστης χωροχρονικής περιοχής που εξετάζουμε, αντί να έχουμε ένα ηλεκτρόνιο που τρέχει πίσω στο χρόνο μπορούμε να έχουμε ένα ποζιτρόνιο που τρέχει μπροστά στο χρόνο.

Ισοδύναμα λοιπόν με το σχήμα 6.12 λέμε ότι το ηλεκτρόνιο κινούμενο κανονικά με ταχύτητα μικρότερη του φωτός μπήκε σε μια ελάχιστη χωροχρονική περιοχή. Σε κάποιο «διπλανό» σημείο οι αρχές αβεβαιότητας προκάλεσαν έντονες ενεργειακές διακυμάνσεις κενού και ξαφνικά δημιούργησαν από το «πουθενά» (από το κενό δηλαδή) ένα ζευγάρι δύο σωματιδίων, ηλεκτρόνιο και ποζιτρόνιο (ύλη και αντιύλη).

Το ηλεκτρόνιο που δημιουργήθηκε βγαίνει από την περιοχή κινούμενο κανονικά προς το μέλλον με ταχύτητα μικρότερη του φωτός, ενώ το ποζιτρόνιο συναντά το αρχικό ηλεκτρόνιο και εξαφανίζονται, αποκαθιστώντας τις ενεργειακές «παρανομίες».

Τα ηλεκτρόνια είναι όμοια σωματίδια και συνεπώς δεν έχει καμιά σημασία αν το αρχικό ηλεκτρόνιο εξαφανίστηκε και αν ένα άλλο ηλεκτρόνιο, που γεννήθηκε από το πουθενά, πήρε ξαφνικά τη θέση του. Η Φύση δε διακρίνει τα ηλεκτρόνια μεταξύ τους.



Σχήμα 6.13: Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή. Λόγω αρχών αβεβαιότητας εκεί κοντά του εμφανίζονται ξαφνικά ένα ηλεκτρόνιο κι ένα ποζιτρόνιο. Στο ελάχιστο διάστημα της ζωής τους, το ποζιτρόνιο συναντιέται με το αρχικό ηλεκτρόνιο και εξαφανίζονται και το εναπομείναν ηλεκτρόνιο εξέρχεται της περιοχής. Ταχύτατα η «παρανομία» της ξαφνικής γέννησης σωματιδίων αίρεται.

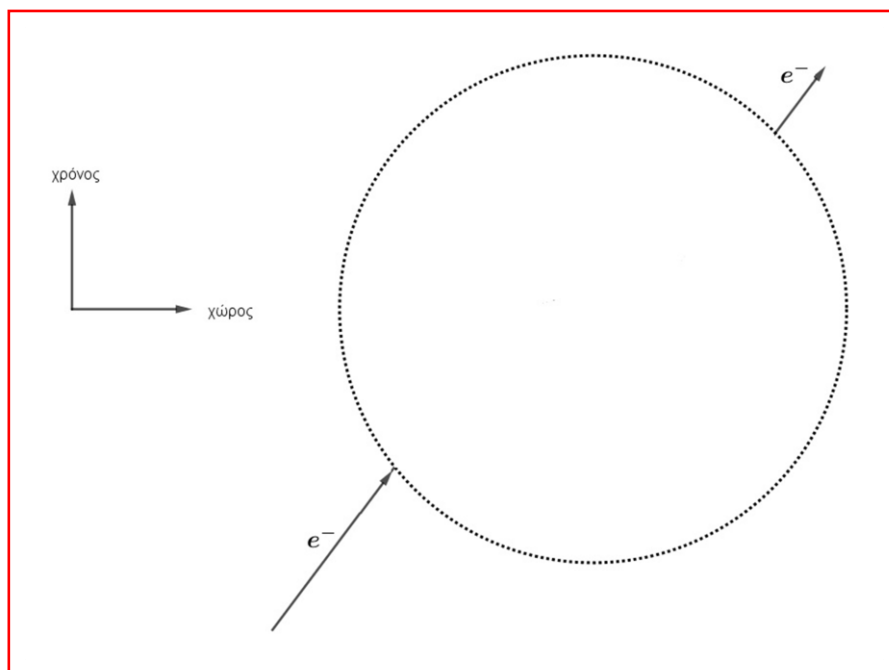
Τελικά

- Οι μηχανισμοί των σχημάτων 6.11, 6.12 και 6.13 είναι διαφορετικοί, αλλά ισοδύναμοι
- Αν αγνοήσουμε τι συνέβη στην κυκλική περιοχή A λόγω των αρχών αβεβαιότητας, εκείνο που βλέπουμε είναι μια αρχική και μια τελική εικόνα ενός ηλεκτρονίου μέσα στην απόλυτη νομιμότητα. Ένα ηλεκτρόνιο κινείται με επιτρεπόμενη από τη σχετικότητα ταχύτητα προς το μέλλον. **Όλα τα δανεικά επιστράφηκαν και οι «παραβάσεις» νόμων και αρχών που έγιναν στην περιοχή A διαγράφηκαν λόγω ... αβεβαιότητας.**

Γ. Ο απολογισμός της ιδέας

Το σημαντικότερο στην παραπάνω ιδέα του μεγάλου Φυσικού *Richard Feynman* είναι ό,τι ανάμεσα σε ένα απολύτως «νόμιμο» αρχικό και τελικό γεγονός, οι αρχές αβεβαιότητας μπορούν να δημιουργήσουν χιλιάδες μηχανισμούς «καταστρατηγώντας» νόμους της Φύσης ή μάλλον βάζοντάς τους να λειτουργούν στα όρια ισχύος των σχέσεων αβεβαιότητας.

Στο παρακάτω σχήμα 6.14 από τη χωροχρονική περιοχή A λείπει η παράξενη δραστηριότητα των αρχών αβεβαιότητας. Μπορείτε λοιπόν να βάλετε πάρα πολλούς μηχανισμούς, τηρώντας κάποιους κανόνες, όπου να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται σωματίδια και αντισωματίδια και κβάντα αλληλεπιδράσεων και ... και ..., χωρίς να θιχτεί στο ελάχιστο η νομιμότητα του Κόσμου μας. Μια νομιμότητα η οποία με τους νόμους διατήρησης, με τα αξεπέραστα όρια ταχύτητας, με τις οριοθετήσεις και τις δυναμικές ισορροπίες δίνει τις μορφές και την ομορφιά που βλέπουμε γύρω μας.



Σχήμα 6.14: Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια χωροχρονική περιοχή. Χιλιάδες αλλόκοτες εμφανίσεις και εξαφανίσεις σωματιδίων και αντισωματιδίων και φορέων αλληλεπιδράσεων μπορούν να συμβούν σε ένα πανηγύρι των αρχών αβεβαιότητας. Ταχύτατα όλες οι «παρανομίες» αίρονται και κάποιο ηλεκτρόνιο (δεν έχει σημασία αν ήταν αυτό που εισήλθε ή κάποιο άλλο που γεννήθηκε από το πουθενά) εξέρχεται της περιοχής σα να μην έχει συμβεί ποτέ τίποτε

Δ. Συμπεράσματα:

- 1) Αφού υπάρχει σύστημα αναφοράς όπου «εμφανίζονται» από το κενό σωματίδια και αντισωματίδια έστω και σε χωροχρονικές κλίμακες που είναι αδύνατο να μετρήσουμε, πρέπει να υπάρχουν αντισωματίδια και στον πραγματικό μας παρατηρήσιμο κόσμο, αν οι συνθήκες γίνουν κατάλληλες, ίσως ακραίες κάποιες φορές. Άρα σίγουρα στη Φύση υπάρχει αντιύλη και μπορεί να παρατηρηθεί.
- 2) Οι μηχανισμοί που συνοδεύουν μια (επιφανειακή) νομιμότητα κρύβουν πολλές «παρανομίες». Σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει μόνο ένα ή μόνο δύο σωματίδια. Πάμπολλα ζεύγη **δυνάμει** σωματιδίων-αντισωματιδίων εμφανίζονται και εξαφανίζονται σε πολύ μικρές χωροχρονικές κλίμακες. Στον αόρατο κβαντικό κόσμο συμβαίνουν αδιανόητα, αλλόκοτα πράγματα που είναι αδύνατο προς το παρόν να δούμε και να μετρήσουμε με έναν ανιχνευτή π.χ. σωματιδίων

.....

Οι εικόνες που περιγράψαμε επιβάλλονται από την κβαντομηχανική και τη σχετικότητα και τα σωματίδια που γεννιούνται και εξαφανίζονται είναι αυτά που ονομάσαμε **δυνάμει σωματίδια** (virtual particles).

Ίσως κάποιος σκεφτεί ότι όλα αυτά είναι ένα παιχνίδι ή έστω μια συναρπαστική ιδέα. Αφού ποτέ δε θα δούμε και ποτέ δε θα μετρήσουμε τα δυνάμει σωματίδια που πετάγονται

ξαφνικά από το κενό και που ζουν τόσο λίγο πριν εξαφανιστούν στο πουθενά από το οποίο ήρθαν, τίποτε από όλα αυτά δεν έχει αξία. Καλύπτονται όλα πίσω από την αδυναμία πειραματικού ελέγχου της ύπαρξής τους.

Όμως δεν θα έχει δίκιο!

Οι αρχές αβεβαιότητας είναι κυριολεκτικά το «φάντασμα της όπερας». Μπορεί αυτά τα δυνάμει σωματίδια που φτιάχνονται να μην είναι άμεσα παρατηρήσιμα, όμως το σκηνικό που δημιουργούν στον Κόσμο μας είναι όχι απλά παρατηρήσιμο, αλλά καθοριστικότατο. Τα δυνάμει σωματίδια δίνουν ιδιότητες, χαρακτηριστικά, συμπεριφορές, μορφή στο Σύμπαν. Δεν μπορούμε να τα μετρήσουμε άμεσα, αλλά τα χρησιμοποιούμε για να στήσουμε πειράματα. Κι αν ληφθούν υπόψη στους υπολογισμούς μας τότε οι θεωρητικές μας προβλέψεις έρχονται αδιανόητα κοντά στις πειραματικές μετρήσεις.

Ας δώσουμε μερικά παραδείγματα

1) Δυνάμει φωτόνια μας αποκάλυψαν τη δομή του πρωτονίου και χάρισαν ένα Νόμπελ Φυσικής σε δύο Αμερικάνους κι έναν Καναδό (βλέπε εφαρμογή 6.18).

Σήμερα μετά από πολύ προσπάθεια και με τις εργασίες πολλών ικανότατων Φυσικών έχουμε μια πάρα πολύ καλή εικόνα του τι συμβαίνει μέσα σε ένα πρωτόνιο και πώς μοιάζει το εσωτερικό του.

Γίνεται ένα πανηγύρι όπου «γεννιούνται» και εξαφανίζονται δυνάμει σωματίδια και κβάντα αλληλεπιδράσεων. Ένα πανηγύρι φευγαλέων πλασμάτων που όμως εξασφαλίζουν την εξωτερική σταθερή συμπεριφορά και τα καλά μετρημένα χαρακτηριστικά του νουκλεονίου.

2) Η εξίσωση Dirac (και βέβαια ούτε κατά διάνοια η εξίσωση Schrödinger) δε μπορούσε να εξηγήσει τις λεπτομέρειες της λεπτής υφής των φασματικών γραμμών του υδρογόνου και τις αποκλίσεις των θεωρητικών της προβλέψεων από τα πειραματικά δεδομένα των Willis Lamp και Robert Retherford.

Ο πονοκέφαλος των θεωρητικών Φυσικών τελείωσε όταν πάρθηκαν υπόψη τα δυνάμει σωματίδια που δημιουργούσαν οι αρχές της αβεβαιότητας.

Το άτομο του υδρογόνου, αλλά και κάθε άτομο, είναι γεμάτο με δυνάμει σωματίδια που επηρεάζουν τις ιδιότητες και τη συμπεριφορά του. Αλλάζουν π.χ. την κατανομή του φορτίου και έτσι το άτομο του υδρογόνου παύει να είναι ένα απλό σύστημα δύο σωματιδίων, ενός θετικού πρωτονίου και ενός αρνητικού ηλεκτρονίου. Γίνεται ένας άλλος καινούριος χώρος με άλλη δυναμική.

Αν λοιπόν ληφθούν υπόψη τα δυνάμει σωματίδια στο εσωτερικό του ατόμου του υδρογόνου, οι προβλέψεις της εξίσωσης του Dirac έρχονται σε απόλυτη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, εξηγώντας καταπληκτικά τις αποστάσεις των ενεργειακών σταθμών του υδρογόνου.

Έτσι **προκύπτει η πιο ακριβής σχεδόν θεωρητική πρόβλεψη που έχει γίνει ποτέ σε ολόκληρη την επιστήμη.**

3) Το άθροισμα των μαζών των τριών κουάρκς στο νουκλεόνιο δεν δίνει τη μάζα ηρεμίας του νουκλεονίου. Όπως όμως είδαμε το εσωτερικό ενός πρωτονίου είναι χώρος τρομερής δραστηριότητας. Γεννιούνται δυνάμει πλάσματα που έχουν τρομερές ταχύτητες και τεράστιες ενέργειες και που αμέσως σχεδόν εξαφανίζονται για να εμφανιστούν άλλα. Στην ενέργεια αυτών των δυνάμει σωματιδίων οφείλεται το μεγαλύτερο μέρος της μάζας ηρεμίας του νουκλεονίου.

Μπορούμε με θαυμαστή ακρίβεια να υπολογίσουμε την επίδραση των δυνάμει (εικονικών κατά άλλους) σωματιδίων στη μάζα του πρωτονίου. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για τη μάζα του ατόμου.

Τελικά υπολογίζεται ότι το μεγαλύτερο μέρος της μάζας ηρεμίας των νουκλεονίων και συνεπώς των ατόμων, άρα και της δικιά μας μάζας ηρεμίας οφείλεται στην ενέργεια αυτών των δυνάμει σωματιδίων και των (πραγματικών;) κουάρκς.

4) Αφού τα δυνάμει σωματίδια ευθύνονται για το μεγαλύτερο μέρος της μάζας των νουκλεονίων και των ηλεκτρονίων (φτιάχνουν μάζα, τον όγκο, φορτίο), ουσιαστικά ευθύνονται για τη μάζα όλων όσων βλέπουμε γύρω μας. Ίσως τελικά να ευθύνονται και για το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του Σύμπαντος. Και τελικά ίσως και για τη μοίρα του ελέγχοντας τη σκοτεινή ενέργεια.

5) Όπως θα δούμε στην εφαρμογή 6.25 τα δυνάμει φωτόνια ευθύνονται για το ηλεκτροστατικό πεδίο των φορτισμένων σωματιδίων. Και αυτό το πεδίο όπως ξέρουμε είναι και παρατηρήσιμο και μετρήσιμο.

6.24 Κάποιος πρέπει να βάλει όρια στις αρχές της αβεβαιότητας

Η αρχή της αβεβαιότητας λέει ότι τα σωματίδια, άρα και τα δυνάμει σωματίδια μπορούν να έχουν τεράστιες ενέργειες αρκεί να εξαφανίζονται σε ελάχιστο χρονικό διάστημα. Θεωρητικά λοιπόν μπορούμε να έχουμε δυνάμει σωματίδια με άπειρη σχεδόν ενέργεια αρκεί να εξαφανιστούν σε απειροελάχιστο χρονικό διάστημα.

Βέβαια αυτά δεν μπορούν να έχουν κάποια θεωρητική βάση και δεν δικαιολογείται η χρήση τους σε όλες τις κλίμακες αν δεν έχουμε στα χέρια μας μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας η οποία να θέτει τα όρια των χρονικών διαστημάτων και των μηκών που επιτρέπεται να διαχειρίζονται οι αρχές αβεβαιότητας.

Ο **χρόνος και το μήκος Planck** είναι καλά υποψήφια όρια, αλλά λείπει η θεωρία που θα τα καθιερώσει και θα τα βάλει ή όχι ως όρια στη διαιρετότητα του χώρου και του χρόνου.

Θέλω να πω ότι τα δυνάμει σωματίδια ίσως να μην μπορούν να υπάρξουν για χωροχρονικά διαστήματα μικρότερα από κάποιο όριο. Ούτε να γεννηθούν σε χωροχρόνο με διαστάσεις αυθαίρετα μικρές.

Η κβαντική βαρύτητα είναι εκείνη που, μαζί με όλα τα άλλα καλά που θα μας δώσει, θα επαναπροσδιορίσει την αρχή της αβεβαιότητας και θα μας πει τον τρόπο για να αποφύγουμε περίεργους απειρισμούς όπως π.χ. στη συνολική ενέργεια του κενού.

Πώς θα το καταφέρει αυτό;

Η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μια θεωρία που ασχολείται αιτιατά όχι μόνο με τη δυναμική και την εξέλιξη των αντικειμένων που κινούνται στο χώρο και στο χρόνο, αλλά και με την δυναμική και εξέλιξη του ίδιου του χωροχρόνου.

Η κβαντική φυσική βάζει κανόνες και περιορισμούς (π.χ. πιθανότητες, αρχές αβεβαιότητας) στις ιδιότητες των «αντικειμένων» (οντοτήτων) που υπάρχουν στο χώρο.

Η κβαντική θεωρία της βαρύτητας θα είναι συνδυασμός τους και έτσι θα βάλει κανόνες στη συμπεριφορά και στις ιδιότητες όχι μόνο των οντοτήτων που ζουν στο χωρόχρονο, αλλά και στον ίδιο τον χωρόχρονο, οριοθετώντας τη δράση των αρχών αβεβαιότητας.

6.25 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι άπειρης εμβέλειας

Το φωτόνιο δεν έχει μάζα ηρεμίας και συνεπώς δεν έχει κατώτατο όριο στην ενέργεια που μπορεί να αφαιρέσει ή να δώσει σε ένα σώμα.

Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια ενός φωτονίου μπορεί να φτάσει στο μηδέν και συνεπώς η αβεβαιότητα ΔE στην ενέργεια του, σε μια αλληλεπίδραση π.χ., μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Τότε, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, ο μέσος χρόνος ζωής του Δt μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλος.

Συνεπώς ένα φωτόνιο μπορεί να έχει οσοδήποτε μικρή ενέργεια, άρα οσοδήποτε μικρή ενεργειακή αβεβαιότητα και συνεπώς να «ζει» για οσοδήποτε μεγάλο χρονικό διάστημα, διασχίζοντας οσοδήποτε μεγάλη απόσταση.

Όμως τα φωτόνια είναι φορείς της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης και επειδή μπορούν να διασχίσουν οσοδήποτε μεγάλη απόσταση συμπεραίνουμε ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση είναι άπειρης εμβέλειας.

Το ηλεκτροστατικό πεδίο ενός φορτισμένου σώματος οφείλεται στα δυνάμει φωτόνια (στο δυνάμει φως) τα οποία εκπέμπει ασταμάτητα. Τα φωτόνια αυτά έχουν μηδενική ενέργεια και συνεπώς μηδενική αβεβαιότητα ενέργειας.

Αυτά λοιπόν τα δυνάμει φωτόνια εκπέμπονται χωρίς παραβίαση της διατήρησης της ενέργειας και έχοντας στη διάθεσή τους άπειρο χρόνο ζωής για να διανύσουν άπειρες αποστάσεις, καθιστώντας έτσι την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση άπειρης εμβέλειας.

