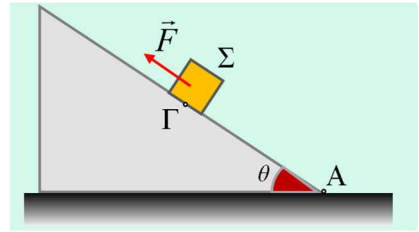


Δυναμική-Μηχανική ενέργεια και έργα

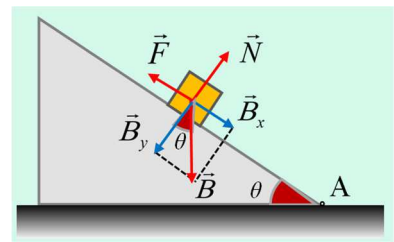
Στο σχήμα βλέπετε ένα σώμα Σ, μάζας $m=0,2\text{kg}$ και αμελητέων διαστάσεων, να ηρεμεί στο σημείο Γ ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου, με την επίδραση δύναμης μέτρου F , παράλληλης προς το επίπεδο, απέχοντας απόσταση $(ΑΓ)=5\text{m}$, από την βάση του επιπέδου. Δίνεται για την γωνία θ , που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο με την οριζόντια διεύθυνση, $\eta\mu\theta=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=0,8$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$. Θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος όταν βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α είναι μηδενική.



- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F .
- ii) Να βρεθεί η μηχανική ενέργεια του σώματος στην θέση Γ.
- iii) Κάποια στιγμή μεταβάλλουμε το μέτρο της δύναμης F , με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίσει να ανέρχεται κατά μήκος του επιπέδου με μεταβλητή επιτάχυνση, οπότε μετά από λίγο περνά από το σημείο Δ, όπου $(ΓΔ)=4\text{m}$, έχοντας ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$.
 - α) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια του σώματος στη θέση Δ.
 - β) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στο σώμα Σ, μέσω του έργου της δύναμης F , κατά την παραπάνω μετακίνηση;
 - γ) Να συγκριθούν:
 - γ₁) Το έργο του βάρους κατά την μετακίνηση του σώματος από το Γ στο Δ, με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος.
 - γ₂) Το έργο της δύναμης F με την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του σώματος, κατά την παραπάνω μετακίνηση.

Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, ενώ το βάρος έχει αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη και μια κάθετη στο επίπεδο. Για τις δυο συνιστώσες, λαμβάνοντας υπόψη ότι η γωνία μεταξύ του βάρους και της κάθετης συνιστώσας του B_y είναι ίση με την γωνία θ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), έχουμε:



$$\eta\mu\theta = \frac{B_x}{B} \rightarrow B_x = mg \cdot \eta\mu\theta = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,6 \text{ N} = 1,2 \text{ N}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{B_y}{B} \rightarrow B_y = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{ N} = 1,6 \text{ N}$$

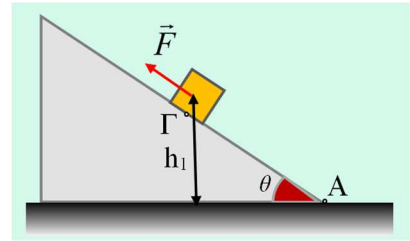
Από την ισορροπία του σώματος στην διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - B_x = 0 \rightarrow F = B_x = 1,2 \text{ N}$$

- ii) Το σώμα ηρεμεί στη θέση Γ, συνεπώς δεν έχει κινητική ενέργεια. Βρίσκεται όμως σε ύψος h_1 από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α, άρα έχει δυναμική ενέργεια:

$$\eta\mu\theta = \frac{h_1}{(AG)} \rightarrow h_1 = (AG) \cdot \eta\mu\theta = 5 \cdot 0,6\text{m} = 3\text{m}$$

$$E_1 = U_{\Gamma} = mgh_1 = mg \cdot h_1 = 0,2 \cdot 10 \cdot 3\text{J} = 6\text{J}$$



