Relaciones fasoriales para R, L y C

- **El poder de la técnica de análisis basado en fasores radica en que se pueden definir relaciones algebraicas entre la tensión y la corriente en resistores, inductores y capacitores**

- **Resistor:**

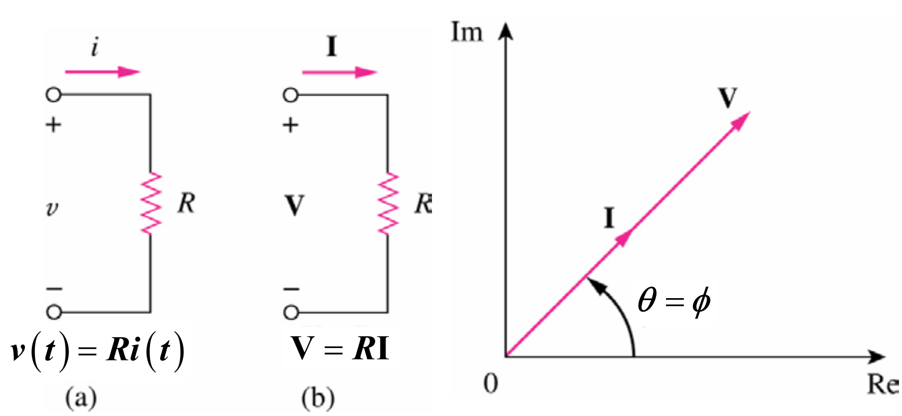
$$v(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}, \quad i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = RI_m e^{j(\omega t+\phi)} \quad \Rightarrow \quad V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

$$V_m \underline{|\theta} = RI_m \underline{|\phi} \quad \Rightarrow \quad V_m = RI_m, \quad \theta = \phi$$

$$\boxed{\mathbf{V} = R\mathbf{I}}$$

- **Resistor:**



Relaciones fasoriales para R, L y C

- **Inductor:**

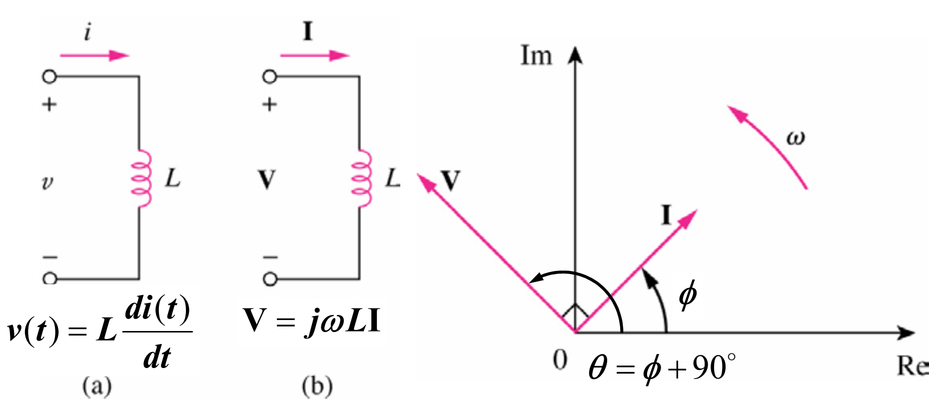
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \;\Rightarrow\; v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}, \quad i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} \;\Rightarrow\; V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

$$V_m \underline{|\theta} = \omega L I_m \underline{|\phi + 90^\circ} \;\Rightarrow\; V_m = \omega L I_m, \quad \theta = \phi + 90^\circ$$

$$\boxed{\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}}$$

- **Inductor:**



Relaciones fasoriales para R, L y C

- **Capacitor:**

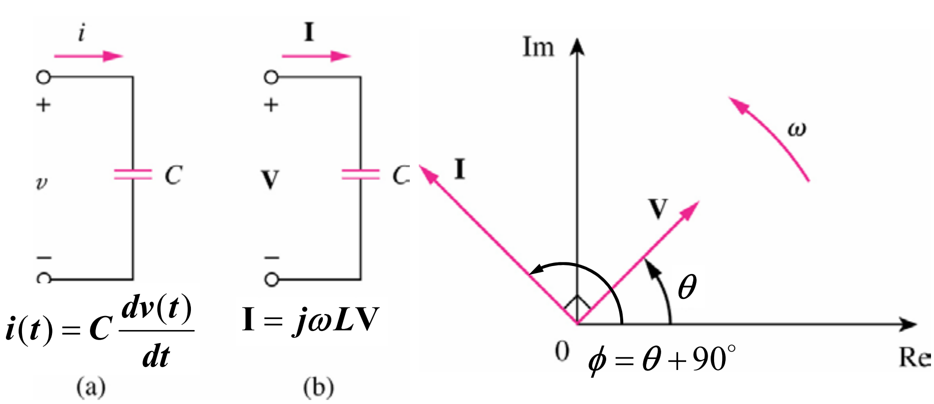
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)}, \quad i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} = j\omega C V_m e^{j(\omega t+\theta)} \Rightarrow I_m e^{j\phi} = j\omega C V_m e^{j\theta}$$