Το ηλεκτροστατικό πεδίο λοιπόν ενός φορτισμένου σώματος οφείλεται στη συγκέντρωση πολλών τέτοιων δυνάμει φωτονίων και είναι πραγματικό, «πραγματικότατο». Μπορούμε να το μετρήσουμε και γίνεται αισθητό σε μεγάλες αποστάσεις, θεωρητικά άπειρες.

Αν όμως το φωτόνιο είχε μάζα ηρεμίας m_0 τότε για να δημιουργηθεί ένα φωτόνιο (π.χ. φωτόνιο αλληλεπίδρασης) θα απαιτείτο τουλάχιστον ενέργεια $E = m_0 c^2$. Στην περίπτωση αυτή η αβεβαιότητα της ενέργειας του φωτονίου θα ήταν της τάξης του $m_0 c^2$ και άρα το χρονικό διάστημα Δt που θα είχε στη διάθεσή του για να φέρει σε πέρας κάποια αλληλεπίδραση θα ήταν πεπερασμένο

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{m_0 c^2}$$

Επομένως η απόσταση που θα προλάβαινε να διανύσει θα ήταν πεπερασμένη και άρα η ηλεκτρομαγνητική δύναμη θα είχε πεπερασμένη εμβέλεια.

Αν λοιπόν το φωτόνιο είχε μάζα ηρεμίας, η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση θα είχε πεπερασμένη εμβέλεια.

Ας κάνουμε τα παραπάνω πιο σαφή, αναλύοντας μια ακραία κατάσταση

Ένα φορτισμένο σώμα Α στη Γη αλληλεπιδρά με ένα φορτισμένο σώμα Β στον γαλαξία της Ανδρομέδας

Τα σώματα Α και Β έχουν γύρω τους από ένα ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στη συνεχή ασταμάτητη εκπομπή δυνάμει φωτονίων με σχεδόν μηδενική ενέργεια και συνεπώς με σχεδόν μηδενική ενεργειακή αβεβαιότητα. Αφού η αβεβαιότητα της ενέργειάς τους είναι μηδενική, ο χρόνος που έχουν στη διάθεσή τους αυτά τα φωτόνια για να «ζήσουν» και να φέρουν σε πέρας οποιαδήποτε αλληλεπίδραση είναι τεράστιος.

Κάποια λοιπόν δυνάμει φωτόνια έχουν στη διάθεσή τους 2,2 περίπου εκατομμύρια χρόνια, ώστε να ασκηθεί δύναμη ανάμεσα στα σώμα Α της Γης και στο σώμα Β της Ανδρομέδας. Λέμε ότι η εμβέλεια της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης είναι άπειρη.

Παρατήρηση

Κάθε φορτισμένο σώμα διατηρεί το πεδίο του εκπέμποντας συνεχώς τεράστια πλήθη δυνάμει φωτονίων, χωρίς όμως να παραβιάζεται η διατήρηση της ενέργειας. Ή έστω δεν παραβιάζεται σε βαθμό που να είναι δυνατή οποιαδήποτε «πειραματική» της διαπίστωση. Ακόμη καλύτερα θα λέγαμε ότι δεν παραβιάζεται έξω από τα όρια που επιτρέπει η αρχή της αβεβαιότητας.

6.26 Ακτινοβολία Hawking

Γύρω από μια μαύρη τρύπα υπάρχει ένα όριο που λέγεται **ορίζοντας γεγονότων**. Ότι βρεθεί πίσω από αυτό το όριο, ακόμη και το φως, είναι καταδικασμένο να πέσει μέσα στη μαύρη τρύπα γιατί η ταχύτητα διαφυγής είναι μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός.

Ας φανταστούμε τώρα ότι «ακριβώς» έξω από τον ορίζοντα γεγονότων, όπου το βαρυτικό πεδίο είναι ισχυρότατο και οι συνθήκες που επικρατούν είναι ακραίες, οι κβαντικές διακυμάνσεις του κενού (λόγω αρχής αβεβαιότητας) δημιουργούν ένα δυνάμει ζευγάρι σωματιδίου-αντισωματιδίου.

Στην περίπτωση που δεν πέσουν και τα δύο μέσα στη μαύρη τρύπα ή δεν επανενωθούν έξω από αυτή υπάρχει πιθανότητα το ένα μόνο σωματίδιο να βρεθεί πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων. Η επανένωση τότε γίνεται αδύνατη και το σωματίδιο πέφτει μέσα στη μαύρη τρύπα πριν προλάβει να συναντήσει το ταίρι του και να εξαφανιστούν.

Κατά την πτώση χάνει ποσά βαρυτικής ενέργειας πολύ μεγαλύτερα από την ενέργεια που αντιστοιχεί στη μάζα ηρεμίας και των δύο σωματιδίων κι έτσι, χωρίς να παραβιαστεί η διατήρηση της ενέργειας, το σωματίδιο που ξέφυγε από τη μαύρη τρύπα απομακρύνεται προς το άπειρο και γίνεται παρατηρήσιμο, πραγματικό.

Η ενέργεια που χάθηκε όταν το σωματίδιο έπεσε μέσα στη μαύρη τρύπα είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια του σωματιδίου που ξέφυγε, που «ακτινοβολήθηκε». Συνεπώς το σύστημα «μαύρη τρύπα-σωματίδιο που διέφυγε» έχει μικρότερη ενέργεια από πριν με αποτέλεσμα η μαύρη τρύπα να έχει χάσει ενέργεια.

Με τον τρόπο αυτό η αρχή της αβεβαιότητας αναγκάζει τη μαύρη τρύπα να χάνει σιγά σιγά τη μάζα της (την ενέργειά της ουσιαστικά χάνει, γιατί η μαύρη τρύπα δεν έχει μάζα όπως είπαμε στις σελίδες 73 και 103). Κάποτε λοιπόν θα χαθεί όλη η μάζα της, θα ακτινοβοληθεί δηλαδή όλη η ενέργειά της και θα εξατμιστεί. Σε ποιο σημείο θα πάψει να υπάρχει δεν γνωρίζουμε γιατί στις οριακές αυτές καταστάσεις με τις τόσο μικρές χωροχρονικές κλίμακες χρειάζεται μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας.

Το φαινόμενο λέγεται **ακτινοβολία Χώκινγκ**.

Αφού από μια μαύρη τρύπα εκπέμπονται σωματίδια θα πρέπει η ακτινοβολία αυτή να συνδέεται με θερμοκρασία. Μια μαύρη τρύπα με μάζα σαν εκείνη του ήλιου έχει θερμοκρασία 0,00000006 K, δηλαδή 0,06 εκατομμυριοστά του βαθμού πάνω από το απόλυτο μηδέν.

Την ακτινοβολία Hawking και συνεπώς τη θερμοκρασία μιας μαύρης τρύπας μπορούμε να τη δικαιολογήσουμε κι αλλιώς:

Η πτώση του ενός μέλους του ζεύγους π.χ. του ενός αντισωματιδίου μέσα σε μια μαύρη τρύπα αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο που κινείται πίσω στο χρόνο, δηλαδή σε ένα σωματίδιο που ανεβαίνει προς τα «πάνω» για να βγει από τη μαύρη τρύπα τρέχοντας προς το παρελθόν. Όταν το σωματίδιο φτάσει στο σημείο όπου είχε εμφανιστεί το ζευγάρι σκεδάζεται από το ισχυρότατο βαρυτικό πεδίο της μαύρης τρύπας και ταξιδεύει κανονικά στο χρόνο.

.....

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι αρχές αβεβαιότητας μπορεί αρχικά να δημιούργησαν από το κενό ζευγάρι δυνάμει σωματιδίων, δηλαδή ζευγάρι σωματιδίων **μη παρατηρήσιμο**, αλλά οι ακραίες συνθήκες μετέτρεψαν το δυνάμει σωματίδιο σε πραγματικό, **παρατηρήσιμο**.

Για να δούμε λοιπόν να διαδραματίζονται τέτοια φαινόμενα και να βγαίνουν πραγματικά σωματίδια από το πουθενά, δεν χρειάζεται να πάμε κοντά σε μια μαύρη τρύπα. Το μόνο που χρειάζεται είναι να δημιουργήσουμε ακραίες συνθήκες πεδίων.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι αν φέρουμε πάρα πολύ κοντά δυο αντίθετα φορτισμένες πλάκες, ώστε το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσά τους να γίνει πάρα πολύ ισχυρό, τότε ενεργειακά είναι προτιμητέα η εμφάνιση μέσα από το κενό ενός πραγματικού (και όχι δυνάμει) ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου με το θετικό να πηγαίνει στην αρνητική πλάκα και το αρνητικό στην θετική.

Με αυτό τον τρόπο η μείωση της ενέργειας που οφείλεται στη μείωση του φορτίου των πλακών και συνεπώς της ισχύος του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις δύο πλάκες μπορεί να είναι μεγαλύτερη από εκείνη της ενέργειας της μάζας ηρεμίας των δύο πραγματικών σωματιδίων και άρα να υπάρξουν και τα δύο σωματίδια, να έχουν ενέργεια και να μην παραβιάζεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Πρέπει όμως οι συνθήκες να είναι κατάλληλες, δηλαδή η ισχύς του πεδίου να γίνει τεράστια.

Στην μαύρη τρύπα την τεράστια ισχύ του ηλεκτρικού πεδίου την εξασφαλίζει το τεράστιο βαρυτικό πεδίο της μαύρης τρύπας.

Παρατηρήσεις

α) Κάποτε ο Χώκινγκ είχε πει πάνω κάτω τα εξής:

Ο Einstein είπε ότι ο Θεός δεν παίζει ζάρια. Ίσως γιατί το σύμπαν είναι πια αρκετά μεγάλο. Όταν έχουμε δυνατότητα να ρίξουμε πολλές ζαριές κάπου τα πράγματα είναι αρκετά προβλέψιμα με το μέσο όρο να παίζει έναν καλό ρόλο. Άρα όταν το σύμπαν είναι μεγάλο, όπως τώρα, τα πράγματα γύρω μας είναι προβλέψιμα σε ικανοποιητικό βαθμό.

Κοντά όμως στην μεγάλη έκρηξη το Σύμπαν ήταν πολύ μικρό και συνεπώς οι ζαριές να ήταν λίγες, με αποτέλεσμα η αρχή της αβεβαιότητας να παίζει σημαντικότερο, καθοριστικότερο ρόλο κάθε στιγμή.

Άρα είναι αδύνατο να καταλάβουμε την αρχή του Σύμπαντος αν δεν ενσωματώσουμε την αρχή της αβεβαιότητας στην γενική σχετικότητα, αν δεν βρεθεί δηλαδή μια κβαντική θεωρία βαρύτητας.

β) Δεν είναι καλό να φανταζόμαστε τα δυνάμει σωματίδια ως εικονικά ή ως νοητικές μη πραγματικές οντότητες. Μπορεί να μην έχουμε τη δυνατότητα άμεσης παρατήρησής τους, αλλά υπάρχουν. Ελέγχουν την πραγματικότητα, κάνουν τις θεωρητικές μας προβλέψεις απίστευτα ακριβείς και μπορούν να γίνουν παρατηρήσιμα σε πολλές περιπτώσεις.

Τα δυνάμει φωτόνια π.χ. δεν παύουν να είναι φωτόνια. Όπως ήδη αναφέρθηκε το ηλεκτροστατικό πεδίο ενός φορτισμένου σώματος οφείλεται σε αυτά και είναι άμεσα αντιληπτό και μετρήσιμο!

Ενότητα 7

Ιστορικά βαρίδια: Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός και υλικά κύματα

7.1 1ο βαρίδι: Οι υποατομικές οντότητες έχουν διπλή φύση

Λέμε ότι τα ηλεκτρόνια, φωτόνια, πρωτόνια κλπ έχουν διπλή φύση. Άλλοτε εμφανίζονται ως κύματα και άλλοτε ως σωματίδια, ανάλογα με το φαινόμενο στο οποίο συμμετέχουν. Αυτό το ονομάζουμε κυματοσωματιδιακό δυϊσμό.

Επειδή έχω ακούσει να μιλάνε για διπλή φύση του ανθρώπου, για διπλή και κάτι πιο πάνω φύση των Αγγέλων, για τριπλή φύση του Θεού κλπ, η λέξη «δυϊσμός» στη Φυσική μου δημιουργεί δυσφορία γιατί μου θυμίζει έντονα μεταφυσική.

Το ηλεκτρόνιο δεν είναι δυνατόν κάθε Δευτέρα, Τετάρτη, Παρασκευή να είναι κύμα, κάθε Τρίτη, Πέμπτη και Σάββατο να αλλάζει φύση και να είναι σωματίδιο και την Κυριακή να προβληματίζεται σε τι πείραμα θα συμμετάσχει για να δει τι φύση θα φορέσει.

Η Φύση είναι μία και ενιαία και το κάθε «άψυχο» πλάσμα της^(*) έχει μία μόνο φύση. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι το κάθε πλάσμα στο Σύμπαν έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και συγκεκριμένη συμπεριφορά, η οποία καθορίζεται από τη σχέση του με τις 4 θεμελιώδεις δυνάμεις της Φύσης.

Τα πλάσματα του ατομικού και υποατομικού κόσμου δεν είναι ούτε κύματα ούτε σωματίδια. Είναι κβαντικά πλάσματα. Κβαντικές οντότητες. Παμπάλαια κατασκευάσματα της Φύσης με συμπεριφορά την οποία για πρώτη φορά ανακαλύψαμε στις αρχές του 20ου αιώνα.

^(*) Γράφω «άψυχο» για να παραμείνουμε σε αντικείμενα της Φυσικής και να μην εκτροχιαστούμε σε τίποτε φιλοσοφικές αναζητήσεις και συζητήσεις περί ζωής, ψυχής, συνείδησης, συμπαντικής ευφυΐας κλπ. Τον χαρακτηρισμό «άψυχο» θα παραλείψω στα επόμενα.

Το ηλεκτρόνιο είναι (σκέτο) ηλεκτρόνιο. Δεν είναι ούτε κύμα, ούτε κλασικό σωματίδιο, αλλά ένα κβαντικό πλάσμα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (μάζα, λεπτονικό αριθμό, φορτίο, σπιν κλπ) και με συγκεκριμένη συμπεριφορά απέναντι στις 4 δυνάμεις της Φύσης. Είναι πλάσμα της μίας και ενιαίας Φύσης, το οποίο συνεπώς έχει μία και μόνο μία φύση.

Όμοια **το φωτόνιο είναι φωτόνιο.** Δεν είναι ούτε κύμα, ούτε κλασικό σωματίδιο. Είναι ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, είναι το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ένα κβαντικό πλάσμα με μία μόνο φύση και με χαρακτηριστικά και συμπεριφορά που απόλυτα το ταυτοποιούν, αλλά και που απόλυτα το διαφοροποιούν από τα άλλα σωματίδια (ηλεκτρόνια, κουάρκ κ.λπ.).

Τα ίδια ισχύουν για πρωτόνιο, νετρόνιο, κουάρκ, μεσόνιο κλπ..

Αν τότε που έπρεπε είχαμε βρει άλλες λέξεις για να αποδώσουμε το καινούριο των πάρα πολύ μικρών διαστάσεων, αν π.χ. λέγαμε κβάντο ή κβαντικό σωματίδιο ή κβαντικό πλάσμα ή κβαντόνιο ή δεν ξέρω και γω τι θα εύρισκε η φαντασία ταλαντούχων Φυσικών, θα είχαμε απελευθερωθεί προ πολλού από υλικά κύματα και μεταφυσικούς δυϊσμούς.

Δυστυχώς όμως δείξαμε έλλειψη φαντασίας στη γλώσσα και έτσι βάλαμε σε μόνιμο ρίσκο τη σκέψη μας. Αντί να βρούμε και να καθιερώσουμε καινούριες λέξεις για τις καινούριες ιδιότητες και συμπεριφορές που ανακαλύψαμε, παγιδευτήκαμε στους παλιούς κλασικούς όρους, «κύμα» και «σωματίδιο», και φτάσαμε στον 21ο αιώνα κουβαλώντας βαρίδια, που όχι μόνο δεν έχουν καμιά συλλογιστική αξία και δύναμη, αλλά δημιουργούν και εντελώς λανθασμένες εντυπώσεις, ακόμη και μεταφυσικού είδους.

Κι αν αύριο όλα ενοποιηθούν και τα κβάντα των δυνάμεων και τα κβάντα της ύλης γίνουν όλα ένα, ακόμη καλύτερα. Θα είναι όλα κβάντα ενός μόνο πεδίου!!! Αλλά αυτά είναι ευχές. Προς το παρόν ας φροντίσουμε να γλιτώσουμε από τους δυϊσμούς.

7.2 2ο βαρίδι: Όλα είναι κυματοπακέτα μονοχρωματικών υλικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Το χρονικό σε ελεύθερη απόδοση:

Στις αρχές του 20ου αιώνα είχαμε την εμπειρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, αλλά προέκυψε η «ανάγκη» να τους προσδώσουμε συγχρόνως και σωματιδιακή συμπεριφορά προκειμένου να ερμηνευτούν κάποια φαινόμενα, όπως για παράδειγμα το φωτοηλεκτρικό.

Μια καλή κλασική λύση για να έχουμε συγχρόνως και κύμα και κάτι σαν σωματίδιο ήταν να καταφύγουμε στο **κυματοπακέτο**. Το κυματοπακέτο είναι κύμα (διαταραχή) που έχει όμως χωρικό και χρονικό εντοπισμό (χωροχρονική έκταση), με την έννοια ότι ουσιαστικά είναι διάφορο του μηδενός μόνο σε μια χωροχρονική περιοχή και μηδέν σε όλα τα άλλα σημεία.

Μετά την επιτυχία του Planck στο φάσμα του μέλανος σώματος και ενθαρρυμένοι τόσο από τον τρόπο που ο Einstein εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο όσο και από τον πανέμορφο όρο φωτόνιο που χρησιμοποιήθηκε για το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δώσαμε έκταση και «δομή» στο φωτόνιο. Το κάναμε κυματοπακέτο γεμάτο μονοχρωματικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα!

Και δε μας έφτανε μόνο αυτό! Κατά τη γνώμη του de Broglie και κάποιων άλλων η Φύση «έπρεπε» να είναι συμμετρική. Αφού λοιπόν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έγιναν και

σωματίδια, καταφεύγοντας στη λύση του χωροχρονικά εντοπισμένου κυματοπακέτου, «έπρεπε» τα σωματίδια να γίνουν και κύματα καταφεύγοντας στην ίδια λύση.

Έτσι τα σωματίδια, και γενικότερα όλα τα σώματα, έγιναν κυματοπακέτα γεμάτα όμως με ένα καινούριο είδος μονοχρωματικών κυμάτων τα οποία ονομάστηκαν **υλικά κύματα**.

Τη μαθηματική περιγραφή των κυματοπακέτων θα αναλάμβανε η κυματική θεωρία και η ανάλυση Fourier. Οι νευτώνειες τροχιές των σωματιδίων θα ήταν οι τροχιές των κυματοπακέτων (*) και η κλασική ταχύτητα των σωματιδίων θα ήταν η ομαδική ταχύτητα των κυματοπακέτων. Τα μακροσκοπικά αντικείμενα θα ήταν ένα σύνολο κυματοπακέτων και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων θα ήταν αλληλεπιδράσεις (συμβολές) κυμάτων.

Και άντε με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είχαμε τη θεωρητική εμπειρία και κάπως βολέψαμε το φωτόνιο. Αλλά τα υλικά κύματα, με τα οποία έπρεπε να βολευτούν τα υπόλοιπα σωματίδια, ήταν κυριολεκτικά αίολα.

