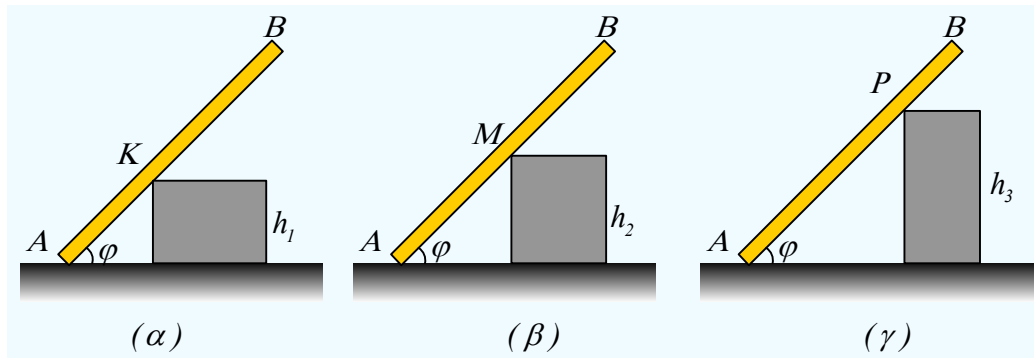


Η ισορροπία ή μη, μιας ράβδου

Μια ομογενής ράβδος AB, μήκους L, αφήνεται σε ισορροπία σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σχηματίζοντας με το επίπεδο γωνία φ , όπου $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$, ενώ στηρίζεται σε ένα βαρύ κιβώτιο ύψους h, το οποίο είναι προσκολλημένο στο επίπεδο.



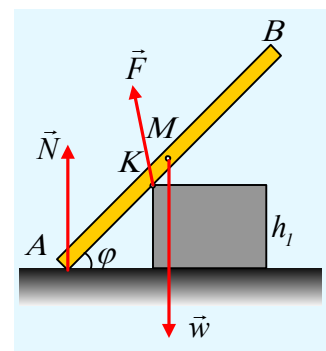
- i) Αν το ύψος του κιβωτίου είναι $h_1=0,2L$, όπως στο σχήμα (α), να αποδείξετε ότι η ράβδος δεν θα ισορροπήσει.
- ii) Αν το ύψος του κιβωτίου είναι $h_2=0,3L$, όπως στο σχήμα (β), να δείξετε ότι μπορεί να υπάρξει ισορροπία, αρκεί να αναπτυχθεί τριβή στο σημείο στήριξης M. Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και κιβωτίου είναι ίσος $\mu_s=\mu=0,6$ θα εξασφαλιστεί η ισορροπία;
- iii) Αν στο σχήμα (γ) $h_3=0,5L$ να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-κιβωτίου, ώστε η ράβδος να ισορροπεί.

Απάντηση:

- i) Από το ημίτονο της γωνίας φ , παίρνουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h_1}{(AK)} \rightarrow (AK) = \frac{h_1}{\eta\mu\varphi} = \frac{0,2L}{0,6} = \frac{1}{3}L$$

Κατά συνέπεια το σημείο στήριξης K είναι μεταξύ του A και του μέσου M της ράβδου, όπως στο διπλανό σχήμα. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί βάρος και κάθετη αντίδραση από το λείο επίπεδο, δυνάμεις κατακόρυφες και μια άγνωστη δύναμη F από κιβώτιο στη ράβδο, στο σημείο K (και αυτή κατακόρυφη θα πρέπει να είναι για την ισορροπία, αλλά αυτή τη στιγμή δεν μας απασχολεί...) Αν πάρουμε τις ροπές των παραπάνω δυνάμεων, ως προς το σημείο στήριξης K (θετικές οι αριστερόστροφες), θα έχουμε:



$$\Sigma\tau = \tau_N + \tau_F + \tau_w = -Nx_l + 0 - wx_2 = -(Nx_l + wx_2) < 0$$

Βλέπουμε ότι η συνολική ροπή δεν είναι μηδενική, συνεπώς η ράβδος δεν ισορροπεί. Αξίζει να τονισθεί ότι η συνθήκη ισορροπίας, μιλάει για $\Sigma\tau=0$, ως προς οποιοδήποτε σημείο!

