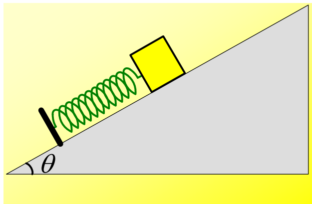
Το ελατήριο, το κεκλιμένο επίπεδο και η τριβή.



Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί, όπως στο σχήμα, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k=200N/m και φυσικού μήκους ℓ_0=0,4m, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ, όπου ημθ=0,6 και συνθ=0,8. Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει μήκος ℓ_1=34cm. Δίνονται οι συντελεστές τριβής, μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου $\mu=\mu_s$=0,5 και g=10m/s^2.

i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και να υπολογίστε τα μέτρα της δύναμης του ελατηρίου και της τριβής.

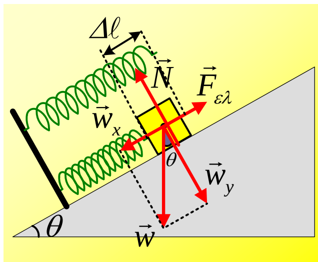
ii) Να υπολογίστε επίσης την τριβή που ασκείται στο σώμα και στις περιπτώσεις που μετακινήσουμε το σώμα, με αποτέλεσμα το μήκος του ελατηρίου να γίνει

α) ℓ_1=30cm, β) ℓ_2= 40cm, γ) ℓ_3= 50cm.

και το αφήσουμε ελεύθερο. Αν το σώμα κινηθεί, να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει, σε κάθε περίπτωση.

iii) Μεταξύ ποιων τιμών μπορεί να κυμανθεί το μήκος του ελατηρίου, έτσι ώστε αν αφήσουμε το σώμα ελεύθερο, να ισορροπήσει;

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, πλην της τριβής, η οποία δεν ξέρουμε προς τα πού κατευθύνεται. Αν $w_x > F_{ελ}$, τότε το σώμα τείνει να κατέβει και η τριβή θα είναι παράλληλη στο επίπεδο με φορά προς τα πάνω. Αν αντίθετα $w_x < F_{ελ}$, τότε το σώμα τείνει να ανέβει κατά μήκος του επιπέδου και η τριβή θα έχει φορά προς τα κάτω. Με ανάλυση του βάρους σε δύο συνιστώσες βρίσκουμε:

$$w_x = mg \cdot \eta\mu\vartheta = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}6N = 12N$$

$$w_y = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}8N = 16N$$

Αλλά στην διεύθυνση την κάθετη προς το επίπεδο (άξονας y), το σώμα ισορροπεί συνεπώς:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w_y=16N \text{ και}$$

$$T_{o\rho}=T_{o\lambda}=\mu \cdot N=0{,}5 \cdot 16N=8N.$$

Εξάλλου η δύναμη του ελατηρίου, έχει φορά προς τη θέση φυσικού μήκους (και αφού το ελατήριο έχει συσπειρωθεί, η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω) και σύμφωνα με το νόμο του Hooke, για το μέτρο της έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda}=k \cdot \Delta\ell=200 \cdot 0{,}06N=12N$$

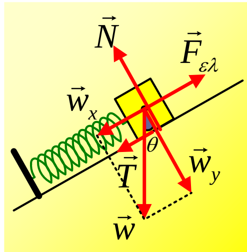
Αλλά τότε $\Sigma F_{w/F\varepsilon\lambda}=F_{\varepsilon\lambda}-w_x=0$.

Και το σώμα εξαιτίας αυτών των δύο δυνάμεων δεν τείνει να κινηθεί (ισορροπεί) με αποτέλεσμα να μην αναπτύσσεται δύναμη τριβής, δηλαδή Τ=0.

ii) Στην περίπτωση τώρα της μετακίνησης του σώματος σε άλλη θέση, θα έχουμε:

α) Αν $\ell = 30cm \rightarrow |\Delta\ell| = 0{,}1m$ και $F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell=200\cdot 0{,}1N=20N$,

οπότε $F_{\varepsilon\lambda}-w_x=20N-12N=8N$, με φορά προς τα πάνω, οπότε και η τριβή θα αποκτήσει τη μέγιστη δυνατή τιμή της (οριακή τριβή) μέτρου 8Ν, με φορά όπως στο σχήμα.