Τα ερωτήματα είναι απαντωτά και αναπάντητα. Οι συλλογισμοί εντελώς αδιέξοδοι και η σκέψη διάτρητη και μετέωρη:

- Τι είναι το υλικό κύμα;
- Τι σημαίνει ότι το ηλεκτρόνιο, το οποίο είναι στοιχειώδες σωματίδιο και άρα χωρίς δομή, είναι κυματοπακέτο; Τι σημαίνει ότι έχει μήκος κύματος;
- Τι σημαίνει μήκος κύματος πρωτονίου όταν μέσα του έχει τουλάχιστον 3 παρτόνια (partons); Το πρωτόνιο είναι στάσιμο κύμα;
- Τι σημαίνει ότι ένα σωματίδιο με απόλυτα ακριβή τιμή ορμής αντιστοιχεί σε μονοχρωματικό υλικό κύμα που πρέπει να γεμίζει με την παρουσία του όλο το σύμπαν; (σελ.16)
- Τι σημαίνει συχνότητα του υλικού κύματος που λέγεται νετρόνιο; Μπορούμε να μετρήσουμε τη συχνότητα και το μήκος κύματος ενός υλικού κύματος και πώς;
- Ποιος ταλαντώνεται στο υλικό κύμα ή έστω, ποιος μεταβάλλεται κάπως περιοδικά για να μιλάμε για συχνότητα;
- Τι είναι η φασική ταχύτητα ενός σωματιδίου; Υπάρχουν όρη και κοιλάδες σε ένα σωματίδιο; Μέγιστα και ελάχιστα;
- Στους μηδενισμούς των ταλαντώσεων των κυματοπακέτων το σωματίδιο εξαφανίζεται;
- Τα υλικά κύματα διαδίδονται μόνο στο κενό ή διαθλώνται, όπως κάνει η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία;
- Ποια υλικά είναι διάφανα στα υλικά κύματα;

Όταν ένα κλασικό κύμα (κυματοπακέτο, παλμός) πέσει πάνω στο σύνορο δύο μέσων ξέρουμε ότι χωρίζεται συνήθως σε δύο κυματοπακέτα, ένα ανακλώμενο και ένα διαθλώμενο

(*) Αυτό είχε περάσει από το μυαλό του Schrodinger και είχε εξετάσει κατά κάποιο τρόπο πέτρες-υλικοκυματοπακέτα να διαγράφουν παραβολικές τροχιές μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης, κινούμενα με ταχύτητες τις ταχύτητες ομάδας κυμάτων.

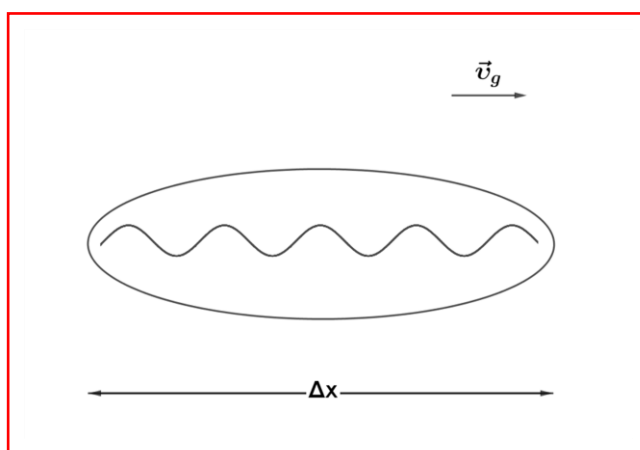
Όταν όμως ένα κυματοπακέτο-ηλεκτρόνιο, που έχει μήκος κύματος $\lambda = h/p$, πέσει πάνω σε ένα φράγμα (σε ένα σύνορο δηλαδή) που δημιουργήθηκε π.χ. από κάποια μεταβολή στο δυναμικό τι θα κάνει; Θα χωριστεί σε δύο κυματοπακέτα, ανακλώμενο και διαθλώμενο, αλλά εμείς θα πούμε ότι τελικά έχουμε ένα μόνο ηλεκτρόνιο, μιας και ποτέ δεν παρατηρήθηκε κομμένο ηλεκτρόνιο;

(ατέλειωτη η σειρά από τα αδιέξοδα)

.....

Αυτά τα περί υλικών κυμάτων και κυματοσωματιδιακών δυϊσμών είναι πολύ μπερδεμένα πράγματα, τουλάχιστον για τη δικιά μου σκέψη. Μου είναι πάρα πολύ δύσκολο και να τα συντηρήσω και να τα αναπαράγω. Όταν πάω να μιλήσω για μήκος κύματος ηλεκτρονίου κάτι δεν μου πάει καλά στην σκέψη. Η γλώσσα μου μπερδεύεται. Νιώθω να προδίδω συλλογισμούς και να λέω ανισόρροπα πράγματα. Με ποιο δικαίωμα να μιλήσω για μήκος κύματος ηλεκτρονίου;

Προφανώς μου είναι αδύνατο να σχεδιάσω σωματίδια ή φωτόνια, όπως αυτό στο παρακάτω σχήμα. Δεν είναι απλά κωμικό, αλλά επικίνδυνο. Είναι σκίτσο προς αποφυγή.



Σχήμα 7.1: Κυματοσωματιδιακό σκίτσο για την απόδοση της δίδυνης φύσης των κβαντικών σωματιδίων, όπως είναι τα φωτόνια, ηλεκτρόνια κλπ. Τέτοιου είδους σκίτσα μόνο ζημιά κάνουν

Να πω την αλήθεια ούτε ως μαθητής είχα καταλάβει όλα αυτά τα παράξενα με τη διπλή φύση των σωματιδίων, ούτε ως φοιτητής μπόρεσα να συνηθίσω όλη αυτή τη νοητική ταλαιπωρία, ούτε τώρα μπορώ να αναπαράγω όλα αυτά τα συλλογιστικά αδιέξοδα.

Από την πρώτη κιόλας στιγμή που διάβασα για de Broglie και υλικά κύματα και δυϊσμούς ένιωσα αβάσταχτη δυσφορία. Όλα αντηχούσαν μέσα μου ως μια ατέλειωτη α-νοησία. Ευτυχώς σύντομα ως φοιτητής μπήκα στα όμορφα της Κβαντομηχανικής και κυριολεκτικά ελευθερώθηκα... Ανάσανα... Κατάλαβα ότι όλα αυτά τα περί μήκους κύματος ηλεκτρονίου και υλικών κυμάτων και διπλών φύσεων όχι μόνο δεν ευσταθούσαν, όχι μόνο με μπερδευαν, αλλά το κυριότερο ότι δεν χρειαζόταν πουθενά για τη σκέψη μου και τη ματιά μου. Ξέφυγα και κυριολεκτικά ελευθερώθηκα!

.....

O de Broglie πίστευε ότι η Φύση «έπρεπε» να είναι συμμετρική. Δικαίωμά του και άντε να συζητήσουμε το τι σημαίνει συμμετρία, τι σημαίνει «συμμετρική» Φύση και πόσο δυνατή είναι η έννοια της συμμετρίας στην ερμηνεία του Κόσμου.

Αλλά από το να πούμε ότι η Φύση είναι συμμετρική, μέχρι να της αλλάξουμε κυριολεκτικά τα φώτα υπάρχει μεγάλη απόσταση.

7.3 3ο βαρίδι: Τα υλικά κύματα είναι κύματα πιθανότητας;

Σε μια εντελώς απεγνωσμένη προσπάθεια να διατηρηθούν λέξεις και σκέψεις από τις κλασικές μας εμπειρίες και να γλιτώσουμε ό,τι μπορούμε από την ιδέα των υλικών κυμάτων, φτάσαμε να λέμε ότι τα υλικά κύματα είναι τελικά κύματα-οδηγοί και **κύματα πιθανότητας** (!) που τρέχουν «μπροστά» ή «πίσω» ή πάνε μαζί γενικώς και ελέγχουν τη συμπεριφορά του σωματιδίου με πιθανότητες κλπ κλπ κλπ.

Η εμμονή στα υλικά κύματα, στις διπλές φύσεις και τελικά στον de Broglie αύξησε το πλήθος των ερωτημάτων μας:

Η κβαντική πυκνότητα πιθανότητας $|\psi(x, t)|^2$ που προκύπτει από την τόσο καλά φροντισμένη κυματοσυνάρτηση-λύση της εξίσωσης Schrödinger

- ✓ είναι κύμα;
- ✓ πληροί κάποια κυματική εξίσωση;
- ✓ έχει συμπεριφορά κύματος; Έχει συχνότητα και μήκος κύματος;
- ✓ είναι ένα παράξενο κύμα σε κάποιον χώρο χωρίς συχνότητες;
- ✓ είναι κυματοπακέτο ή μονοχρωματικό;
- ✓ είναι παλμός που πληροί κάποιο καινούριο θεώρημα τύπου bandwidth;
- ✓ έχει μέσο διάδοσης και ταχύτητα ομάδας;
- ✓ έχει φασικές ταχύτητες και μονοχρωματικές συνιστώσες και προέρχεται από κάποιες περίεργες επαλληλίες;
- ✓ έχει πλάτος και ένταση;

Αυτά όλα είναι εντελώς απίστευτα πράγματα, εκτός αν όταν λέμε υλικό κύμα και κύμα πιθανότητας κλπ εννοούμε κάτι σα να λέμε «κύμα αισιοδοξίας», «κύμα φτώχειας», «κύμα έξαρσης ιού», «κύμα ενθουσιασμού», «κύμα καύσωνα» κλπ

Όλα τα παραπάνω είναι ωραίες λέξεις για έκθεση, αλλά δεν κάνουν για Φυσική.

Ειλικρινά δεν καταλαβαίνω τι τα θέλουμε όλα αυτά τα κολλήματα σε ξεπερασμένους, αναχρονιστικούς και συλλογιστικά αδιέξοδους όρους.

Τι τον θέλουμε τον όρο «κύμα» παντού; Δεν μας φτάνει η ακριβέστατη, αξιοπρεπέστατη και πανίσχυρη φράση «Το $|\psi(x, t)|^2$ είναι πυκνότητα πιθανότητας»; Δεν μας φτάνει η τόσο σημαντική λειτουργία της κυματοσυνάρτησης; Δε λέω, ο όρος «κυματοσυνάρτηση»

είναι ένας κακός όρος! Θα έπρεπε να λέγεται κβαντοσυνάρτηση ή κβαντική συνάρτηση συστήματος ή κάτι πολύ πιο ευφυές, αλλά τι να κάνουμε ας δεχτούμε τον όρο ως ιστορική συνήθεια, όπως δεχτήκαμε τη φορά του ρεύματος. Αλλά μέχρι εκεί.

Τι τον θέλουμε τον όρο «μήκος κύματος ηλεκτρονίου» όταν έχουμε στα χέρια μας όρους όπως «ενέργεια ηλεκτρονίου», «ορμή ηλεκτρονίου»; Τι τον θέλουμε τον όρο μήκος κύματος για μια οντότητα, όπως το λεπτόνιο, που είναι στοιχειώδης, όταν έχουμε δίπλα μας θαυμάσιους κβαντομηχανικούς όρους όπως είναι η αβεβαιότητα θέσης και ορμής;

Λίγο μας είναι οι πανίσχυρες αρχές αβεβαιότητας που έχουμε στα χέρια μας; Δεν μας φτάνουν οι κβαντικοί τελεστές και η καταπληκτική λειτουργία τους; Δεν μας καλύπτουν τα κορυφαία μεγέθη της Φυσικής ενέργεια, ορμή με τους πανίσχυρους νόμους διατήρησης;

Ένσταση

Μα τα υλικά κύματα και τα κύματα πιθανότητας και οι διπλές φύσεις κλπ. είναι αφηρημένες έννοιες. Και ως αφηρημένες τις χρησιμοποιούμε. Στο κάτω κάτω και στην κλασική φυσική έχουμε αφηρημένες έννοιες.

Πάρε για παράδειγμα την έννοια του κέντρου μάζας, όπου σε ένα μαθηματικό σημείο θεωρούμε ότι βρίσκεται συγκεντρωμένη όλη η μάζα του συστήματος. Σε μια κούφια σφαίρα το κέντρο μάζας είναι στο γεωμετρικό κέντρο της, αλλά εκεί δεν υπάρχει καμιά μάζα και δε μπορεί να ασκηθεί καμιά δύναμη. Εν τούτοις την έννοια «κέντρο μάζας», με όλη τη μάζα συγκεντρωμένη εκεί, τη χρησιμοποιούμε παντού με μεγάλη επιτυχία.

Όπως αφηρημένα μιλάμε για κέντρο βάρους, με την ίδια λογική λοιπόν μιλάμε για τα υλικά κύματα, για τα κύματα πιθανότητας, για τον δυϊσμό, για το μήκος κύματος ηλεκτρονίου κλπ

Απάντηση

Νομίζω ότι δε μιλάμε με την ίδια λογική. Στα περί δυϊσμού μιλάμε χωρίς καμιά λογική. Τα περί διπλής φύσης και υλικών κυμάτων και κυμάτων πιθανότητας και μήκος κύματος ηλεκτρονίου κλπ δεν έχουν κανένα συνεπή συλλογισμό.

Το κέντρο μάζας έχει ορισμό, έχει λειτουργία, έχει συγκεκριμένο νόημα, μπαίνει με κατανοητό και συνεπή τρόπο στις εξισώσεις μας, δεν προκαλεί καμιά παρανόηση. Η έννοια του κέντρου μάζας έχει μαθηματική προοπτική και φυσική υπόσχεση για μια πιο δυνατή γραφή των νόμων της Φύσης και των εξισώσεων της Φυσικής.

Τα υλικά κύματα και οι διπλές φύσεις όμως μας χαλάνε τη σκέψη οδηγώντας μας σε αδιέξοδα, σε λάθη και σε παρανοήσεις. Υπάρχει καμιά λογική όταν λέμε μήκος κύματος ηλεκτρονίου, δηλαδή ενός στοιχειώδους σωματιδίου;

Ο δυϊσμός έχει την ίδια δυναμική στις εξισώσεις μας και την ίδια μαθηματική προοπτική και λάμψη με την έννοια του κέντρου μάζας, έστω μιας κούφιας σφαίρας;

Είναι λογική Φυσικής το να λέμε μήκος κύματος και συχνότητα ενός σωματιδίου και να μην ξέρουμε με ουσία ούτε καν τι εννοούμε γιατί δεν έχουμε ούτε έναν συνεπή ορισμό; Είναι λογική Φυσικής να τα μπερδεύουμε όλα και να ψαχνόμαστε ή να τα υιοθετούμε και να τα προσπερνάμε με ελαφρότητα γιατί τα είπαν και τα γράψανε άλλοι, που θεωρούνται αυθεντίες;

Η γνώμη μου είναι κατηγορηματικά όχι!

Υπάρχουν δίπλα μας οι τρομερές αρχές της αβεβαιότητας, ανακαλύψαμε την πανίσχυρη πυκνότητα πιθανότητας στη δομή της Φύσης, υπάρχουν τα κορυφαία μεγέθη της φυσικής,

όπως ορμή, ενέργεια, στροφορμή κλπ, για να συνεννοούμαστε με αξιοπρέπεια και για να συλλογιζόμαστε όμορφα και δυνατά με τις εξισώσεις μέσα στις οποίες βρίσκονται.

Υπάρχουν τόσοι και τόσοι σύγχρονοι, κβαντικοί και σωστοί όροι για να αποδώσουμε αυτό που θέλουμε να πούμε για τις συμπεριφορές στον μικρόκοσμο...

Νομίζω λοιπόν ότι δεν αξίζει να μιλάμε και να περιγράφουμε το λαμπερό και καινούριο, με παλιούς αδιέξοδους, σκοτεινούς και παραπλανητικούς όρους.

Όπως προανέφερα, το πρόβλημα ξεκίνησε από το ότι για μια νέα, δροσερή, πρωτόγνωρη συμπεριφορά, την κβαντική συμπεριφορά, χρησιμοποιήθηκαν αρχικά δύο παλιές πολύ πετυχημένες συμπεριφορές (Νεύτωνα και Μάξγουελ, σωματίδια και κύματα) των οποίων είχαμε μεγάλη εμπειρία και έτοιμες θεωρίες.

Όμως το πρωτόγνωρο απαιτεί πάντα καινούρια ματιά και καινούριους όρους που δεν θα βαραίνουν τη σκέψη μας, αλλά θα την αφήνουν να πετά ελεύθερα.

Νομίζω ότι, μετά από τα 100 χρόνια που πέρασαν, έπρεπε ήδη να έχουμε απαλλαγεί από τους μεταφυσικούς δυϊσμούς, από τα μήκη κύματος των κβάντων (φωτόνια, ηλεκτρόνια, κουάρκς κλπ) και από τα α-νόητα έως κωμικά υλικά κύματα.

Η μία και μοναδική κβαντική φύση των σωματιδίων δεν έχει ανάγκη τη μεταφυσική των δύο ταυτόχρονων κλασικών φύσεων. Μια ως κλασικό κύμα και μια ως κλασικό σωματίδιο.

Ας το πούμε πιο απλά:

Αυτά τα περί κυματοσωματιδιακού δυϊσμού και διπλών φύσεων και υλικών κυμάτων πρέπει να τελειώνουν πια ως ιστορικές α-νοησίες.

**Δύο κλασικές φύσεις
δεν θα μπορέσουν ποτέ μα ποτέ να δώσουν μία κβαντική**

Ενότητα 8

Το φαινόμενο Compton

Σκέδαση Compton: Φωτόνια υψηλής ενέργειας, συνήθως Χ ή γ, σκεδάζονται από ελεύθερα ή ασθενώς δεσμευμένα ηλεκτρόνια. Η σκέδαση αυτή των φωτονίων συνοδεύεται από μείωση της ενέργειάς τους, η οποία εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης.

8.1 Θεωρητική ανάλυση

Α. Προκαταρκτικά

1) Στο φαινόμενο Compton

- οι ενέργειες των φωτονίων που χρησιμοποιούνται είναι της τάξης των δεκάδων ή εκατοντάδων χιλιάδων eV
- η ενέργεια της μάζας ηρεμίας mc^2 του ηλεκτρονίου είναι περίπου 0,5 MeV
- οι ενέργειες των ηλεκτρονίων στα άτομα, μόρια, ιόντα κλπ είναι συνήθως της τάξης των μερικών δεκάδων ή εκατοντάδων eV

Άρα ως ελεύθερα ή ασθενώς δεσμευμένα ηλεκτρόνια-στόχο μπορούμε θεωρητικά να χρησιμοποιήσουμε τα ηλεκτρόνια **οποιοδήποτε υλικού**: ελεύθερα ηλεκτρόνια μετάλλων, ηλεκτρόνια σε άτομα, σε ιόντα, σε μόρια κλπ.

Στο αρχικό πείραμα ο Compton έριξε ακτίνες Χ σε γραφίτη, χρησιμοποίησε δηλαδή ως «στόχο» τα ηλεκτρόνια των ατόμων του άνθρακα.

2) Οι ενέργειες και οι ορμές των προσπίπτοντων φωτονίων είναι τόσο μεγάλες ώστε οι αρχικές ενέργειες και ορμές των ηλεκτρονίων-στόχων μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Άρα τα ηλεκτρόνια πάνω στα οποία προσπίπτουν τα φωτόνια μπορούν να θεωρηθούν αρχικά «ακίνητα».

