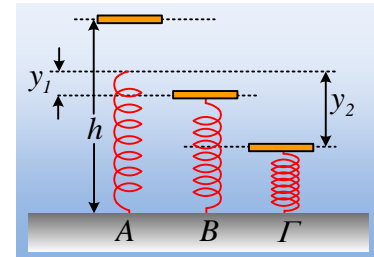


Η μηχανική ενέργεια και με ελατήριο. Φ.Ε.

Μια πλάκα μάζας 2kg βρίσκεται σε ύψος $h=1,2\text{m}$ από το έδαφος πάνω ακριβώς από το ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η δυναμική ενέργεια ενός σώματος στο έδαφος είναι μηδενική.



- i) Τι ενέργεια έχει το σώμα στην θέση αυτή (θέση Α); Υπολογίστε την.

Στην αρχική θέση η πλάκα έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = mgh = 2 \cdot 10 \cdot 1,2 \text{J} = 24 \text{J}.$$

- ii) Αφήνουμε την πλάκα να πέσει ελεύθερα. Τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο έχει μηχανική ενέργεια 24J. Αν στη θέση αυτή έχει ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$, να υπολογιστούν:

α) Η κινητική της ενέργεια.

$$K = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 \text{J} = 4 \text{J}.$$

β) η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας.

Κατά τη διάρκεια της πτώσης η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και ίση με 24J. Αλλά αφού η κινητική ενέργεια είναι ίση με 4J, η δυναμική ενέργεια θα είναι:

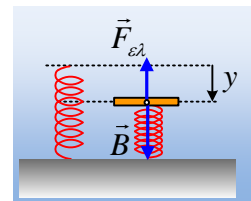
$$U' = E_{\text{μηχ}} - K = 24 \text{J} - 4 \text{J} = 20 \text{J}.$$

γ) Το (φυσικό) μήκος του ελατηρίου.

Τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο, απέχει από το έδαφος απόσταση $h_1 = \ell_0$, όπου ℓ_0 το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Οπότε:

$$U' = mgh_1 = mg\ell_0 \rightarrow \ell_0 = \frac{U'}{mg} = \frac{20}{2 \cdot 10} \text{m} = 1 \text{m}$$

- iii) Μόλις η πλάκα έρθει σε επαφή με το ελατήριο, θα αρχίσει να το συσπειρώνει, οπότε θα δεχτεί δύναμη από το ελατήριο, την $F_{\text{ελ}}$, όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι στη θέση που το ελατήριο έχει συσπίρωση y , δέχεται δύναμη με φορά προς τα πάνω, μέτρου $F_{\text{ελ}} = ky$. Για όσο χρονικό διάστημα $B > F_{\text{ελ}}$, το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω, ενώ αντίθετα, όταν $B < F_{\text{ελ}}$, η πλάκα θα επιβραδύνεται. Συνεπώς το σώμα θα συνεχίσει να επιταχύνεται και να αυξάνει την ταχύτητά του, μέχρι τη θέση όπου $B = F_{\text{ελ}}$ (θέση ισορροπίας) ενώ στη συνέχεια θα επιβραδυνθεί μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του στιγμιαία, πριν κινηθεί ξανά προς τα πάνω. Με βάση αυτά οι προτάσεις είναι:



- α) Θα δεχτεί σταθερή δύναμη από το ελατήριο με φορά προς τα πάνω. **Λ.**
 β) Θα δεχτεί δύναμη από το ελατήριο, το μέτρο της οποίας θα αυξάνεται ανάλογα με την συσπίρωση του ελατηρίου. **Σ.**
 γ) Θα δεχτεί δύναμη από το ελατήριο, το μέτρο της οποίας θα αυξάνεται ανάλογα με την ταχύτητα του σώματος. **Λ.**
 δ) Η πλάκα αρχικά θα επιταχύνεται και η ταχύτητά της θα αυξάνεται. **Σ.**

ε) Η πλάκα θα αρχίσει αμέσως να επιβραδύνεται. **Λ.**

Χαρακτηρίστε ως σωστές ή λανθασμένες τις παραπάνω προτάσεις.

iv) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της πλάκας στη θέση που αυτή απέχει 0,9m από το έδαφος.