$$I_m \underline{|\phi} = \omega C V_m \underline{|\theta + 90^\circ} \Rightarrow I_m = \omega C V_m, \quad \phi = \theta + 90^\circ$$

$$\boxed{\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}}$$

- **Capacitor:**



Resumen de las relaciones tensión - corriente

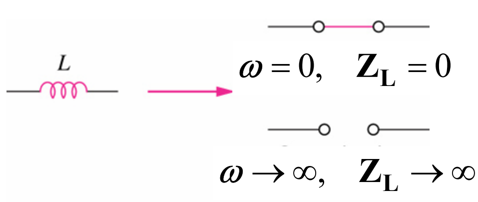
Elemento	Dominio de tiempo	Dominio de frecuencia
R	$v(t) = Ri(t)$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$v(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$

Impedancia

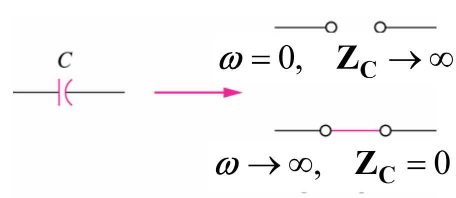
- La impedancia $\mathbf{Z}$ de un circuito es la razón entre la tensión fasorial $\mathbf{V}$ y la corriente fasorial $\mathbf{I}$, medida en ohms (Ω)

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad o \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \qquad\qquad \mathbf{Z}_L = j\omega L \quad y \quad \mathbf{Z}_c = 1/j\omega C$$

- La impedancia representa la oposición que el circuito muestra al flujo de corriente senoidal
- La impedancia no es un fasor y su valor depende de la frecuencia



(a)



(b)

Impedancia

- La impedancia puede expresarse en forma rectangular como:

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

- Donde, $R = \operatorname{Re}\mathbf{Z}$ es la resistencia y $X = \operatorname{Im}\mathbf{Z}$ es la reactancia
- La reactancia X puede ser positiva o negativa
- Cuando X es positiva la impedancia es inductiva o de retraso porque la corriente se atrasa respecto a la tensión ($\mathbf{Z} = R + jX$)
- Cuando X es negativa la impedancia es capacitiva o de adelanto porque la corriente se adelanta respecto a la tensión ($\mathbf{Z} = R - jX$)
- La impedancia, resistencia y reactancia se miden en ohms (Ω)

Impedancia

- La impedancia también puede expresarse en forma polar como:

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\underline{|\theta}$$

$$\mathbf{Z} = R + jX = |\mathbf{Z}|\underline{|\theta} \qquad |\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + jX^2}, \quad \theta = tan^{-1}\left(X/R\right)$$

$$R = |\mathbf{Z}|\,cos\theta, \quad X = |\mathbf{Z}|\,sen\theta$$

Admitancia

- A veces es conveniente trabajar con el inverso de la impedancia, conocido como admitancia
- La admitancia $\mathbf{Y}$ es el inverso de la impedancia, medido en siemens (S)

Admitancia

- La admitancia Y de un elemento (o un circuito) es la razón entre la corriente fasorial y la tensión fasorial a través de él:

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

- La admitancia también puede expresarse en forma rectangular:

$$\mathrm{Y} = G + jB$$

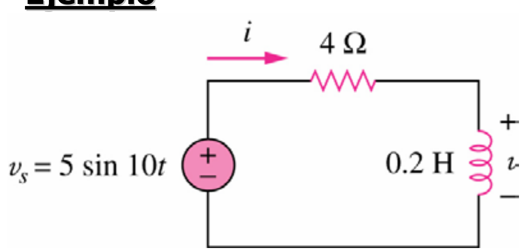
- $G = \mathrm{Re}\,\mathrm{Y}$ es la conductancia y $B = \mathrm{Im}\,\mathrm{Y}$ es la susceptancia
- La admitancia, conductancia y susceptancia se miden en siemens (S)

$$G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

$$G + jB = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \Rightarrow G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Ejemplo

- Determinar $v(t)$ e $i(t)$:



$$\mathbf{V_s} = 5\angle{-90^\circ}\ V$$

$$\mathbf{Z} = 4 + j\omega L = 4 + j(10)(0.2) = 4 + j2\ \Omega = 4.47\angle{+26.56^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{V_s}/\mathbf{Z} = 5\angle{-90^\circ}\ V / 4.47\angle{+26.56^\circ}\ \Omega = 1.12\angle{-116.56^\circ}\ A$$

$$i(t) = 1.12\cos\left(10t - 116.56^\circ\right) A = 1.12\,sen\left(10t - 26.56^\circ\right) A$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z_L}\mathbf{I} = \left(2\angle{90^\circ}\ \Omega\right)\left(1.12\angle{-116.56^\circ}\ A\right) = 2.24\angle{-26.56}\ V$$

$$v(t) = 2.24\cos\left(10t - 26.56^\circ\right) V = 2.24\,sen\left(10t - 63.44^\circ\right) V$$