3) Μετά τη σκέδαση των φωτονίων, οι ταχύτητες που αποκτούν τα ηλεκτρόνια είναι πάρα πολύ μεγάλες και συνεπώς η σχέση μεταξύ της ενέργειας και της ορμής τους πρέπει να είναι σχετικιστική.

Η σχετικιστική ενέργεια E ενός σωματιδίου με μάζα ηρεμίας m συνδέεται με το μέτρο της ορμής του p με τη σχέση (σελ. 70 σχέση 5.9)

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (5.9)$$

Άρα

Το φωτόνιο έχει μάζα ηρεμίας $m=0$ και συνεπώς ισχύει πάντα

$$E_{\text{φωτ}} = p_{\text{φωτ}} \cdot c$$

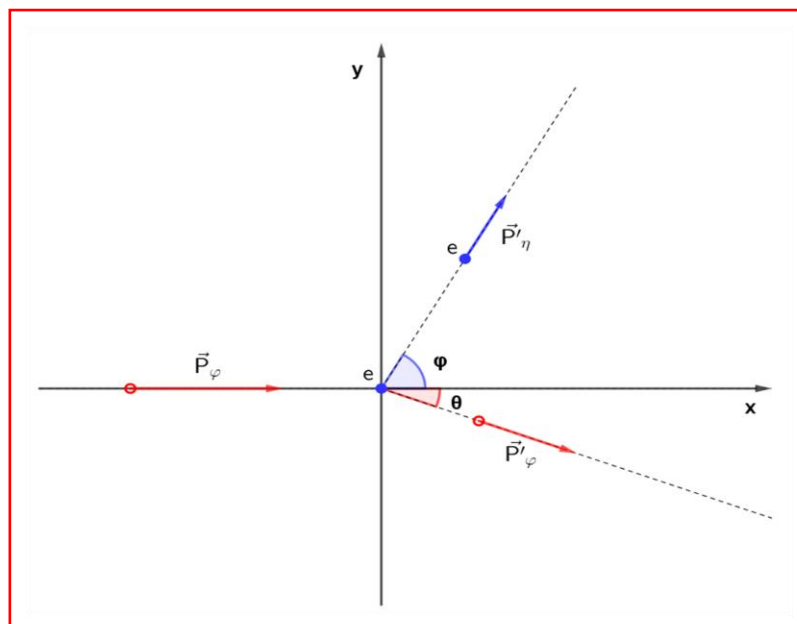
Ένα «ακίνητο» ηλεκτρόνιο έχει σχετικιστική ενέργεια

$$E_{\eta} = mc^2$$

4) Στα παρακάτω ο δείκτης «φ» αφορά στο φωτόνιο και ο «η» στο ηλεκτρόνιο. Τα σύμβολα της ενέργειας E , ορμής p και μήκους κύματος λ χωρίς τόνο αφορούν σε τιμές πριν τη σκέδαση, ενώ με τόνο αφορούν σε τιμές μετά την σκέδαση.

B. Φορμαλιστική ανάλυση της σκέδασης Compton

Στο σχήμα 8.1 φαίνεται η σκέδαση Compton.



Σχήμα 8.1: Στο φαινόμενο Compton έχουμε απορρόφηση και εκπομπή φωτονίου σε αντίθεση με το φωτοηλεκτρικό όπου έχουμε μόνο απορρόφηση. Η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης θ

Οι τιμές των ενεργειών φωτονίου και ηλεκτρονίου πριν και μετά την σκέδαση είναι

$$E_{\varphi} = p_{\varphi} \cdot c \quad (8.1)$$

$$E_{\eta} = mc^2 \quad (8.2)$$

$$E'_{\varphi} = p'_{\varphi} \cdot c \quad (8.3)$$

$$E'^2_{\eta} = p'^2_{\eta} c^2 + m^2 c^4 \quad (8.4)$$

Οι νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής οδηγούν στις εξισώσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\varphi} + E_{\eta} = E'_{\varphi} + E'_{\eta} \end{array} \right. \quad (8.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\varphi} = p'_{\varphi} \cdot \cos\theta + p'_{\eta} \cdot \cos\varphi \end{array} \right. \quad (8.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = p'_{\varphi} \cdot \sin\theta - p'_{\eta} \cdot \sin\varphi \end{array} \right. \quad (8.7)$$

Λόγω των (8.1), (8.2) και (8.3) το παραπάνω σύστημα γίνεται

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_{\eta} = E_{\varphi} - E'_{\varphi} + mc^2 \end{array} \right. \quad (8.5\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{\varphi}}{c} - \frac{E'_{\varphi}}{c} \cdot \cos\theta = p'_{\eta} \cdot \cos\varphi \end{array} \right. \quad (8.6\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E'_{\varphi}}{c} \cdot \sin\theta = p'_{\eta} \cdot \sin\varphi \end{array} \right. \quad (8.7\alpha)$$

Για να βγάλουμε συμπεράσματα για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία πρέπει να απομονώσουμε σε μια σχέση τις μεταβλητές E_{φ} , E'_{φ} και θ που την αφορούν.

Τις (8.6α) και (8.7α) υψώνω στο τετράγωνο και προσθέτω κατά μέλη

$$p'^2_{\eta} c^2 = E_{\varphi}^2 + E'^2_{\varphi} - 2E_{\varphi} E'_{\varphi} \cos\theta \quad (8.8)$$

Τις (8.5α) και (8.8) αντικαθιστώ στην (8.4) οπότε

$$\frac{1}{E'_{\varphi}} - \frac{1}{E_{\varphi}} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta) \quad (8.9)$$

ή

$$\frac{1}{E'_{\varphi}} - \frac{1}{E_{\varphi}} = \frac{2}{mc^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.9\alpha)$$

Άρα η ενέργεια E'_{φ} του φωτονίου μετά τη σκέδαση από το ηλεκτρόνιο δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{E'_{\varphi}} = \frac{1}{E_{\varphi}} + \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta) = \frac{1}{E_{\varphi}} + \frac{2}{mc^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (8.10)$$

Αν αντί της ενέργειας των φωτονίων χρησιμοποιήσουμε το μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στην οποία αντιστοιχούν (σελ.67, σχέσεις 5.4) προκύπτει

$$\frac{\lambda'_{\varphi}}{hc} - \frac{\lambda_{\varphi}}{hc} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta)$$

συνεπώς

$$\lambda'_{\varphi} - \lambda_{\varphi} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

και τελικά

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2} \quad (8.11)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι

- Η μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda$ αυξάνεται με τη γωνία σκέδασης θ
- Η μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda$ είναι ανεξάρτητη από το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας που χρησιμοποιήθηκε
- Αν η σταθερά h «μπορούσε» να γίνει μηδέν, τότε $\Delta\lambda = 0$ και συνεπώς δεν θα είχαμε ούτε μεταβολή στο μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, ούτε φαινόμενο Compton, ούτε κβαντική φυσική. Η σταθερά του Planck h «κβάντωσε» το φως και άνοιξε το δρόμο για όλη την κβαντική φυσική.

Η ποσότητα

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,426 \text{ \AA} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

ονομάζεται **μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου**, ενώ η ποσότητα

$$\lambda'_C = \frac{\hbar}{mc} = 3,861 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

ονομάζεται κάποιες φορές **ανηγμένο μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου**.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η τιμές των λ_C και λ'_C βρίσκονται ανάμεσα στην τάξη μεγέθους της ακτίνας του πυρήνα (10^{-15} m) και στην τάξη μεγέθους της ακτίνας του ατόμου (10^{-10} m).

Όπως θα δούμε παρακάτω **αυτό δεν είναι τυχαίο** αλλά σχετίζεται με την αβεβαιότητα της θέσης του ηλεκτρονίου στο φαινόμενο Compton ή καλύτερα με την αβεβαιότητα της θέσης στην οποία αλληλεπιδρούν το φωτόνιο και το ηλεκτρόνιο στο φαινόμενο Compton.

Γ. Μερικές φυσικές (ποιοτικές) δικαιολογήσεις πάνω στη σκέδαση Compton

Γ1. Το φάσμα ενέργειας των σκεδαζόμενων φωτονίων εξαρτάται από τη γωνία σκέδασης θ στην οποία εξάλλου γίνεται και η εργαστηριακή καταγραφή του. Όμως σε κάθε γωνία θ (εκτός της $\theta=0$) υπάρχουν πάντα δύο ενεργειακές κορυφές (σχήμα 8.2). Μία κορυφή στο

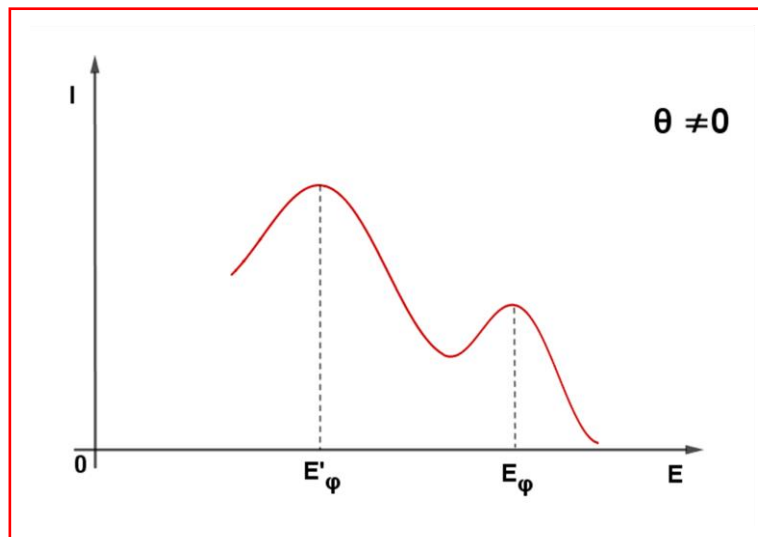
E'_{φ} που αντιστοιχεί σε σκεδαζόμενα φωτόνια που υπέστησαν μείωση της ενέργειάς τους και μία κορυφή στο E_{φ} που αντιστοιχεί σε σκεδαζόμενα φωτόνια που δεν έχουν υποστεί μεταβολή της ενέργειας τους.

Πρώτη διαδικασία σκέδασης - Δικαιολόγηση της κορυφής E'_{φ}

Η κορυφή αυτή αντιστοιχεί στην ενέργεια E'_{φ} που υπολογίσαμε στη σχέση (8.10). Κάποια από τα ηλεκτρόνια των ατόμων που χρησιμοποιούνται ως στόχος των ακτίνων Χ αφαιρούν μέρος της ενέργειας των προσπιπτόντων φωτονίων και δραπετεύουν από το άτομο.

Κατά συνέπεια

- το άτομο μετατρέπεται σε **ión**
- το φωτόνιο σκεδάζεται με ενέργεια μικρότερη αυτής που είχε
- το ηλεκτρόνιο εκτινάσσεται σε διαφορετική γωνία από το φωτόνιο

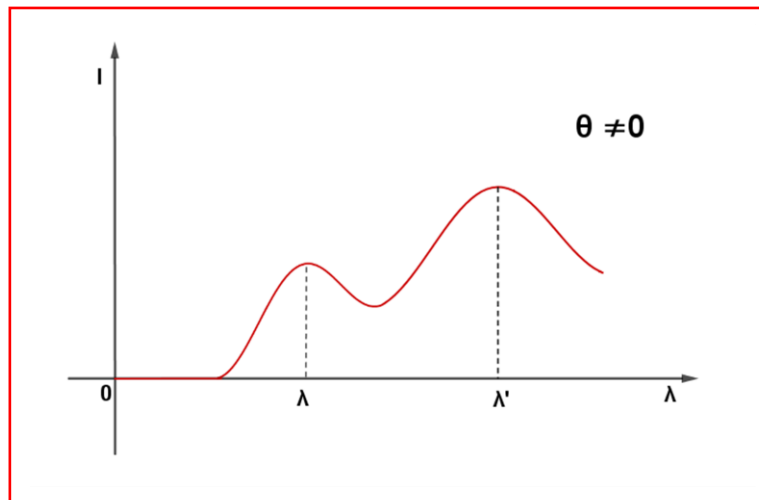


Σχήμα 8.2: Στο πείραμα Compton, σε κάθε γωνία σκέδασης θ αντιστοιχούν δύο κορυφές στο ενεργειακό φάσμα των φωτονίων. Στην E_{φ} τα φωτόνια δεν έχουν υποστεί αλλαγή ενέργειας, ενώ στην E'_{φ} έχουν χάσει ενέργεια. Ο άξονας E αντιστοιχεί στην ενέργεια των φωτονίων και ο άξονας I στην ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.

Το σχήμα (8.3) είναι «μετάφραση» του προηγούμενου ενεργειακού διαγράμματος φωτονίων σε μήκη κύματος σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.

Δεύτερη διαδικασία σκέδασης - Δικαιολόγηση της κορυφής E_{φ}

Κάποια από τα ηλεκτρόνια του υλικού που χρησιμοποιείται ως στόχος ή είναι εσωτερικά των ατόμων του ή ακόμη καλύτερα είναι ηλεκτρόνια (εσωτερικά ή μη), των ιόντων που δημιουργήθηκαν με την πρώτη διαδικασία σκέδασης. Τα ηλεκτρόνια αυτά είναι πιο ισχυρά «δεμένα» στο άτομο ή στο ίον και έτσι έχουν μεγάλη πιθανότητα μιας άλλης συμπεριφοράς κατά την πρόσπτωση των φωτονίων. Συγκεκριμένα αλληλεπιδρούν με την ακτινοβολία



Σχήμα 8.3: Φάσμα με τα διάφορα μήκη κύματος που καταγράφονται σε κάποια γωνία σκέδασης θ . Η κλασική κυματική θεωρία αδυνατεί να εξηγήσει την κορυφή στο μήκος κύματος λ' . Κλασικά η σκέδαση δε μπορεί να προκαλέσει αύξηση του μήκους κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

αλλά τελικά παραμένουν στην αρχική τους κατάσταση, με αποτέλεσμα η απώλεια ενέργειας του φωτονίου να χρησιμοποιείται για την **αναπήδηση** ολόκληρου του ιόντος ή του ατόμου ως συγκρότημα. Συνεπώς την όποια ενέργεια χάνει το φωτόνιο την παίρνει το συγκρότημα στο οποίο ανήκει το ηλεκτρόνιο και όχι το ηλεκτρόνιο, το οποίο εξάλλου δεν αποσπάται από το ιόν ή το άτομο.

Και σε αυτή τη διαδικασία αλληλεπίδρασης έχουμε φαινόμενο Compton, αλλά στη σκέδαση του φωτονίου συμμετέχει όλο το ιοντικό ή ατομικό συγκρότημα. Η ενέργεια E'_φ που απομένει στο φωτόνιο προβλέπεται και πάλι από την εξίσωση (8.10), αν όμως στη θέση της μάζας m του ηλεκτρονίου στο δεύτερο μέλος βάλουμε τη μάζα όλου του συγκροτήματος. Επειδή η μάζα αυτή είναι τεράστια σε σχέση με τη μάζα m , η απώλεια ενέργειας του φωτονίου είναι ελάχιστη έως μηδενική και συνεπώς το φωτόνιο δεν χάνει ουσιαστικά την ενέργειά του

$$E'_\varphi \approx E_\varphi$$

Αριθμητικό παράδειγμα

Στο αρχικό πείραμα Compton, ως υλικό-στόχος των ακτίνων Χ χρησιμοποιήθηκε γραφίτης, δηλαδή άτομα άνθρακα που ως γνωστό έχουν 12 νουκλεόνια στον πυρήνα τους και 6 ηλεκτρόνια γύρω του.

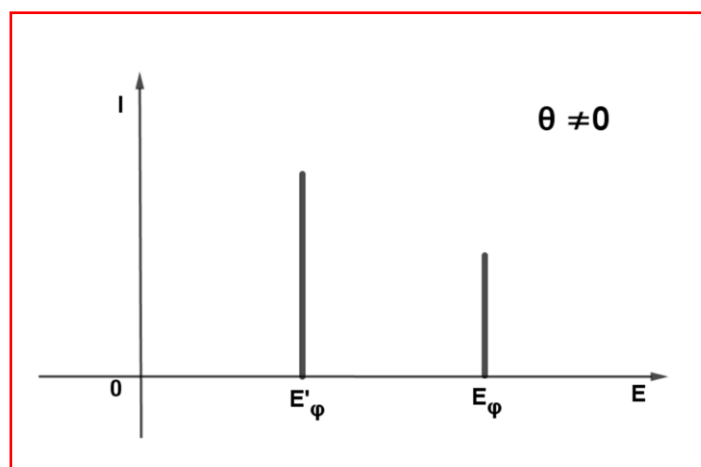
Με δεδομένο ότι η μάζα του νουκλεονίου (πρωτονίου ή νετρονίου) είναι κάπου 1837 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου, η μάζα ηρεμίας του ατόμου του άνθρακα είναι περίπου $(12 \cdot 1837 + 6)m = 22050m$ όπου m η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου.

Άρα στην περίπτωση που η σκέδαση του φωτονίου προκληθεί από αναπήδηση ολόκληρου ατόμου ή ιόντος άνθρακα πρέπει στη θέση της μάζας m του ηλεκτρονίου στη σχέση (8.10) να βάλουμε μάζα $22050m$.

Όπως εύκολα φαίνεται κάνοντας λίγες αριθμητικές αντικαταστάσεις η ενέργεια E'_φ που απομένει στο φωτόνιο είναι σχεδόν ίση με την αρχική του ενέργεια E_φ .

Άρα στην περίπτωση αναπήδησης ατόμου ή ιόντος $E'_\varphi \approx E_\varphi$.

Γ₂) Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η μαθηματική επεξεργασία του φαινομένου Compton που δόθηκε στη σελίδα 141 δικαιολογεί μόνο τις δύο ενεργειακές κορυφές E'_φ και E_φ . Συνεπώς αν τα πράγματα ήταν τόσο απλά θα έπρεπε το λαμβανόμενο φάσμα των ενεργειών των φωτονίων στις διάφορες γωνίες σκέδασης να περιλαμβάνει δύο μόνο κορυφές και να είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 8.4: Το ενεργειακό φάσμα των φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του ηλεκτρονίου αν δε ληφθεί υπόψη το φαινόμενο Doppler και η αρχή αβεβαιότητας. Η μαθηματική επεξεργασία του φαινομένου Compton στη σελίδα 141 αφορούσε μόνο αυτές τις δύο ενέργειες

Όμως το σωστό φάσμα ενεργειών που λαμβάνεται στις διάφορες γωνίες καταγραφής θ στο εργαστήριο φαίνεται στο σχήμα 8.2 και έχει ένα ολόκληρο εύρος ενεργειών ανάμεσα στις δύο κορυφές και εκατέρωθεν αυτών.

Αυτό δικαιολογείται ως εξής:

Για την απόδειξη των σχέσεων (8.9) και (8.11) υποθέσαμε ότι η σκέδαση των φωτονίων έγινε στο σύστημα ηρεμίας (αναφοράς) του ηλεκτρονίου στο οποίο συνεπώς και ισχύουν οι συγκεκριμένες σχέσεις.