- ii) Αν στο (β) σχήμα το σημείο στήριξης απέχει κατά x από το A θα έχουμε:

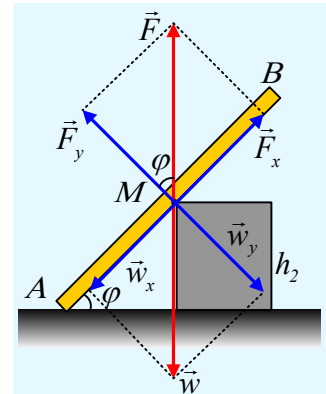
$$\eta\mu\varphi = \frac{h_2}{x} \rightarrow x = \frac{h_2}{\eta\mu\varphi} = \frac{0,3L}{0,6} = \frac{1}{2}L$$

Δηλαδή το σημείο στήριξης είναι τώρα το μέσον M της ράβδου. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να έχουμε ισορροπία, αν δεν ασκείται δύναμη στήριξης από το επίπεδο ($N=0$) και αναπτυσσόταν τριβή μεταξύ ράβδου και κιβωτίου, οπότε η δύναμη F, να ήταν κατακόρυφη, οπότε $\Sigma F=0$ και $F=w=mg$.

Έστω λοιπόν ότι η ράβδος ισορροπεί. Αναλύοντας τις δυνάμεις όπως στο σχήμα, θα πρέπει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y = w_y = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \text{ και}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_x = w_x = mg \cdot \eta\mu\varphi$$



Η συνιστώσα F_y αντιστοιχεί στην κάθετη αντίδραση του κιβωτίου, ενώ η F_x στη δύναμη τριβής που ασκείται στη ράβδο. Η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να ασκηθεί στη ράβδο, η οριακή τριβή, έχει μέτρο:

$$T_{op} = \mu_s \cdot F_y = \mu_s \cdot mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6 \cdot mg \cdot 0,8 = 0,48mg$$

Ενώ η συνιστώσα F_x η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία, πρέπει να έχει μέτρο:

$$F_x = w_x = mg \cdot \eta\mu\varphi = 0,6mg > T_{op}$$

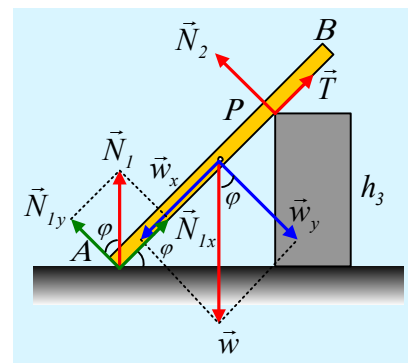
Βλέπουμε δηλαδή ότι στατική τριβή είναι μικρότερη από την συνιστώσα του βάρους w_x με αποτέλεσμα η ράβδος να μην ισορροπεί, με τον συντελεστή τριβής που μας δόθηκε.

- iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στη ράβδο, έχοντας αναλύσει το βάρος και την κάθετη αντίδραση του επιπέδου σε άξονες παράλληλο και κάθετο στη ράβδο. Από την συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - N_l \eta\mu\varphi - T = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_2 + N_l \sigma\upsilon\nu\varphi - mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \tau = 0 \rightarrow \Sigma \tau_p = 0 \rightarrow mg \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_2 - N_l \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot d_1 = 0 \quad (3)$$



Αλλά παίρνοντας ξανά το ημίτονο της γωνίας φ , βρίσκουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h_3}{(AP)} \rightarrow (AP) = \frac{h_3}{\eta\mu\varphi} = \frac{0,5L}{0,6} = \frac{5}{6}L$$

Συνεπώς $d_1 = (AP) = \frac{5}{6}L$ και $d_2 = d_1 - \frac{1}{2}L = \frac{1}{3}L$ οπότε από την (3) βρίσκουμε:

$$mg \cdot d_2 - N_l \cdot d_1 = 0 \rightarrow mg \cdot \frac{L}{3} = N_l \cdot \frac{5L}{6} \rightarrow N_l = 0,4mg$$

Με αντικαταστάσεις τώρα στις (1) και (2) παίρνουμε:

$$mg \cdot \eta\mu\varphi - N_l \eta\mu\varphi - T = 0 \rightarrow T = mg \cdot \eta\mu\varphi - 0,4mg \cdot \eta\mu\varphi = 0,6mg \cdot \eta\mu\varphi = 0,36 \cdot mg$$

$$N_2 = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - N_1 \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,48mg$$

Για να ισορροπεί η ράβδος, θα πρέπει η παραπάνω τριβή να είναι στατική, δηλαδή μικρότερη ή ίση της οριακής, οπότε:

$$T \leq T_{op} \rightarrow T \leq \mu_s N_2 \rightarrow \mu_s \geq \frac{T}{N_2} \rightarrow \mu_s \geq \frac{0,36mg}{0,48mg} \rightarrow$$

$$\mu_s \geq 0,9$$

Άρα ο μικρότερος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και εμποδίου, για την παραπάνω ισορροπία, είναι $\mu_{s,min} = 0,9$.

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα του μήκους και του βάρους της ράβδου. Αρκεί να είναι σταθερή η κλίση της ως προς το λείο οριζόντιο επίπεδο, με μεταβλητή, το ύψος του κιβωτίου-στηρίγματος.

dmargaris@gmail.com