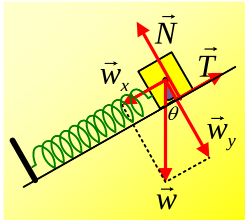


(α)

β) Αν $\ell = 40cm \rightarrow |\Delta\ell| = 0$ και $F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell=0$, οπότε δεν ασκείται δύναμη από το ελατήριο και το σώμα τείνει να κινηθεί προς τα κάτω εξαιτίας της w_x, οπότε θα ασκηθεί τριβή, όπως στο δεύτερο σχήμα.

Αλλά αφού $w_x > T_{o\rho}=8N$, το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω, αποκτώντας αρχική επιτάχυνση:

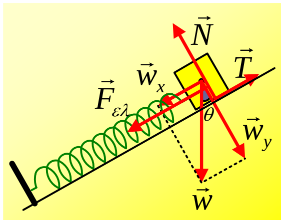
$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha \rightarrow \ a=\frac{w_x-T}{m}=\frac{12N-8N}{2kg}=2m/s^2 .$$



(β)

γ) Αν $\ell = 50cm \rightarrow |\Delta\ell| = 0{,}1m$ και $F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot|\Delta\ell|=20N$, με φορά προς τα κάτω, όπως στο σχήμα. Τότε όμως το σώμα θα επιταχυνθεί ξανά προς τα κάτω, αποκτώντας αρχική επιτάχυνση:

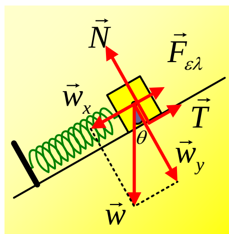
$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha \rightarrow \ a=\frac{w_x+F_{\varepsilon\lambda}-T}{m}=\frac{12N+20-8N}{2kg}=12m/s^2 .$$



(γ)

iii) Με βάση την προηγούμενη ερώτηση βλέπουμε ότι όταν το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί, τότε το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω (ακόμη και όταν έχει το φυσικό μήκος του). Συνεπώς θα μπορούσε να ισορροπήσει, με το ελατήριο συσπειρωμένο, όταν η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά αντίθετη της συνιστώσας w_x.

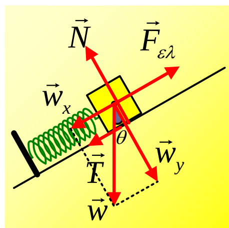
Αλλά τότε αναλόγως της συσπείρωσης, θα μπορούσε το σώμα να επιταχυνθεί προς τα κάτω ή προς τα πάνω.



Έστω για συσπείρωση x_1, έχουμε την κατάσταση του πρώτου σχήματος, όπου για να επιταχυνθεί το σώμα προς τα κάτω, θα πρέπει:

$$w_x-F_{\varepsilon\lambda}-T_{o\rho}\geq 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}\leq w_x-T_{o\rho} \rightarrow k\cdot x_1 \leq w_x-T_{o\rho} \rightarrow$$

$$x_1 \leq \frac{w_x-T_{o\rho}}{k} \rightarrow x_1 \leq \frac{12N-8N}{200N/m} \ \text{ή} \ x_1 \leq 0{,}02m$$



Αλλά x_1 είναι η συσπείρωση του ελατηρίου ή

$$x_1=|\Delta\ell|=\ell_0-\ell_1 \rightarrow \ell_1=\ell_0-x_1=38cm$$

Συνεπώς αν το μήκος του ελατηρίου είναι μεγαλύτερο από 38cm το σώμα θα κινηθεί.

Αν τώρα έχουμε μια μεγαλύτερη συσπείρωση, έστω x_2, για την οποία η δύναμη του ελατηρίου γίνεται μεγαλύτερη της συνιστώσας w_x, το σώμα μπορεί να επιταχυνθεί προς τα πάνω και αυτό θα συμβεί αν:

$$F_{ελ} - w_x - T_{ορ} \geq 0 \rightarrow F_{ελ} \geq w_x + T_{ορ} \rightarrow k \cdot x_2 \geq w_x + T_{ορ} \rightarrow$$

$$x_2 \geq \frac{w_x + T_{ορ}}{k} \rightarrow x_2 \geq \frac{12N + 8N}{200N/m} \text{ ή } x_2 \geq 0{,}1m$$

Αλλά x_2 είναι ξανά η συσπείρωση του ελατηρίου ή $x_2 = |\Delta \ell| = \ell_0 - \ell_2 \rightarrow \ell_2 = \ell_0 - x_2 = 30cm$

Συμπέρασμα, αν το μήκος του ελατηρίου ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$30cm \leq \ell \leq 38cm$$

Τότε σε οποιαδήποτε θέση και αν αφεθεί το σώμα, θα ισορροπήσει.

dmargaris@sch.gr