Για μια πιο γενική σχέση η οποία να ισχύει στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και άρα **να αποδίδει σωστά ολόκληρο το λαμβανόμενο φάσμα των σκεδαζόμενων φωτονίων (σχήμα 8.2) θα πρέπει να ληφθούν υπόψη η αρχή της αβεβαιότητας και το φαινόμενο Doppler.**

Τότε θα δικαιολογηθούν ικανοποιητικά

- το υπόλοιπο ποσοστό των φωτονίων της κορυφής E_φ
- όλο το εύρος των ενεργειών τα οποία δεν καλύπτονται από τις σχέσεις (8.9) και (8.11)

Σημείωση:

Η απόσταση ανάμεσα στις δύο κορυφές που φαίνονται στα προηγούμενα διαγράμματα (8.2), (8.3) και (8.4) μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η γωνία σκέδασης θ . Σε γωνία $\theta=0$ οι δύο κορυφές συμπίπτουν.

Γ3) Από τη σχέση (8.11)

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (8.11)$$

φαίνεται ότι η μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda$ είναι ανεξάρτητη του (αρχικού) μήκους κύματος λ της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας.

Θεωρητικά λοιπόν για το πείραμα Compton μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όχι μόνο ο-ποιοδήποτε στόχο (σελ.139), αλλά και οποιαδήποτε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Όμως για να γίνει ευκρινές το φαινόμενο θα πρέπει η μεταβολή $\Delta\lambda$ να είναι μετρήσιμη με ασφάλεια και όχι να κινδυνεύει να «μπερδευτεί» με τα πειραματικά σφάλματα.

Συνεπώς

- Το $\Delta\lambda$ πρέπει να είναι μεγάλο. Για να το πετύχουμε αυτό (σχέση 8.11) πρέπει η μάζα ηρεμίας m του (ηλεκτρικά φορτισμένου) στόχου των φωτονίων να είναι μικρή. Άρα το ηλεκτρόνιο που διάλεξε ο Compton για το πείραμά του είναι μια πολύ καλή επιλογή. Έχει φορτίο, ώστε να γίνει «αντιληπτό» από τα φωτόνια και συγχρόνως έχει πολύ μικρή μάζα ηρεμίας.
- Αφού το $\Delta\lambda$ δεν εξαρτάται από το μήκος κύματος λ της χρησιμοποιούμενης ακτινοβολίας, το φαινόμενο θα γίνει ευκρινές αν το λ είναι μικρό, ώστε να μπορέσει το $\Delta\lambda$ να αναδειχθεί μπροστά του. Σημασία για την επιτυχία του πειράματος Compton δεν έχει η απόλυτη τιμή του $\Delta\lambda$, η οποία έτσι κι αλλιώς για ηλεκτρόνια και για συγκεκριμένη γωνία θ είναι σταθερή, αλλά η σχετική του τιμή $\Delta\lambda/\lambda$.

Άρα για το πείραμα Compton πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως κύριος στόχος ηλεκτρόνια και η προσπίπτουσα ακτινοβολία να έχει όσο το δυνατό μικρότερο μήκος κύματος, δηλαδή να έχει όσο το δυνατό πιο ενεργειακά φωτόνια. Οι ακτίνες Χ είναι μια πολύ καλή επιλογή, αλλά δεν πρέπει να φτάσουμε σε ενέργειες ακτίνων γ γιατί τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, η δίδυμος γένεση ως φαινόμενο θα αρχίσει να επικρατεί του Compton μέχρι που θα το «σκεπάσει» εντελώς.

Ας δούμε τώρα την τάξη μεγέθους της ενέργειας των φωτονίων για την οποία μιλάμε.

Στη σχέση

$$\frac{1}{E'_\varphi} - \frac{1}{E_\varphi} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta) \quad (8.9)$$

το 2ο μέλος έχει μέση τιμή $\frac{1}{mc^2}$.

1η περίπτωση:

$$\text{Αν } \frac{1}{E_\varphi} \gg \frac{1}{mc^2} \quad \text{δηλαδή αν } E_\varphi \ll mc^2 \approx 0,5\text{MeV} \quad \text{τότε}$$

$$\frac{1}{E'_{\varphi}} \approx \frac{1}{E_{\varphi}} \Rightarrow E'_{\varphi} \approx E_{\varphi}$$

Η περίπτωση αυτή θα μας δυσκολέψει πειραματικά γιατί η ενέργεια των σκεδαζόμενων φωτονίων θα είναι σχεδόν ίση με την ενέργεια των προσπιπτόντων και συνεπώς δεν θα είναι αρκετά ευκρινής η μεταβολή της ενέργειάς τους.

Με άλλα λόγια το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας θα είναι περίπου ίσο με εκείνο της προσπίπτουσας και συνεπώς το $\Delta\lambda$ δεν θα είναι πειραματικά ευκρινές.

2η περίπτωση:

$$\text{Αν } \frac{1}{E_{\varphi}} \ll \frac{1}{mc^2} \quad \text{δηλαδή αν } E_{\varphi} \gg mc^2 \approx 0,5\text{MeV} \quad \text{τότε}$$

$$\frac{1}{E'_{\varphi}} \approx \frac{1}{mc^2} \Rightarrow E'_{\varphi} \approx mc^2$$

Στην περίπτωση αυτή οι πειραματικές τιμές της E'_{φ} θα «μαζεύονται» συνέχεια γύρω από 0,5 MeV, ανεξάρτητα της θ , κάτι που πάλι θα μας δυσκολέψει να δούμε την εξάρτηση της μεταβολής της ενέργειας από τη γωνία σκέδασης θ

3η περίπτωση:

$$\text{Αν } \frac{1}{E_{\varphi}} \approx \frac{1}{mc^2} \quad \text{δηλαδή αν } E_{\varphi} \approx mc^2 \approx 0,5\text{MeV}$$

και με δεδομένο ότι η μέγιστη τιμή της διαφοράς των αντιστρόφων ενεργειών του πρώτου μέλους της (8.9) είναι $2 \frac{1}{mc^2}$, οι μετρήσεις του πειράματος θα γίνουν πιο ευδιάκριτες.

Άρα οι ενέργειες των φωτονίων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα είναι περίπου της τάξης των $10^5 - 10^6$ eV. Από το φάσμα ενεργειών του σχήματος 6.10 στη σελίδα 113 βλέπουμε ότι τέτοια φωτόνια είναι εκείνα των σκληρών ακτίνων Χ.

Δ. Παρατηρήσεις

α) Η απορρόφηση των ακτίνων Χ μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους:

- Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
- Φαινόμενο Compton
- Δίδυμος γένεσις.

Σε χαμηλές ενέργειες, ας πούμε λίγο πιο κάτω από τα 0,5MeV (*), κατά την απορρόφηση των ακτίνων Χ το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο επικρατεί του Compton, ενώ η δίδυμος γένεσις είναι ανύπαρκτη.

(*) Οι τιμές που αναφέρονται είναι ενδεικτικές. Προφανώς εξαρτώνται από το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί.

Από τα $0,5\text{MeV}$ και μέχρι πιο πάνω από τα $1,02\text{MeV}$ (*) το φαινόμενο Compton επικρατεί συντριπτικά του φωτοηλεκτρικού στην απορρόφηση των Χ. Η δίδυμος γένεσης ίσα που αρχίζει να εμφανίζεται. Σε ακόμη μεγαλύτερες ενέργειες φωτονίων (π.χ. μεγαλύτερες του 8MeV) η δίδυμος γένεσις γίνεται σχεδόν το αποκλειστικό φαινόμενο απορρόφησης των σκληρών πλέον ακτίνων Χ, που μπορούν ενεργειακά να θεωρηθούν και ακτίνες γ.

Όπως καταλαβαίνουμε υπάρχει ένα διάστημα ενεργειών φωτονίων Χ, κάπου της τάξης του $10^5 - 10^6 \text{ eV}$ που το φαινόμενο Compton θα γίνει αρκετά εμφανές. Αυτό έδειξαν και οι απλοί υπολογισμοί που κάναμε λίγο πιο πάνω.

β) Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι απορρόφηση φωτονίου, ενώ το φαινόμενο Compton είναι απορρόφηση και εκπομπή φωτονίου. Και τα δύο οδηγούν σε ιόντα και εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια. Η δίδυμος γένεσις δε δημιουργεί ιόντα, αλλά οδηγεί σε ζευγάρι ηλεκτρόνιο-ποζιτρόνιο (ύλη-αντιύλη).

Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι στο φαινόμενο Compton υπάρχει και η περίπτωση της αναπήδησης ολόκληρου του ιόντος ή του ατόμου κατά την οποία δεν δημιουργούνται ιόντα ή εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια και το φωτόνιο δε χάνει ουσιαστικά ενέργεια.

γ) Αν κοιτάξουμε επιδερμικά το φαινόμενο Compton πιθανώς να νομίσουμε ότι είναι μια απλή, ελαστική, κλασική, μη κεντρική κρούση ανάμεσα σε ένα φωτόνιο και σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Σαν δηλαδή μια σφαίρα του μπιλιάρδου να πέφτει πάνω σε μια άλλη ακίνητη σφαίρα και να εξοστρακίζονται και οι δυο.

Για να αποφύγουμε να δώσουμε αυτή τη λανθασμένη εντύπωση πρέπει

- Να δούμε στις εξισώσεις της σελίδας 141 όχι δυο απλές σφαίρες που συγκρούονται αλλά, όπως έχουμε ήδη επισημάνει, **μια ροή ενέργειας και ορμής ανάμεσα σε κβαντικά πλάσματα κατά την οποία τα δύο αυτά μεγέθη τελικά διατηρούνται**
- Να συνειδητοποιήσουμε ότι το φαινόμενο Compton είναι θεμελιωδώς κβαντικός και άρα ο μηχανισμός του είναι απόλυτα κβαντικός. Συνεπώς είναι αδύνατο να περιγραφεί ως μια απλή κλασική σύγκρουση δύο σφαιρών, όσο και να δείχνει έτσι στις εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

Το φωτόνιο δεν «χτυπά» το ηλεκτρόνιο σα μια μπίλια του μπιλιάρδου και εξοστρακίζεται. Υπάρχουν πολλοί πιθανοί μηχανισμοί με τους οποίους συμβαίνει το φαινόμενο Compton και που συν-υποστηρίζουν τη θεωρητική του ακρίβεια. Κανένας όμως δε μοιάζει με τίποτε κλασικό και με καμιά εικόνα όπου συγκρούονται δύο μπαλάκια.

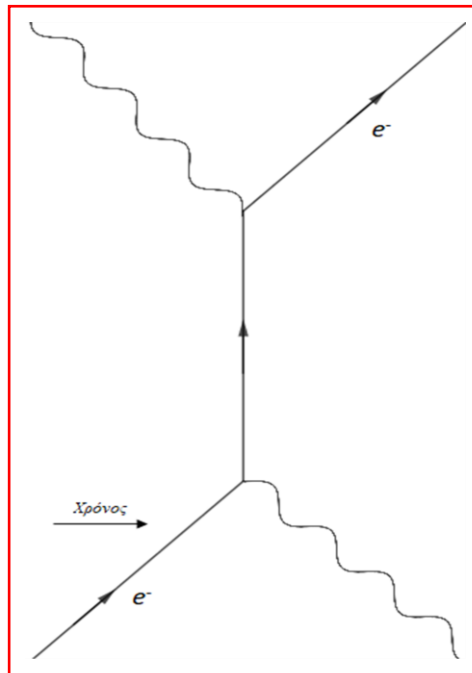
Σε έναν λοιπόν από τους μηχανισμούς του φαινομένου, τον πιο πιθανό (σχήμα 8.5), όταν το φωτόνιο πλησίασε στο «ακίνητο» ηλεκτρόνιο απορροφήθηκε και δημιουργήθηκε δυνάμει σωματίδιο, ένα σωματίδιο δηλαδή που δεν υπήρχε πριν, δεν είναι παρατηρήσιμο και που μπορεί να παραβιάζει νόμους στα πλαίσια της αρχής αβεβαιότητας.

Το σωματίδιο αυτό, που στο σχήμα 8.5 φαίνεται με μια συνεχή γραμμή ανάμεσα στους δύο κόμβους, «έζησε» για πάρα πολύ λίγο και, αφού «έκανε» **ταχύτατα ανακατανομή της αρχικής ενέργειας και ορμής**, χάθηκε αφήνοντας στη θέση του ένα φωτόνιο με ενέργεια μικρότερη εκείνης του αρχικού φωτονίου και ένα ηλεκτρόνιο με ενέργεια (ενώ το αρχικό ήταν «ακίνητο»).

(*) Το $1,02 \text{ MeV}$ είναι το άθροισμα των ενεργειών μαζών ηρεμίας ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου.

Και ενώ το τελικό (σκεδαζόμενο) φωτόνιο διακρίνεται από το αρχικό (προσπίπτον) φωτόνιο λόγω του ότι έχουν διαφορετικές ενέργειες (σελ. 73), το ηλεκτρόνιο δε διακρίνεται από το αρχικό («ακίνητο») γιατί δεν είναι χαρακτηριστικό του η ενέργεια. Όπως είπαμε τα ηλεκτρόνια είναι όμοια σωματίδια.

Τέτοιοι μηχανισμοί με τους οποίους πραγματοποιείται το φαινόμενο Compton είναι αδιανόητοι για την κλασική φυσική^(*)

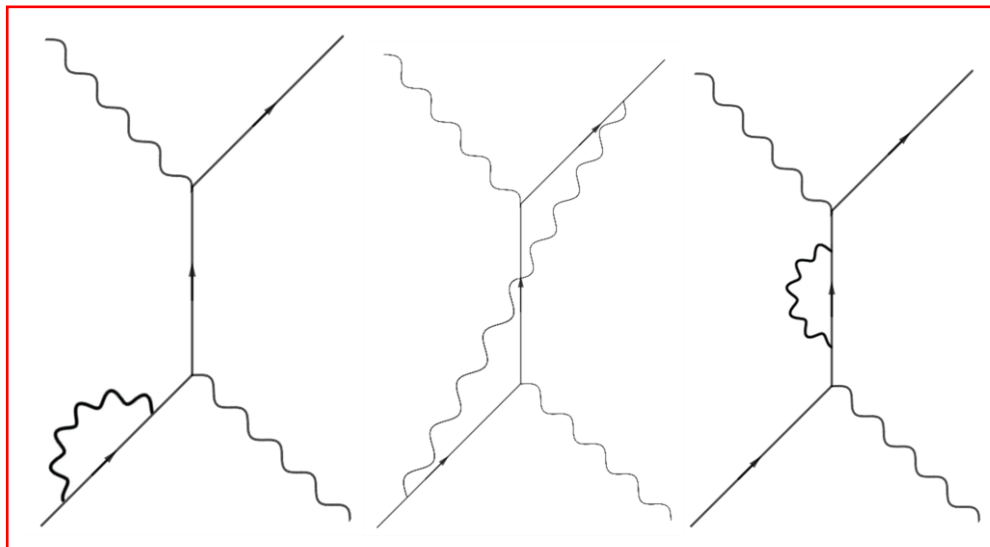


Σχήμα 8.5: Το φαινόμενο Compton δεν είναι μια ελαστική κρούση ανάμεσα σε μπαλάκια. Το δυνάμει σωματίδιο ανάμεσα στους δύο κόμβους είναι ένας από τους πιθανούς κβαντικούς μηχανισμούς του φαινομένου, χωρίς βέβαια κλασικό ανάλογο.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται και άλλοι λιγότερο πιθανοί μηχανισμοί, αλλά όχι αδύνατοι, με τους οποίους μπορεί να συμβαίνει το φαινόμενο Compton..

Τέτοια πράγματα δε συμβαίνουν στις κλασικές κρούσεις. **Το φαινόμενο Compton είναι θεμελιωδώς κβαντικό φαινόμενο και ως τέτοιο πρέπει να διδαχθεί. Και όχι ως μια ελαστική κλασική κρούση.**

^(*) Στο διάγραμμα του σχήματος 8.5, όπως και στα διαγράμματα των σχημάτων που ακολουθούν, ο άξονας ο «κάθετος» στον χρόνο δεν είναι άξονας χώρου. Δεν είναι τίποτε. Το διάγραμμα δείχνει ένα πιθανό μηχανισμό κατά την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου στο φαινόμενο Compton και όχι την χωροχρονική θέση των σωματιδίων. Το φως παριστάνεται με ημιτονοειδή γραμμή για την οποία δεν έχει σημασία να επισημανθεί η φορά στο χρόνο, γιατί το φωτόνιο είναι άχρονο.



Σχήμα 8.6: Τρεις λιγότερο πιθανοί μηχανισμοί που μπορούν να συμβαίνουν στο φαινόμενο Compton. Περιλαμβάνουν 4 κόμβους. Όλες οι γραμμές ανάμεσα σε κόμβους αντιστοιχούν σε δυνάμει σωματίδια (που εμφανίζονται και ξαναχάνονται γρήγορα), ενώ οι άλλες γραμμές αντιστοιχούν στα «πραγματικά» αρχικά και τελικά σωματίδια (φωτόνιο και ηλεκτρόνιο) τα οποία μπορούμε και μετράμε.

Υπάρχουν κάπου 16 τέτοιοι μηχανισμοί των 4 κόμβων. Γενικά υπάρχουν χιλιάδες μηχανισμοί για το φαινόμενο, άλλοι περισσότερο και άλλοι λιγότερο πιθανοί.

Τέτοια πράγματα δεν έχουν κλασικό ανάλογο. Το φαινόμενο Compton δεν είναι μια κλασική κρούση ανάμεσα σε δυο μπαλάκια, αλλά ένα κβαντικό πανηγύρι των αρχών αβεβαιότητας και των δυνάμει σωματιδίων, στο τέλος του οποίου η ορμή και η ενέργεια των πραγματικών σωματιδίων πρέπει να είναι ίσες με τις αρχικές.

Οι εξισώσεις της σελίδας 143 συνεπώς **δεν είναι σχέσεις ανάμεσα σε μπαλάκια. Είναι σχέσεις που δείχνουν τη ροή ορμής και ενέργειας και όχι το μηχανισμό του φαινομένου**

8.2 Doppler στο φαινόμενο Compton και προβληματισμοί με την κλασική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

A. Η περίεργη «ασυνέχεια» των συναρτήσεων

Σύμφωνα με την κλασική κυματική θεωρία, στο πείραμα Compton έπρεπε τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (διεγέρτης) να βάλουν όλα τα ηλεκτρόνια του στόχου σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα ίση με εκείνη του διεγέρτη. Κατόπιν τα ταλαντευόμενα ηλεκτρόνια έπρεπε, σαν κεραίες, να εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις με συχνότητα ίση με εκείνη της ταλάντωσής τους, δηλαδή ίση με εκείνη του διεγέρτη.

Τελικά έπρεπε ολόκληρη η σκεδαζόμενη ακτινοβολία, ανεξάρτητα της κατεύθυνσης παρατήρησης, να έχει την ίδια συχνότητα με εκείνη της προσπίπτουσας. Αλλά το πείραμα Compton έδειχνε άλλα πράγματα: μέρος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας είχε συχνότητα διαφορετική από εκείνη της προσπίπτουσας η οποία μάλιστα συχνότητα εξαρτιόταν από τη γωνία σκέδασης. Αυτό δε μπορούσε να εξηγηθεί από την (κλασική) θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Μια σκέψη:

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είτε θεωρηθεί ως φωτόνια είτε ως κύματα μπορεί να δώσει ορμή και ενέργεια σε ένα ηλεκτρόνιο. Και πράγματι στο πείραμα Compton, στο αρχικά «ακίνητο» ηλεκτρόνιο δίνεται ορμή και ενέργεια, προκειμένου να μπει σε κίνηση.