Στη θέση που η πλάκα απέχει 0,9m από το έδαφος, έχει συσπειρώσει το ελατήριο κατά $\Delta \ell = 0,1\text{m}$, οπότε δέχεται δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο $F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell = 100 \cdot 0,1\text{N} = 10\text{N}$. Αλλά τότε:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{mg - F_{ελ}}{m} = \frac{2 \cdot 10 - 10}{2} \text{m/s}^2 = 5 \text{m/s}^2$$

v) Κάποια στιγμή το ελατήριο έχει συσπείρωση $y_1 = 0,2\text{m}$, θέση Β. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Η δυναμική βαρυτική ενέργεια.

β) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

γ) Η ταχύτητα της πλάκας.

δ) Η επιτάχυνση της πλάκας.

α) Στη θέση Β το σώμα βρίσκεται σε ύψος $h' = 0,8\text{m}$ από το έδαφος και θα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_B = mgh' = 2 \cdot 10 \cdot 0,8\text{J} = 16\text{J}$$

β) Αντίστοιχα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,2^2 \text{J} = 2\text{J}$$

γ) Κατά τη διάρκεια της κίνησης από την θέση Α μέχρι τη θέση Β η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις:

$$\begin{aligned} K_A + U_A &= K_B + U_B \rightarrow \\ 0 + U_{B/A} &= \frac{1}{2} m v^2 + U_{B/B} + U_{ελ/B} \rightarrow \\ 24 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 + 16 + 2 \rightarrow \\ v &= \sqrt{6} \text{m/s} \end{aligned}$$

δ) Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m \cdot a \rightarrow \\ a &= \frac{\Sigma F}{m} = \frac{B - F_{ελ}}{m} = \frac{mg - k \cdot \Delta \ell}{m} = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{2} \text{m/s}^2 = 0 \end{aligned}$$

vi) Μετά από λίγο το σώμα βρίσκεται σε ύψος 0,7m (από το έδαφος). Να υπολογιστούν η επιτάχυνση και η κινητική ενέργεια της πλάκας στη θέση αυτή (θέση Δ).

Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει συσπείρωση $\Delta \ell' = 0,3\text{m}$, οπότε:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m \cdot a \rightarrow \\ a &= \frac{\Sigma F}{m} = \frac{B - F_{ελ'}}{m} = \frac{mg - k \cdot \Delta \ell'}{m} = \frac{20 - 100 \cdot 0,3}{2} \text{m/s}^2 = -5 \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Ενώ από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ξανά, παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_D + U_D \rightarrow$$

$$0 + U_{\beta/\Delta} = K_{\Delta} + U_{\beta/\Delta} + U_{\epsilon/\Delta} \rightarrow$$

$$24 = K_{\Delta} + mgh_{\Delta} + \frac{1}{2}k(\Delta\ell')^2 \rightarrow$$

$$K_{\Delta} = 24J - 2 \cdot 10 \cdot 0,7J - \frac{1}{2}100 \cdot 0,3^2 J \rightarrow$$

$$K_{\Delta} = 5,5J$$

vii) Ποια θα είναι η μέγιστη συσπείρωση y_2 του ελατηρίου, τη στιγμή που θα μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητα της πλάκας, πριν κινηθεί ξανά προς τα πάνω, στη θέση Γ;

Εφαρμόζουμε ξανά τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ και παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \rightarrow$$

$$0 + U_{\beta/\Delta} = 0 + U_{\beta/\Delta} + U_{\epsilon/\Delta} \rightarrow$$

$$24 = mgh_{\Gamma} + \frac{1}{2}ky_2^2 \rightarrow$$

$$24 = mg(\ell_0 - y_2) + \frac{1}{2}ky_2^2 \rightarrow$$

$$24 = 20(1 - y_2) + \frac{1}{2}100 \cdot y_2^2 \rightarrow$$

$$50y_2^2 - 20y_2 - 4 = 0 \rightarrow$$

$$y_2 = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 50 \cdot (-4)}}{100} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 800}}{100} \rightarrow$$

$$y_2 = 0,55\text{m} \text{ ή } y_2 = -0,15\text{m} \text{ (απορρίπτεται)}$$

dmargaris@gmail.com