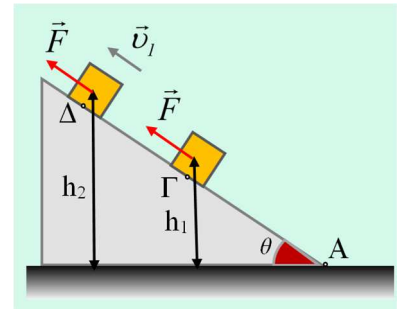
- iii) Το σώμα φτάνοντας στην θέση Σ, σε ύψος h_2 από το οριζόντιο επίπεδο όπου δεχτήκαμε ότι $U=0$, θα έχει και κινητική και δυναμική ενέργεια:

- α) Για το ύψος h_2 έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{h_2}{(A\Delta)} \rightarrow h_2 = (AG + \Gamma\Delta) \cdot \eta\mu\theta = (5 + 4) \cdot 0,6\text{m} = 5,4\text{m}$$

Οπότε στη θέση Γ, το σώμα έχει μηχανική ενέργεια:

$$E_2 = K_{\Delta} + U_{\Delta} = \frac{1}{2}mv_l^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}0,2 \cdot 2^2\text{J} + 0,2 \cdot 10 \cdot 5,4\text{J} = 11,2\text{J}$$



- β) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα, για μετατόπιση κατά $x=4\text{m}$, είναι ίση με το έργο της δύναμης F. Εφαρμόζουμε για το σώμα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, οπότε παίρνουμε (οι δυνάμεις όπως στο πρώτο σχήμα) :

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_x} + W_{B_y} + W_N + W_F \quad (1)$$

Όμως $W_{B_y} = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - 0 = -B_x \cdot x + 0 + 0 + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}0,2 \cdot 2^2\text{J} + 1,2 \cdot 4\text{J} = 5,2\text{J}$$

- γ1) Κατά την παραπάνω μετατόπιση του σώματος, το έργο του βάρους, ίσο με το έργο της συνιστώσας B_x , (υπολογίστηκε παραπάνω):

$$W_B = -B_x \cdot x = -1,2 \cdot 4\text{J} = -4,8\text{J}$$

Ενώ η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, είναι ίση:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgh_2 - mgh_1 = 0,2 \cdot 10 \cdot (5,4 - 3)\text{J} = 4,8\text{J}$$

Βλέπουμε ότι το έργο του βάρους είναι αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας:

$$W_B = -\Delta U$$

- γ2) Για την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 11,2\text{J} - 6\text{J} = 5,2\text{J}$$

Με βάση το αποτέλεσμα για το έργο της δύναμης, στο ερώτημα β), βλέπουμε ότι ισχύει:

$$W_F = \Delta E = 5,2J$$

Σχόλιο:

Τι σημαίνει η τελευταία ισότητα; Με απλά λόγια, το σώμα στη θέση 1 μπορεί να έχει κάποια κινητική και κάποια δυναμική ενέργεια. Αν πάνω του ασκείται μια εξωτερική δύναμη (όχι το βάρος που σαν συντηρητική δύναμη συνδέεται με μεταβολές δυναμικής ενέργειας), τότε όση ενέργεια μεταφέρεται στο σώμα, μέχρι να φτάσει στην θέση 2, αυτή η ενέργεια εμφανίζεται σαν αύξηση της μηχανικής ενέργειας.

Ας το δούμε γενικότερα με βάση της εξίσωση (1), το Θ.Μ.Κ.Ε., μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων:

$$\begin{aligned} K_2 - K_1 &= W_B + W_N + W_F \rightarrow K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1) + 0 + W_F \rightarrow \\ W_F &= K_2 - K_1 + U_2 - U_1 = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) \rightarrow \\ W_F &= E_2 - E_1 \end{aligned}$$

dmargaris@gmail.com