Αδιαφορώ προς στιγμή και για τα φωτόνια και για τα κύματα και για το μηχανισμό μέσω του οποίου δόθηκε ορμή και ενέργεια στο ηλεκτρόνιο και ξανακοιτώ τις εξισώσεις (8.5), (8.6) και (8.7) με άλλο τρόπο. Τις βλέπω ως μια **ροή ενέργειας και ορμής ανάμεσα στα μέρη ενός συστήματος** κατά την οποία τα δύο αυτά μεγέθη τελικά διατηρούνται.

Από τις προαναφερθείσες σχέσεις και με δεδομένη την (8.4) προκύπτει

$$(E_\varphi - E'_\varphi + mc^2)^2 = m^2c^4 + p'^2_\eta c^2$$

από όπου

$$(E_\varphi - E'_\varphi)^2 + 2mc^2(E_\varphi - E'_\varphi) - p'^2_\eta c^2 = 0 \quad (*)$$

Η μείωση $|ΔE_\varphi|$ στην ενέργεια της ακτινοβολίας λόγω αλληλεπίδρασης με το ηλεκτρόνιο, και άρα η ενέργεια που πήρε το ηλεκτρόνιο, είναι

$$|ΔE_\varphi| = |E'_\varphi - E_\varphi| = \sqrt{m^2c^4 + p'^2_\eta c^2} - mc^2 \quad (8.12)$$

όπου p'_η είναι η ορμή που πήρε το ηλεκτρόνιο.

Στη σχέση (8.12) έχουμε μια έκφραση της $|ΔE_\varphi|$ συναρτήσει του p'_η . Αν η έκφραση αυτή είναι συνεχής (αύξουσα) συνάρτηση του p'_η θα πρέπει

$$|ΔE_\varphi| \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad p'_\eta \rightarrow 0$$

Τροποποιούμε λοιπόν νοητικά το πείραμα Compton και πάμε να ελέγξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης (8.12). Για να ελέγξουμε πειραματικά τη (μαθηματική) συνέχεια, μειώνουμε την ένταση της συγκεκριμένης ακτινοβολίας που χρησιμοποιούμε με συνεχή τρόπο ώστε το ποσό ορμής p'_η που δίνει στα ηλεκτρόνια να μειώνεται με συνεχή τρόπο.

Στο όριο που η ένταση της ακτινοβολίας πλησιάζει στο μηδέν θα πρέπει το p'_η να τείνει στο μηδέν και άρα και η $|ΔE_\varphi|$ να τείνει στο μηδέν.

Όμως το πείραμα δεν συμφωνούσε με τις παραπάνω κλασικές κυματικές «εμπειρίες» των συνεχών μεταβολών και ορίων.

Έδειχνε πως ό,τι και να κάναμε

- 1) Η ορμή μεταφερόταν στα ηλεκτρόνια με ασυνεχή τρόπο και κατά τυχαία ποσά. Άρα το p'_η στη συνάρτηση (8.12) δε μπορούσε να πάρει τιμές από κάποιο συνεχές διάστημα (πεδίο) ορισμού και το κυριότερο δεν μπορούσε να τείνει στο μηδέν. Συνε-

(*) Ο δείκτης «φ» αναφέρεται στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και ο δείκτης «η» στο ηλεκτρόνιο. Μιλώ για ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, χωρίς να εστιάζω ούτε στα φωτόνια, ούτε στα κύματα και μένω απλά και μόνο στη μαθηματική επεξεργασία των εξισώσεων, αδιαφορώντας για ποιον μηχανισμό γράφτηκαν.

πώς και η ενέργεια $|ΔE_φ|$ που έδινε η ακτινοβολία στα ηλεκτρόνια δε μπορούσε να είναι συνεχής συνάρτηση του $p'_η$.

- 2) Η ορμή και η ενέργεια της ακτινοβολίας δε μεταφέρονταν σε **όλα** τα ηλεκτρόνια, όπως κανονικά θα έπρεπε, αλλά σε μερικά μόνο.

Ενώ λοιπόν η σχέση (8.12) έδειχνε ότι, και για τα μαθηματικά και για την κλασική φυσική των συνεχών μεταβολών, το $|ΔE_φ|$ μπορούσε να είναι συνεχής συνάρτηση του $p'_η$, το «τροποποιημένο» πείραμα Compton έδειχνε το αντίθετο:

Το πεδίο ορισμού της $|ΔE_φ|$, το διάστημα δηλαδή από το οποίο παίρνει τιμές το $p'_η$, δε μπορούσε να είναι συνεχές και το κυριότερο δε μπορούσε να περιλαμβάνει το μηδέν. Άρα το $|ΔE_φ|$ δε μπορούσε να έχει ένα συνεχές πεδίο τιμών, δε μπορούσε να είναι συνεχής συνάρτηση, ούτε να τείνει στο μηδέν.

Τελικά η συνάρτηση (8.12) δε μπορούσε να πιστοποιηθεί πειραματικά ότι είναι συνεχής. Προέκυπτε δηλαδή το ίδιο πρόβλημα που είχαμε να αντιμετωπίσουμε και στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: **η πειραματική ασυνέχεια των συναρτήσεων εξέφραζε τη φυσική ασυνέχεια στη ροή ενέργειας και ορμής από την ακτινοβολία στα ηλεκτρόνια.** (*)

Η ομοιότητα των προβλημάτων στα δύο φαινόμενα ήταν αναμενόμενη γιατί, όπως ξαναείπαμε, και τα δυο φαινόμενα προβλέπουν απορρόφηση ενέργειας από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, αλλά ενώ το φωτοηλεκτρικό σταματά στην απορρόφηση, το Compton συνεχίζει με επανεκπομπή.

Ερώτηση:

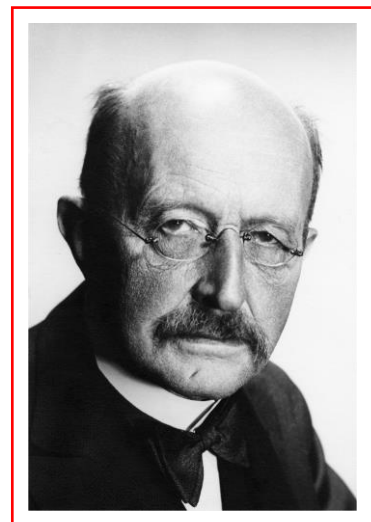
Όμως όταν η θεωρία μας αντιμετωπίζει την κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως κύμα που η έντασή του μπορεί να μειώνεται με συνεχή τρόπο, πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε πακέτα ενέργειας και να εξασφαλίσουμε ότι αυτά τα πακέτα δεν θα γίνουν ποτέ μηδέν;

Απάντηση

Ακολουθώντας έναν πολύ απλοϊκό (κι άρα χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις) τρόπο σκέψης μπορούμε να πούμε τα εξής:

Θα πάρουμε ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό το οποίο να μπορεί να διακρίνει τις ηλεκτρομαγνητικές ακτινοβολίες μεταξύ τους. Τέτοιο χαρακτηριστικό είναι π.χ. η συχνότητα ή το μήκος κύματος. Επιλέγουμε τη συχνότητα.

Για να φτιάξουμε λοιπόν για την κάθε ακτινοβολία πακέτα ενέργειας που δε θα μηδενίζονται, πολλαπλασιάζουμε τη συχνότητά της με κατάλληλη σταθερά $h \neq 0$ ώστε το γινόμενο hf να έχει μονάδες ενέργειας. Δημιουργούμε έτσι πακέτα ενέργειας (κβάντα) του τύπου hf . Η τιμή της σταθεράς h φροντίζουμε να ικανοποιεί τα πειραματικά δεδομένα. Τελικά μπορούμε να κβαντώσουμε την ενέργεια μιας ακτινοβολίας επιλέγοντας την συχνότητά της. Έτσι κβαντώνουμε συγχρόνως και τη δράση.



Max Karl Ernst Ludwig Planck

Σας ευχαριστούμε πάρα πολύ κύριε Μαχ Planck,

(*) Αν είχε πιστοποιηθεί πειραματικά η συνέχεια της συνάρτησης (8.12) θα ψάχναμε σίγουρα για «άγνωστο» μηχανισμό της (κλασικής) θεωρίας των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Κβαντομηχανική δεν θα υπήρχε.

B. Το διπλό φαινόμενο Doppler

Στη μέχρι εδώ ανάλυση του φαινομένου Compton θεωρήσαμε ότι το ηλεκτρόνιο ήταν αρχικά ακίνητο. Έτσι περιορίστηκε πολύ η ματιά μας. Για να δούμε πιο ανάγλυφα τα πράγματα ας εξετάσουμε ένα πιο γενικό, αλλά όχι πολύπλοκο παράδειγμα:

Ηλεκτρόνιο δέχεται μονοχρωματική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συγκεκριμένης κατεύθυνσης και υπό την επίδρασή της κινείται παράλληλα με την ακτινοβολία

Αντιμετώπιση της κατάστασης με κύματα (κλασική ηλεκτροδυναμική, CED)

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία όταν ένα ηλεκτρόνιο εκτίθεται σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συγκεκριμένης συχνότητας απορροφά ενέργεια από αυτή, την οποία όμως επανεκπέμπει με την ίδια συχνότητα προς όλες τις κατευθύνσεις.

Αφού η εκπομπή ακτινοβολίας γίνεται προς όλες τις κατευθύνσεις δεν επηρεάζει την ορμή που είχε το ηλεκτρόνιο αμέσως μετά την απορρόφηση. Το ηλεκτρόνιο λοιπόν δέχεται μια συνεχή δύναμη από την προσπίπτουσα ακτινοβολία προς την κατεύθυνση διάδοσής της, η οποία όμως δύναμη δεν ισοφαρίζεται κατά την εκπομπή, με αποτέλεσμα το ηλεκτρόνιο να επιταχύνεται συνεχώς.

Και εδώ είναι το κρίσιμο σημείο!

Το ηλεκτρόνιο εκπέμπει (σκεδάζει) ακτινοβολία με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα της προσπίπτουσας μόνο στο σύστημα αναφοράς στο οποίο είναι ακίνητο!

Αλλά οι συχνότητες της εκπεμπόμενης (σκεδαζόμενης) ακτινοβολίας καταγράφονται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και όχι του ηλεκτρονίου. Άρα η θεωρητική εξήγηση του σκεδαζόμενου φάσματος θα πρέπει να λάβει υπόψη διπλό φαινόμενο Doppler. Πρώτο γιατί το ηλεκτρόνιο δέχεται την ακτινοβολία κινούμενο και δεύτερο γιατί όταν την επανεκπέμπει κινείται ως προς το εργαστήριο.

Λόγω λοιπόν του διπλού φαινομένου Doppler, στο εργαστήριο εμφανίζεται μεταβολή στο μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, η οποία είναι συνάρτηση της γωνίας σκέδασης (καταγραφής) θ .

Έστω ότι κάποια στιγμή t το ηλεκτρόνιο κινείται με ορμή $P_{\eta\lambda}$ κατά την κατεύθυνση που δέχεται την ακτινοβολία απορροφώντας ορμή από αυτή. Η απορρόφησης ορμής, και άρα η αύξηση της ορμής του ηλεκτρονίου, γίνεται με συνεχή τρόπο.

Σύμφωνα με την κλασική κυματική θεωρία και λόγω φαινομένου Doppler

αποδεικνύεται

ότι η μεταβολή του μήκους κύματος της εκπεμπόμενης από το ηλεκτρόνιο ακτινοβολίας συναρτήσει της γωνίας σκέδασης θ δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{P_{\eta\lambda} \cdot c}{E_{\eta\lambda} - P_{\eta\lambda} \cdot c} (1 - \cos\theta) \quad (8.13)$$

όπου

λ	το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας
λ'	το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που καταγράφεται σε γωνία θ

$$P_{\eta\lambda} \quad \text{η ορμή του ηλεκτρονίου}$$

$$E_{\eta\lambda} = \sqrt{P_{\eta\lambda}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \text{η ενέργεια του ηλεκτρονίου}$$

Αντιμετώπιση της κατάστασης με φωτόνια

Το ηλεκτρόνιο δέχεται φωτόνια από την ακτινοβολία. Μόλις «συγκρουστεί» με το πρώτο φωτόνιο μπαίνει σε κίνηση και αποκτά ορμή, μετά δέχεται και άλλη «σύγκρουση» και αλλάζει σχεδόν ακαριαία την ορμή του, μετά δέχεται και τρίτη «σύγκρουση» και αυξάνει πάλι σχεδόν ακαριαία την ορμή του και πάει λέγοντας.

Τα ποσά ορμής που δέχεται το ηλεκτρόνιο από τα φωτόνια είναι ουσιαστικά τυχαία και άρα μεταβλητά από κρούση σε κρούση, αλλά καλύπτουν μια περιοχή (αβεβαιότητα) γύρω από μια μέση τιμή p . Στα παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι η αύξηση της ορμής του ηλεκτρονίου μετά από κάθε κρούση με φωτόνιο είναι **κατά μέσο όρο** σταθερή και ίση με p .

Έστω ότι κάποια στιγμή t το ηλεκτρόνιο κινείται με ορμή P κατά την κατεύθυνση που δέχεται την ακτινοβολία. Συγκρούεται με φωτόνιο και η ορμή του αυξάνεται κατά p . Η απορρόφηση ορμής από την ακτινοβολία, και άρα η αύξηση της ορμής του ηλεκτρονίου, δε γίνεται με συνεχή τρόπο.

Αποδεικνύεται ότι η μεταβολή του μήκους κύματος των φωτονίων της εκπεμπόμενης από το ηλεκτρόνιο ακτινοβολίας συναρτήσει της γωνίας καταγραφής θ δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{(P+p) \cdot c}{E - P \cdot c} (1 - \cos\theta) \quad (8.14)$$

όπου

λ	το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας
λ'	το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας που καταγράφεται σε γωνία θ
P	η ορμή του ηλεκτρονίου πριν τη «σύγκρουση» με το φωτόνιο
$P + p$	η ορμή του ηλεκτρονίου αμέσως μετά τη «σύγκρουση» με το φωτόνιο

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \text{η ενέργεια του ηλεκτρονίου πριν τη «σύγκρουση»}$$

Η ομοιότητα των σχέσεων (8.13) και (8.14) είναι κάτι περισσότερο από καταπληκτική! Κι αν μάλιστα πάρουμε $p \rightarrow 0$ οι δύο σχέσεις γίνονται ακριβώς ίδιες.

Οι δύο παραπάνω σχέσεις είναι φορμαλιστικά σχεδόν ίδιες, αλλά κρύβουν από πίσω τους εντελώς διαφορετικούς φυσικούς μηχανισμούς:

- 1) **Στη σχέση (8.13)** της κλασικής φυσικής, και στον αριθμητή και στον παρονομαστή υπάρχει η ίδια ορμή $P_{\eta\lambda}$ του ηλεκτρονίου τη χρονική στιγμή t που γίνεται και η απορρόφηση.
 Άρα στην (8.13) συνυπάρχουν κατά την ίδια χρονική στιγμή t η ορμή του ηλεκτρονίου πριν και μετά την απορρόφηση ορμής και είναι ίδιες γιατί η ροή ορμής από την ακτινοβολία στο ηλεκτρόνιο γίνεται με συνεχή τρόπο.
 Η ορμή $P_{\eta\lambda}$ λοιπόν του ηλεκτρονίου αυξάνεται με συνεχή τρόπο και άρα η συνάρτηση Δl στη σχέση (8.13) είναι συνεχής αύξουσα συνάρτηση του $P_{\eta\lambda}$.
- 2) **Στη σχέση (8.14)** της κβαντικής φυσικής, στον αριθμητή υπάρχει η ορμή $P + p$ του ηλεκτρονίου «αμέσως» μετά την απορρόφηση ορμής, ενώ στον παρονομαστή υπάρχει η ορμή P «αμέσως» πριν την απορρόφηση.
 Άρα στην (8.14) συνυπάρχουν κατά την ίδια χρονική στιγμή t η ορμή του ηλεκτρονίου πριν και μετά την απορρόφηση ορμής, αλλά δεν είναι ίδιες γιατί η ροή ορμής από την ακτινοβολία στο ηλεκτρόνιο γίνεται με ασυνεχή τρόπο, ακαριαία και με ποσά τα οποία κατά μέσο όρο είναι p . Η παρουσία του p στη σχέση (8.14) δε μπορεί να ελεγχθεί ούτε να μικρύνει όσο θέλουμε.
 Η ορμή P λοιπόν του ηλεκτρονίου αυξάνεται με ασυνεχή τρόπο και κατά μέσο όρο p μετά από κάθε κρούση. Άρα η συνάρτηση Δl στη σχέση (8.14) δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

Το πείραμα επιβεβαιώνει ότι έχουμε ακαριαίες και τυχαίες αυξήσεις της ορμής των ηλεκτρονίων και άρα η (8.14) δεν είναι συνεχής συνάρτηση της ορμής του ηλεκτρονίου. Άρα το πείραμα επιβεβαιώνει το μηχανισμό που κρύβεται πίσω από τη σχέση (8.14) και συνεπώς οδηγεί στην άνευ όρων επικράτηση των ασυνεχών φωτονίων έναντι των συνεχών κυμάτων. Το πεδίο ορισμού του Δl στην (8.14) δε μπορεί πειραματικά να γίνει συνεχές.

Η «πειραματική ασυνέχεια» των συναρτήσεων εκφράζει τη φυσική ασυνέχεια στη ροή ενέργειας και ορμής από την ακτινοβολία στα ηλεκτρόνια.

Στο σχήμα (8.7) η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στη συνεχή μεταβολή της ορμής $P(t)$ που επιβάλλουν τα κύματα και βάσει της οποίας λειτουργεί η σχέση (8.13), ενώ η κλιμακωτή παχιά γραμμή αντιστοιχεί στην ασυνεχή μεταβολή της ορμής των ηλεκτρονίων με την οποία λειτουργεί η (8.14).

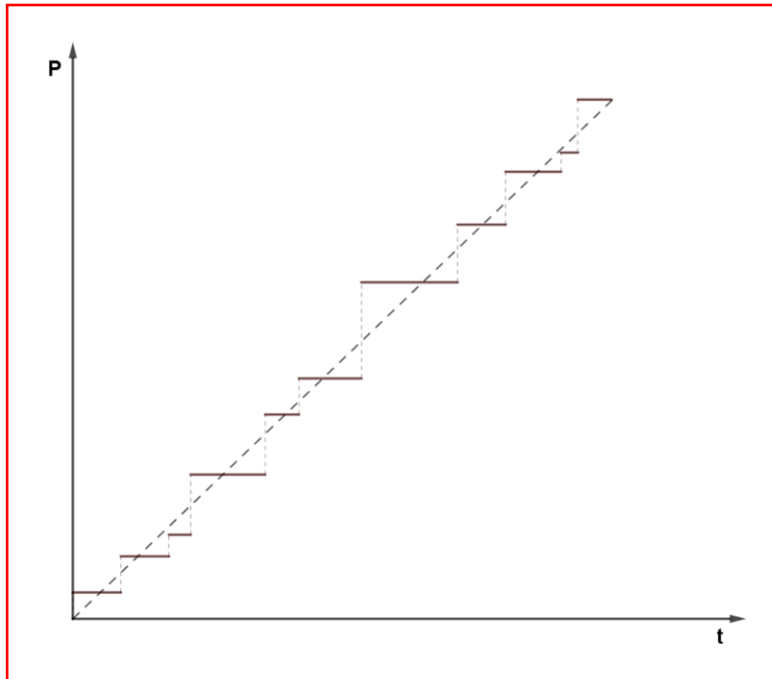
Προφανώς αν η σταθερά του Planck μπορούσε να τείνει στο μηδέν οι δύο γραφικές αποδόσεις θα μπορούσαν να γίνουν ίδιες, μιας και το ύψος από τα σκαλοπάτια είναι κατά μέσο όρο της τάξης της ορμής των φωτονίων $p=h/\lambda$

Αξίζει να σημειωθεί το εξής:

Αποδεικνύεται θεωρητικά και πειραματικά ότι αν για την «σκαλοπατιαστή» ορμή $P(t)$ ορίσουμε μια μέση τιμή $\langle P \rangle$ που θα αυξάνεται με συνεχή τρόπο συναρτήσει του χρόνου τότε $\langle P \rangle = P_{\eta\lambda}$ ή πιο γενικά $\langle \vec{P} \rangle = \vec{P}_{\eta\lambda}$

Αφού η κλασική τιμή $P_{\eta\lambda}$, ορισμένη με μια ανοχή p , είναι ίση κάθε στιγμή με την μέση τιμή $\langle P \rangle$ μπορούμε κατά κάποιο τρόπο να πούμε ότι οι δύο σχέσεις συμπίπτουν σε ικανοποιητικό βαθμό.

Τελικά, τη διαφορά ανάμεσα στις σχέσεις (8.13) και (8.14) τη δημιουργεί η σταθερά του Planck h .



Σχήμα 8.7: Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τον συνεχή τρόπο με τον οποίο το ηλεκτρόνιο θα έπρεπε να απορροφά ορμή από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, σύμφωνα με την κλασική κυματική θεωρία. Η «σκαλοπατιαστή» γραμμή δείχνει όμως την πραγματικότητα: Η απορρόφηση ορμής γίνεται με ασυνεχή τρόπο, ακαριαία και με ποσά που δε μηδενίζονται.

Παρόλο που το Σύμπαν είναι κβαντικό, ο τρόπος με τον οποίο πάρα πολλές φορές το προσεγγίζουμε κλασικά, είναι αξιοπρεπέστατος!

Η κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού μπορεί να μην έχει τη δυνατότητα να ερμηνεύσει φαινόμενα που αγγίζουν τις κλίμακες που θέτει το h , αλλά στα όρια της ισχύος της είναι μια πάρα πολύ καλή, ευφυέστατη και αξεπέραστη θεωρία ερμηνείας του Κόσμου μας

8.3 Η αρχή της αβεβαιότητας στο φαινόμενο Compton

Στο φαινόμενο Compton, είτε στημένο από ανθρώπους ως πείραμα είτε ως τυχαίο φυσικό συμβάν, μεταξύ των άλλων επιχειρείται και εντοπισμός της θέσης του ηλεκτρονίου με φωτόνια κάτι που προκαλεί άμεση εμπλοκή των αρχών αβεβαιότητας.

Ας δούμε λοιπόν με χαλαρότητα την τάξη κάποιων μεγεθών:

Έστω Δt το πολύ μικρό χρονικό διάστημα που διαρκεί η αλληλεπίδραση μεταξύ φωτονίου και ηλεκτρονίου

- Η αβεβαιότητα στην ορμή του ηλεκτρονίου κατά την αλληλεπίδραση είναι Δp_η και συνεπώς αβεβαιότητα στην ταχύτητά του $\frac{\Delta p_\eta}{m}$. Άρα η αβεβαιότητα στη θέση του ηλεκτρονίου είναι

$$\Delta x_\eta \approx \frac{\Delta p_\eta}{m} \Delta t \quad (8.15)$$

- Η αβεβαιότητα στη θέση του φωτονίου είναι

$$\Delta x_\varphi \approx c\Delta t \quad (8.16)$$

Οι αβεβαιότητες της θέσης στην οποία αλληλεπιδρούν τα δύο (κβαντικά) σωματίδια είναι ουσιαστικά ίσες

$$\Delta x_\eta \approx \Delta x_\varphi \quad (8.17)$$

από όπου

$$\frac{\Delta p_\eta}{m} \Delta t \approx c\Delta t$$

ή

$$\Delta p_\eta \approx mc \quad (8.18)$$

Όμως $\Delta x_\eta \cdot \Delta p_\eta \approx h$ και συνεπώς λόγω των (8.17) και (8.18)

$$\Delta x_\eta \approx \Delta x_\varphi \approx \frac{h}{mc} \quad (8.19)$$

Για το φωτόνιο ισχύει

$$\Delta x_\varphi \cdot \Delta p_\varphi \approx h$$

και λόγω της (8.19)

$$\Delta p_\varphi \approx mc \quad (8.20)$$

Όμως

$$E_\varphi = p_\varphi c \Rightarrow \Delta E_\varphi = \Delta p_\varphi \cdot c$$

και συνεπώς

$$\Delta E_\varphi \approx mc^2 \quad (8.21)$$

Από την (8.16) και (8.19) προκύπτει ότι ο χρόνος που διαρκεί η αλληλεπίδραση είναι

$$\Delta t \approx \frac{h}{mc^2}$$

Το φαινόμενο Compton ουσιαστικά αφορά στη ροή ορμής και ενέργειας από ένα φωτόνιο σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο σε μια πάρα πολύ μικρή χωροχρονική περιοχή. Με δεδομένο ότι η ροή αυτή τελικά πρέπει να ικανοποιεί τους νόμους διατήρησης των δύο αυτών μεγεθών, η σύμπτωση των αντίστοιχων αβεβαιοτήτων στις παραπάνω σχέσεις είναι αναμενόμενη. Έχει ενδιαφέρον να δούμε κάποιες αριθμητικές τιμές τάξης μεγέθους

Αβεβαιότητα θέσης ηλεκτρονίου και φωτονίου (αβεβαιότητα θέσης αλληλεπίδρασης)

$$\Delta x_\eta = \Delta x_\varphi \approx \frac{h}{mc} = \lambda_c \approx \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,42 \cdot 10^{-12} m$$

Αβεβαιότητα ορμής ηλεκτρονίου και φωτονίου

$$\Delta p_\eta = \Delta p_\varphi \approx mc = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2,733 \cdot 10^{-22} \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Αβεβαιότητα ενέργειας ηλεκτρονίου αλλά και φωτονίου

$$\Delta E_\eta = \Delta E_\varphi \approx mc^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Χρονική διάρκεια αλληλεπίδρασης

$$\Delta t \approx \frac{h}{mc^2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 8,06 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι ορμές και οι ενέργειες των φωτονίων που απαιτούνται προκειμένου να έχουμε καλές χωροχρονικές διακριτικές δυνατότητες της τάξης του 10^{-12} m και 10^{-21} s είναι αρκετά υψηλές. Απαιτούνται φωτόνια Χ ή γ.

Εκείνο όμως που έχει ξεχωριστό ενδιαφέρον είναι η σχέση (8.19) στην οποία εμπλέκεται το μήκος κύματος Compton ηλεκτρονίου

$$\Delta x_\eta \approx \Delta x_\varphi \approx \frac{h}{mc} = \lambda_c$$

Ο προσδιορισμός της θέσης ηλεκτρονίου όταν γίνεται με φωτόνιο απαιτεί αβεβαιότητα τάξης μεγέθους ίσης με το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου λ_c .

$$\Delta x_\eta \approx \Delta x_\varphi \approx \frac{h}{mc} = \lambda_c = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Να λοιπόν και μια φυσική σημασία του $\lambda_c = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$:

Οριοθετεί έναν χώρο μεγαλύτερο από τον πυρήνα και μικρότερο από το άτομο, όπου με (πραγματικά) φωτόνια μπορείς να αναζητήσεις τις πιο πιθανές θέσεις των ηλεκτρονίων είτε βρίσκονται σε άτομο είτε όχι.

8.4 Προβληματισμοί πάνω στη διδασκαλία του φαινομένου Compton

A. Το φαινόμενο Compton είναι κατ' εξοχήν κβαντικό

Ακολουθώντας τα συνηθισμένα της βιβλιογραφίας, η ενεργειακή σχέση (8.9)

$$\frac{1}{E'_\varphi} - \frac{1}{E_\varphi} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos\theta) \quad (8.9)$$

και η αντίστοιχη της κυματική μετάφραση (8.11)

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (8.11)$$

αποδείχθηκαν αφήνοντας μια αίσθηση από σχέσεις κλασικής ελαστικής μη κεντρικής κρούσης μεταξύ δυο σφαιρών. Κάποιοι μάλιστα ενισχύουν ακόμη περισσότερο τον παραλληλισμό με τις σφαίρες και δικαιολογούν τη μη μεταβολή της ενέργειας των φωτονίων κατά τη «σύγκρουση» με άτομα ή ιόντα (σελ. 143) εξομοιώνοντας το φωτόνιο με μια σφαίρα μικρής μάζας που πέφτει πάνω σε μια άλλη σφαίρα πολύ μεγάλης μάζας. Έτσι βγάζουν συμπεράσματα ανάλογα με εκείνα της κρούσης δύο σφαιρών εκ των οποίων η μία έχει πολύ μεγάλη μάζα (τοιχος).

Και κάπου εδώ, με έναν τρόπο παρουσίασης γεμάτο κλασικές εικόνες σύγκρουσης σφαιρών, στις οποίες ανακατεύθηκαν και κάτι ουρανοκατέβατοι τύποι σχετικότητας και «διπλής φύσης φωτός», σταματά συνήθως η διδασκαλία του φαινομένου Compton.

Αν όμως μείνουμε εδώ και δεν αναφερθούμε στις αρχές αβεβαιότητας, στο ρόλο και στη λειτουργία του φωτονίου και στους επιμέρους κβαντικούς μηχανισμούς με τους οποίους λαμβάνει χώρα το φαινόμενο Compton, χάνεται εντελώς η θεμελιώδης κβαντική του ουσία.

Ας αναλύσουμε:

1) Η κύρια, η ουσιαστική σχέση που ερμηνεύει το φαινόμενο είναι η (8.9). Για να προχωρήσουμε προς την κυματική της μετάφραση (8.11) το μόνο που κάναμε ήταν και να εκφράσουμε την ορμή και την ενέργεια των φωτονίων της (8.9) συναρτήσει των μηκών κύματος λ και λ' . Κάναμε δηλαδή κάτι που κι αν δε το κάναμε δε θα μειώναμε σε τίποτε τη μεγάλη αξία της σχέσης (8.9) και βέβαια δε θα άλλαζε σε τίποτε την ερμηνεία του φαινομένου Compton.

Η εισαγωγή λοιπόν του μήκους κύματος στην ενέργεια των φωτονίων

- δε αποδεικνύει την διπλή φύση του φωτός (όσο κι αν το επικαλεστούμε), αλλά την αδυναμία της κλασικής κυματικής θεωρίας να δικαιολογήσει τη μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.
- εκφράζει απλώς την αντιστοιχία της κβαντικής πραγματικότητας των φωτονίων (QED), που μπορεί και ερμηνεύει το φαινόμενο, με τα κύματα (μεγάλες εντάσεις) της κλασικής ηλεκτροδυναμικής (CED) που δε μπορεί να το ερμηνεύσει. Αντιστοιχία έχουμε και όχι διπλές φύσεις (βλέπε υποενότητα 5.3, σελ. 66)

2) Θεωρήσαμε

- Το ηλεκτρόνιο (κάτι σαν ακίνητη σφαίρα) ακίνητο, σε μια συγκεκριμένη θέση. Άρα θεωρήσαμε ένα ηλεκτρόνιο που είχε ταυτόχρονα μηδενική αβεβαιότητα ορμής και μηδενική αβεβαιότητα θέσης
- Ένα φωτόνιο (κάτι σαν κινούμενη σφαίρα) με συγκεκριμένη ορμή, συγκεκριμένη ενέργεια και καλά ορισμένη τροχιά να «πέφτει» σε συγκεκριμένη θέση και να συγκρούεται με το ηλεκτρόνιο. Άρα θεωρήσαμε ότι και για το φωτόνιο κάποιες αβεβαιότητες είναι μηδενικές και ότι το φωτόνιο έχει συγκεκριμένη τροχιά.

Όμως αυτά τα πράγματα, και ειδικά όταν πρόκειται για υποατομικά σωματίδια, είναι αδιανόητα. Εκεί κάτω η έννοια της τροχιάς σωματιδίου (ηλεκτρονίου, φωτονίου κλπ) δεν υφίσταται και τα «δρώμενα» τα ελέγχουν οι αρχές αβεβαιότητας.

Άρα όλες αυτές οι ευθείες-τροχιές στο σχήμα (8.1) που σχηματίζουν ευδιάκριτες γωνίες και που ξεκινούν ή καταλήγουν σε συγκεκριμένο μαθηματικό σημείο δημιουργούν αρκετές παρανοήσεις που δεν πρέπει να τις ξεχνάμε.

Το ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να είναι ακίνητο και να περιμένει να το χτυπήσει το φωτόνιο. Ούτε το φωτόνιο, ακολουθώντας συγκεκριμένη τροχιά, βρίσκει και χτυπά το ακίνητο ηλεκτρόνιο και το βάζει σε κίνηση, ενώ το ίδιο εκτροχιάζεται προς άλλη κατεύθυνση. Δεν είναι κβαντικός μηχανισμός αυτός. Ένα φωτόνιο ποτέ δεν εκτροχιάζεται. Ένα φωτόνιο απορροφάται και ξαναεκπέμπεται. Αυτά τα αναλύσαμε στις σελίδες 148 έως 152.

3) Οι σχέσεις αβεβαιότητας λένε ότι άμα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε φωτόνια για να «δούμε» κάτι πολύ σύντομα και πολύ εστιασμένα πρέπει να έχουν μεγάλο εύρος ενεργειών και ορμών. Τα φωτόνια λοιπόν που χρησιμοποιούνται στο φαινόμενο Compton δεν έχουν μια απόλυτα ορισμένη ενέργεια και δεν πέφτουν πάνω σε έναν στόχο-ηλεκτρόνιο που βρίσκεται εντελώς ακίνητο σε μια απόλυτα ορισμένη θέση. Υπάρχουν αβεβαιότητες. Τα ηλεκτρόνια σε ένα άτομο ούτε συγκεκριμένη θέση έχουν ούτε συγκεκριμένη ορμή. Στο φαινόμενο Compton εκείνο που συμβαίνει είναι μια πρωτόγνωρη ροή ορμής και ενέργειας και απόλυτα κβαντική ανακατανομή της ενέργειας και της ορμής των φωτονίων και ηλεκτρονίων που εμπλέκονται.

Αν δεν έχουμε συνεχώς υπόψη μας τα παραπάνω με τις αβεβαιότητες και τα δυνάμει σωματίδια κι αν δεν βρούμε τρόπο να τα περάσουμε στα παιδιά δε νομίζω ότι μπορούμε να κάνουμε κβαντομηχανική. Το μόνο που θα καταφέρουμε είναι ένα απόλυτα κβαντικό φαινόμενο να το καταντήσουμε μια γνωστή απλή άσκηση κρούσης που, για αδιευκρίνιστους λόγους, χρησιμοποιεί κάποιους παράξενους τύπους με μήκη κύματος και ... σχετικότητα.

Β. Το διδακτικό «κατεστημένο»

1) Παραδοσιακά η διδασκαλία του φαινομένου Compton συνδέεται με την αλλαγή του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Επομένως το διδάσκουμε με μήκη κύματος και συχνότητες φωτονίων, δηλαδή με μεγέθη τα οποία

- δε διαθέτουν νόμους διατήρησης
- δεν τα μετράμε και δεν τα μετράνε τα όργανά μας άμεσα
- δε μπορούν να ερμηνεύσουν το φαινόμενο

Ενώ έπρεπε να το διδάσκουμε με ενέργειες και ορμές φωτονίων, δηλαδή με μεγέθη τα οποία

- διαθέτουν νόμους διατήρησης τους οποίους χρησιμοποιούμε
- μετράμε (άμεσα ή έμμεσα) στο πείραμα και χρησιμοποιούμε στη διδασκαλία του
- μπορούν να ερμηνεύσουν το φαινόμενο

2) Λόγω του σχολικού βιβλίου και της απειλής των πανελληνίων εξετάσεων υπερτονίζεται η διπλή φύση του φωτός και κατ' επέκταση όλων των σωματιδίων (ηλεκτρονίων, μακροσκοπικών σωμάτων κλπ). Έμμεσα λοιπόν διδάσκουμε τα ξεπερασμένα υλικά κύματα του de Broglie και τους κυματοσωματιδιακούς του δυϊσμούς.

3) Μιλάμε αντιφατικά στα παιδιά. Ενώ δηλαδή τονίζουμε την ερμηνευτική αποτυχία της κλασικής κυματικής θεωρίας και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, στο τέλος και αφού έχει ερμηνευτεί το φαινόμενο εμπλέκουμε κυματικές έννοιες (μήκος κύματος) για να το συνδέσουμε κατά κάποιο τρόπο με τα κύματα που δε μπορούσαν να το ερμηνεύσουν.

Γ. Μερικές πιθανές απορίες παιδιού

- 1) Αφού το φως (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) αντιμετωπίζεται ως φωτόνια (σωματίδια) και οι απαιτούμενες εξισώσεις καταστρώθηκαν με βάση τη διατήρησης ορμής και ενέργειας φωτονίων και ηλεκτρονίων, γιατί ανακατεύτηκαν κυματικές έννοιες (μήκος κύματος και συχνότητα) για τις οποίες είχαμε δηλώσει ότι είναι ανίκανες να «διαχειριστούν» το φαινόμενο; Πρόσφεραν κάτι στην ερμηνεία του φαινομένου που χωρίς αυτές δε θα μπορούσε να προχωρήσει η ερμηνεία του;
- 2) Το φως είναι κύμα και διαδίδεται ως κύμα, αλλά μόλις καταλάβει την παρουσία του ηλεκτρονίου αλλάζει ακαριαία φύση και γίνεται σωματίδιο για να συγκρουστεί μαζί του σα μπαλάκι; Και μόλις τελειώσει η «σύγκρουση», αλλάζει ξανά φύση και γίνεται κύμα για να διαδοθεί και να φτάσει στους μετρητές μας οι οποίοι θα μετρήσουν το μήκος κύματός του;
Το φως διαδίδεται ως κύμα, αλλά αλληλεπιδρά ως σωματίδιο; Πώς καταλαβαίνει τι πρόκειται να γίνει και αμέσως αλλάζει φύση;
Το μήκος κύματος του φωτονίου είναι η έκτασή του; Και όταν έφτασε στο ηλεκτρόνιο έγινε σωματίδιο ίδιας έκτασης;
Τελικά όταν λέμε διπλή φύση φωτός και γενικότερα σωματιδίων εννοούμε αυτές τις ακαριαίες και εντελώς ακραίες κλασικές μεταμφιέσεις;
- 3) Αφού και το ηλεκτρόνιο έχει διπλή φύση πώς κατάλαβε ποια φύση να διαλέξει; Περίμενε ακίνητο ($p=0$) ως κύμα και άρα με άπειρο μήκος κύματος $\lambda=h/p$, αλλά μόλις «είδε» το φωτόνιο κατάλαβε ότι θα αλληλεπιδράσει μαζί του μάζεψε και έγινε σωματίδιο, ακυρώνοντας την κυματική του φύση;
Ποιο είναι το αρχικό μήκος κύματος του ηλεκτρονίου ώστε να γράψουμε και για τα ηλεκτρόνια μια σχέση με μήκη κύματος, αντίστοιχη της (8.11) και να κάνουμε διάγραμμα με κατανομές μηκών κύματος ηλεκτρονίων, αντίστοιχο εκείνου του (8.3);
- 4) Αφού όλα έχουν διπλή φύση, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη λογική που χρησιμοποιήσαμε στο φαινόμενο Compton και να δουλέψουμε με μήκη κύματος σε όλα τα προβλήματα κρούσης; Σε μη κεντρικές ελαστικές κρούσεις σωμάτων μπορούμε να πάρουμε έτοιμο τον τύπο Compton και να κάνουμε υπολογισμούς με μήκη κύματος και μετά να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους de Broglie και να βρούμε ταχύτητες και ενέργειες σφαιρών και σωμάτων;
Αφού όλα τα σώματα (μικρά μεγάλα) έχουν μήκος κύματος γιατί να μην το κάνουμε; Θα γίνει όμως δεκτό στις πανελλήνιες;
- 5) Πόσο πιο «αιφνίδιος» είναι ο ενεργειακός τύπος $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ της σχετικότητας, σε σχέση με τους τύπους $p = \frac{h}{\lambda}$ και $E = hf$, οι οποίοι όχι μόνο χρησιμοποιήθηκαν δια μαγείας στην κρούση (!) Compton, αλλά έπρεπε να δεχτούμε ότι εκφράζουν και διπλές φύσεις ύλης;
- 6) Πόσο νόημα έχει να λέμε ότι ένα φωτόνιο έχει συχνότητα π.χ. 10^{19} Hz και ότι «μέσα» του γίνονται 10^{19} ταλαντώσεις μαγνητικών και ηλεκτρικών πεδίων σε ένα δευτερόλεπτο; Πόση έκταση πιάνουν αυτές οι ταλαντώσεις (διαταραχές), ώστε να δούμε πόσο μήκος έχει το κυματοπακέτο αυτό του φωτός;

κλπ

Δ. Λίγοι πιθανοί προβληματισμοί Διδάσκοντος

- 1) Ο τρόπος με τον οποίο μας αναγκάζει το σχολικό βιβλίο να διδάξουμε το φαινόμενο Compton δίνει στα παιδιά έστω και στο ελάχιστο «γεύση» από κβαντομηχανική; Η κβαντομηχανική βρίσκεται στο να μιλάμε στα παιδιά για διπλή φύση των σωμάτων και να υπερτονίζουμε τέτοια μεταφυσικά αδιέξοδα; Στις σχέσεις $p=h/\lambda$ και $E=hf$ πρέπει να εξαντλήσουμε τη κβαντομηχανική του φαινομένου Compton;
- 2) Ως γνωστόν οι σχέσεις $p=h/\lambda$ και $E=hf$ όταν εφαρμόζονται στα φωτόνια αναδεικνύουν την αντιστοιχία μεταξύ δύο πετυχημένων θεωριών, της QED και της CED, εκ των οποίων η πρώτη καλύπτει τα πάντα για το φως, ενώ η δεύτερη είναι η κλασική προσέγγιση της πρώτης. Εμείς όμως διδάσκουμε τις παραπάνω σχέσεις ως σχέσεις διπλής φύσης φωτός. Γιατί πρέπει να συντηρούμε τον κυματοσωματιδιακό δυϊσμό που ιστορικά είναι ξεπερασμένος και συλλογιστικά αδιέξοδος;
Είναι δυνατό να επιμένουμε ακόμη και σήμερα ότι δυο κλασικές συμπεριφορές μπορούν να περιγράψουν μία κβαντική;
- 3) Οι σχέσεις $p=h/\lambda$ και το $E=hf$ φαίνονται ουρανοκατέβατες και εννοιολογικά πιο δύσκολες από εκείνον τον επίσης ουρανοκατέβατο τύπο της σχετικιστικής ενέργειας του ηλεκτρονίου που χρησιμοποιεί το σχολικό βιβλίο. Με αυτή την παρουσίαση και ιστορική καταπόνηση παιδιών και καθηγητών, την οποία το σχολικό βιβλίο ονομάζει «Στοιχεία Κβαντομηχανικής», υπάρχει περίπτωση να πιστέψει το παιδί ότι χειριζόμαστε κάτι ανατρεπτικό της κλασικής φυσικής και ότι το παίρνουμε από το χέρι για να το πάμε σε μια καινούρια λογική ανθρώπων και στη λάμψη του πολιτισμού μας;
- 5) Αφού τελικά θα διδάξουμε και την κβαντομηχανική χωρίς ουσία και χωρίς βάθος, ως απλό κεφάλαιο φυσικής, μήπως γρήγορα όλα καταλήξουν σε μια ξέφρενη ασκησιολογία όπως έγινε και γίνεται μέχρι τώρα; Μήπως ετοιμαζόμαστε να «κάψουμε» μπροστά στα παιδιά το χαρτί που λέγεται «Σύγχρονη Φυσική»;

.....

Ε. Πρόταση

Κατά τη γνώμη μου, η διδασκαλία του φαινομένου Compton

- 1) Πρέπει να αναδεικνύει την βαθιά κβαντομηχανική διάσταση του φαινομένου, μέσω των κβαντικών μηχανισμών του και όχι να εμμένει στην ξεπερασμένη αντίληψη περί διπλής φύσης του φωτός και στις αναχρονιστικές θεωρίες περί υλικών κυμάτων στις οποίες μας εξαναγκάζει το σχολικό βιβλίο.
- 2) Δεν πρέπει να δίνει την αίσθηση ότι έχουμε μια απλή κλασική ελαστική μη κεντρική κρούση σφαιρών κατά την επεξεργασία της οποίας χρησιμοποιήθηκαν δυο τρεις ουρανοκατέβατοι παράξενοι τύποι με κυματικά χαρακτηριστικά για την ενέργεια και την ορμή.
Πρέπει να δίνει την αίσθηση και την αιτιολογία ότι εκείνο που παρακολουθούμε είναι μια πρωτόγνωρη ροή ενέργειας και ορμής μέσω του φορέα της μιας από τις 4 θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της Φύσης.

Την ροή αυτή την ελέγχουν οι αρχές αβεβαιότητας και οι νόμοι διατήρησης. Οι νόμοι διατήρησης είναι ισχυρά «εργαλεία» στις εκάστοτε θεωρίες μας γιατί συνδέονται με τις συμμετρίες της Φύσης. Ισχύουν ακόμη και όταν οι κλασικοί μας νόμοι έχουν καταρρεύσει. Φαίνονται να παραβιάζονται στα χωροχρονικά όρια που θέτουν οι αρχές αβεβαιότητας, αλλά τελικά ισχύουν και ελέγχουν ό,τι βλέπουμε γύρω μας και μετράμε.

4) Στη σκέδαση των φωτονίων δεν υπάρχουν επιφάνειες που έρχονται σε επαφή ούτε συγκεκριμένες τροχιές ούτε συγκεκριμένες θέσεις σωματιδίων, αλλά εξαφανίσεις και επανεμφανίσεις κβαντικών πλασμάτων, χρονικές και άχρονες, που γίνονται με χιλιάδες περιέργους μηχανισμούς, πιθανούς και απίθανους (σχήματα 8.5 και 8.6)

Πρέπει να αναδείξουμε το γεγονός ότι οι μηχανισμοί με τους οποίους λαμβάνει χώρα το φαινόμενο Compton δεν είναι κλασικοί και ότι είναι αδύνατο να αποδοθούν κλασικά ή με σχήματα. Πρέπει να πούμε για τα φευγαλέα πλάσματα που πετάγονται ξαφνικά και που πάλι ξαφνικά χάνονται. Άλλα που ζουν στο χρόνο τρέχοντας προς το μέλλον ή προς το παρελθόν και άλλα που είναι άχρονα, όπως τα φωτόνια.

Να αναδείξουμε ότι τα κβαντικά φαινόμενα συμβαίνουν μέσα από χιλιάδες πιθανούς και απίθανους μηχανισμούς. Υπάρχουν ανεξέλεγκτες πιθανότητες στη Φύση.

5) Πρέπει να βρούμε τρόπους να γεμίσουμε το παιδί με κβαντομηχανική και όχι με μεταφυσικούς δυϊσμούς και ουρανοκατέβατες σχέσεις για να φτιάχνουμε προβλήματα πανελ-ληνίων. Οι σχέσεις $p = \frac{h}{\lambda}$ και $E = hf$ δεν είναι διπλή φύση αλλά αντιστοιχία της πραγματικότητας της μονάδας (φωτόνιο) με τη συμπεριφορά του πλήθους (κύματα).

Για μια ακόμη φορά ας διευκρινίσουμε δυο πράγματα:

- **Η χρήση της φράσης «μήκος κύματος» για το φωτόνιο** δεν είναι ούτε κακή ούτε λανθασμένη αν γίνεται με την έννοια της αντιστοιχίας μεταξύ CED και QED, όπως τη θέσαμε στα σχόλια 5.1, 5.2 και 5.3, και εφόσον έχουμε ενημερώσει τα παιδιά γι' αυτή την αντιστοιχία. Σαφώς και είναι σωστές οι σχέσεις (5.4) της σελίδας 67. Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε στα παιδιά ότι το φως **δεν είναι** συγχρόνως κύματα και σωματίδια, ότι **δεν υπάρχουν** διπλές φύσεις πλασμάτων και ότι **δεν υπάρχουν** κυματοσωματιδιακοί δυϊσμοί στη μία και ενιαία Φύση. Το φως για τις σημερινές μας τουλάχιστον γνώσεις είναι φωτόνια και μόνο φωτόνια και έχει μία και μόνο μία φύση, μία και μόνο μία συμπεριφορά.
- **Η χρήση της φράσης «μήκος κύματος» για το ηλεκτρόνιο**, το πρωτόνιο και τα υπόλοιπα σωματίδια ύλης είναι απορριπτέα με κάθε τρόπο. Τα εν λόγω σωματίδια δεν έχουν μήκη κύματος και συχνότητες, δεν είναι υλικά κύματα. Οι αρχές αβεβαιότητας ελέγχουν και προβλέπουν μια χαρά τη συμπεριφορά τους, όπως δείξαμε με τόσες εφαρμογές στην ενότητα 6, και αυτό μας καλύπτει σε πάρα πολλά.

Να υπενθυμίσω ως παράδειγμα την περίθλαση των ηλεκτρονίων που είδαμε στην εφαρμογή 6.6 και χρησιμοποιήσαμε σε τόσες άλλες. Τα φαινόμενα περίθλασης σωματιδίων δεν είναι αποτέλεσμα καμιάς κυματικής συμπεριφοράς τους, κανενός μήκους κύματος που δήθεν διαθέτουν και που πρέπει να συγκριθεί με το πλάτος της σχισμής, δεν είναι αποτέλεσμα καμιάς συχνότητας.

Τα φαινόμενα περίθλασης των σωματιδίων δεν είναι εκδήλωση κάποιας διπλής φύσης που δήθεν διαθέτουν, αλλά της δράσης των αρχών αβεβαιότητας σε όλα τα κβαντικά πλάσματα του υποατομικού κόσμου.

Δεν υπάρχουν πειράματα όπου το ηλεκτρόνιο «γουστάρει» να είναι σωματίδιο, ενώ σε άλλα πειράματα θέλει να είναι κύμα. Το ηλεκτρόνιο είναι ηλεκτρόνιο. Πλάσμα κβαντικό μιας κβαντικής φύσης, ενταγμένο σε μια ενιαία Φύση.

Όλα μπορούμε να τα διδάξουμε και να τα δούμε χωρίς τα αναχρονιστικά μήκη κύματος της θεωρίας των υλικών κυμάτων, αλλά με τις αρχές αβεβαιότητας της (σύγχρονης) κβαντομηχανικής.

Κοντολογίς

Το φαινόμενο Compton δεν είναι μια κλασική, μη κεντρική, ελαστική κρούση με δύο μπαλάκια. Είναι θεμελιωδώς κβαντικό φαινόμενο στο οποίο συμμετέχουν «πλάσματα» αδιανόητα για την κλασική φυσική και τη συνηθισμένη λογική μας. Οντότητες που εμφανίζονται, ζουν, απορροφώνται, ξαναεμφανίζονται ή και εξαφανίζονται για πάντα ελέγχοντας την έκβαση του φαινομένου και διασφαλίζοντας τους νόμους διατήρησης.

Αυτό πρέπει να το περάσουμε στα παιδιά, ο καθένας με τον τρόπο του, με τις ιδιαίτερες ικανότητές του ως Δάσκαλος, με την εφευρετικότητά του, με την λάμψη στα μάτια του και με το μεράκι του να δώσει στα παιδιά τη Φυσική ως τον κορυφαίο πολιτισμό της εποχής τους και όχι ως ξέφρενη και θλιβερή ασκησιολογία.

Επίλογος

Εκεί «κάτω», στις μικρές κλίμακες του χώρου και του χρόνου, τα πλάσματα έχουν ως ταυτότητά τους τη συμπεριφορά. Η αλληλεπίδραση είναι ο μοναδικός τρόπος για να υπάρξουν και το Γίγνεσθαι καθίσταται η ουσία των πραγμάτων.

Αρχές Αβεβαιότητας μετουσιώνουν το κενό του Δημόκριτου, κάνοντάς το ικανό να δημιουργεί από το «πουθενά» οντότητες, πρόσκαιρες και βιαστικές σαν τους αφρούς μιας παράξενης θάλασσας. Φευγαλέες υπάρξεις χωρίς συγκεκριμένη μορφή, χωρίς να μοιάζουν με τίποτε από όσα ξέρουμε ή θα δούμε ποτέ, ζουν μόνο μέσα από τις απροσδιοριστίες και τις αλληλεπιδράσεις, κάνοντας πιθανό ή απίθανο, αυτό που παλιά ήταν αδύνατο.

Η παρουσία τους ορίζεται πιθανοκρατικά και ο χρόνος της ζωής τους, ελάχιστος έως αιώνιος, γίνεται συν-υφάδι του πόσο «παρανόμησαν» απέναντι στους πανίσχυρους νόμους διατήρησης της Φύσης. Ο τρόπος αδιαφορίας τους για τις συμμετρίες του Κόσμου ορίζει την ποσότητα της άμμου στην κλεψύδρα του χρόνου ζωής τους.

Εκεί «κάτω», κοντά στις δομές του Κόσμου, σε ένα «τοπίο» ασύλληπτης ταραχής και εντονότατης δραστηριότητας, οι Αρχές της Αβεβαιότητας εναλλάσσουν ξέφρενα τη Δημιουργία με την Καταστροφή για να μας δώσουν εδώ πάνω μορφές όμορφες, γαλήνιες, συνηθισμένες, γνώριμες. Το ατέλειωτο χάος των δομών φτάνει κοντά μας ως μουσική που γεμίζει την ψυχή μας και ως αμέτρητα χρώματα χιλιάδων ουράνιων τόξων που γεμίζουν τη ματιά μας. Και όλα τα καθημερινά φαινόμενα που «έπρεπε» να συμβούν, συμβαίνουν.

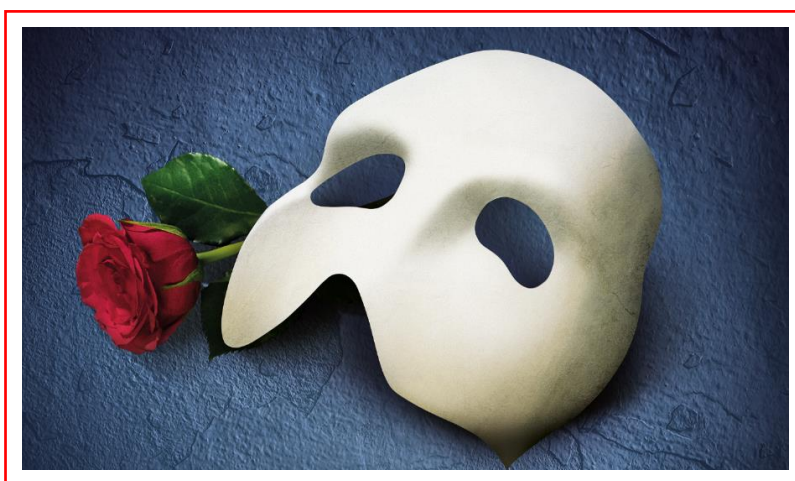
Τα «νιώθουμε» αυτά τα κβαντικά πλάσματα, εκεί κάτω στις δομές του Κόσμου μας. Το αποδεικνύουν τα πειράματά μας. «Φαντάσματα της Όπερας» παίζουν με τη ροή του χρόνου και στους «κυματισμούς του χώρου δίνουν εδώ πάνω το όμορφο με τις απλές αιτιότητες της ιστορίας μας και τις πανίσχυρες συμμετρίες της Φύσης.

Ζούμε σε μια Φύση σχέσεων και αλληλεπιδράσεων όπου Το Είναι είναι το Γίγνεσθαι...

Μια ευχή

Να γραφούν καινούρια πανεπιστημιακά βιβλία κβαντομηχανικής προπτυχιακού επιπέδου με καθαρά κβαντομηχανική ορολογία και με σύγχρονη σκέψη. Απαλλαγμένα εντελώς από υλικά κύματα, κυματοσωματιδιακούς δυϊσμούς και μεταφυσικές διπλές φύσεις, πρέπει να δώσουν έμφαση σε ισχυρότατες έννοιες του Κόσμου μας, όπως είναι η ορμή, η ενέργεια, η πιθανότητα, η στροφορμή, η δράση, η αβεβαιότητα, ο χώρος, ο χρόνος, οι συμμετρίες, οι βαθιές συμμετρίες της Φύσης...

Και σχολικά βιβλία καινούρια πρέπει να γραφούν, που θα φέρουν την Κβαντική Φυσική και τη Σχετικότητα κοντά σε **όλα** τα παιδιά με τρόπο απλό, συναρπαστικό κι όμορφο. Ως τον κορυφαίο πολιτισμό της εποχής μας.



Υ.Γ.

Αν δεν τα θέλουμε όλα αυτά κοντά μας, τώρα στα μέσα του φθινοπώρου, ας πετάξουμε το βιβλιαράκι αυτό σε κάποιο «συρτάρι» κι ας φανταστούμε όπως θέλουμε εμείς τις δομές του Κόσμου, ακούγοντας μια θαυμάσια μουσική.

<https://www.youtube.com/watch?v=-JaeBxYCI9k>

Να θυμόμαστε όμως πρέπει ότι

... τα πλάσματα εκεί κάτω, που μας ορίζουν και ορίζουν τον Κόσμο μας, δεν μοιάζουν καθόλου και με τίποτε δικό μας εδώ πάνω

... οι Φυσικοί είναι έτοιμοι να αλλάξουν για τέταρτη φορά τη λογική τους και τη λογική των ανθρώπων προκειμένου να πάμε έστω και μια «σπιθαμή» πιο κοντά στη λειτουργία της Φύσης. Τη Κβαντική Βαρύτητα προσμένουν να τους πιάσει το χέρι για καινούριες πορείες γνώσης εκεί κοντά στα θεμέλια του Κόσμου, όπου οι δυνατότητες επιλογής αναμετρώνται με την ανάγκη της μιας και μοναδικής κίνησης Δημιουργίας.

Φθινόπωρο 2022

Θρασύβουλος Μαχαίρας
Φυσικός

