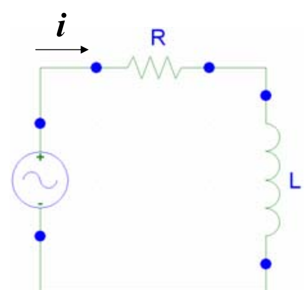
Respuesta forzada a funciones senoidales

- La respuesta de un circuito a una función forzada senoidal está compuesta por dos partes: la solución homogénea (respuesta natural) y la solución particular (respuesta forzada, de estado estable, de estado estacionario, de estado permanente)
- La respuesta forzada tiene la forma matemática de la función forzada

$$V_s(t) = V_m cos\omega t$$



$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m cos\omega t$$

Respuesta forzada a funciones senoidales

- Utilizando el método de coeficientes indeterminados o la transformada de Laplace:

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} cos\omega t + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} sen\omega t$$

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} cos\omega t\left(\omega t - tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

- Cuando ω=0 o L=0, la corriente está en fase con la tensión
- Cuando R=0, la corriente está retrasada de la tensión en 90°

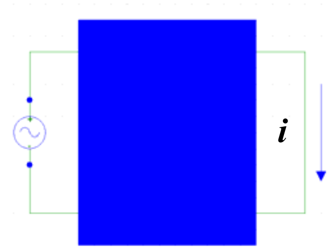
Función forzada compleja

- Es impráctico analizar cada circuito utilizando el método descrito anteriormente (ecuaciones integro-diferenciales)
- Es necesario un método que permita simplificar el análisis
- El resultado de este método será una relación algebraica entre la corriente senoidal y la tensión senoidal para inductores, capacitores y resistores
- Además se obtendrá un conjunto de ecuaciones algebraicas para un circuito de cualquier complejidad
- Las constantes y las variables en las ecuaciones serán números complejos en lugar de números reales
- El análisis de cualquier circuito en estado senoidal permanente se vuelve casi tan sencillo como el análisis de un circuito resistivo similar

Función forzada compleja

- Una función forzada senoidal siempre da lugar a una respuesta forzada senoidal de la misma frecuencia en un circuito lineal
- Fuente función senoidal real → respuesta función senoidal real
- Fuente función senoidal imaginaria → respuesta función senoidal imaginaria

$V_m cos(\omega t + \theta)$ $\quad$ $I_m cos(\omega t + \phi)$



$jV_m cos(\omega t + \theta)$ $\quad$ $jI_m cos(\omega t + \phi)$

$$j = \sqrt{-1} = constante$$

Función forzada compleja

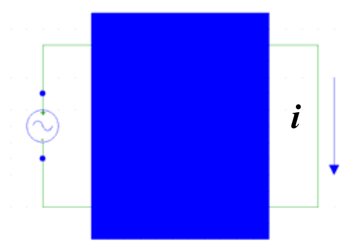
- **Por teorema de superposición (circuito lineal):**
- **Fuente función forzada compleja (suma de funciones forzadas real e imaginaria)**

$$V_m cos(\omega t+\theta)+jV_m cos(\omega t+\theta)=V_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

- **Respuesta función compleja (suma de respuestas real e imaginaria)**

$$I_m cos(\omega t+\phi)+jI_m cos(\omega t+\phi)=I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

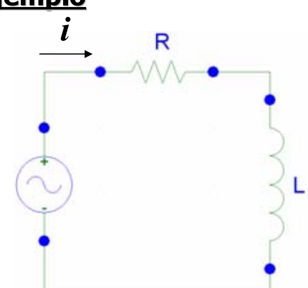
$V_m e^{j(\omega t+\theta)}$



$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

Ejemplo

$$V_s(t)=V_m cos\omega t$$



- **Se aplica entrada compleja y se obtiene respuesta compleja**

$$\left.\begin{aligned} V_m e^{j\omega t} &= V_m\left(cos\omega t+jsen\omega t\right)\\ I_m e^{j(\omega t+\phi)} &= I_m\left(cos(\omega t+\phi)+jsen(\omega t+\phi)\right)\end{aligned}\right\}\ \textbf{Euler}$$

- **Pero como la entrada es real, solamente se toma la parte real de la respuesta compleja**

$$V_s(t)=Re\left\{V_m e^{j\omega t}\right\} \qquad i(t)=Re\left\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V_m e^{j\omega t}$$

$$L\frac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right)+R\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right)=V_m e^{j\omega t}$$

$$j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}+RI_m e^{j(\omega t+\phi)}=V_m e^{j\omega t}$$

$$j\omega L I_m e^{j\phi}+RI_m e^{j\phi}=V_m$$

$$I_m e^{j\phi}=\frac{V_m}{R+j\omega L}$$

$$I_m e^{j\phi}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j\left(-tan^{-1}(\omega L/R)\right)}$$

- **Donde:** $I_m=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ $\phi=-tan^{-1}(\omega L/R)$
- **Notación polar:** $I_m\angle\phi$ $\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\angle -tan^{-1}(\omega L/R)$
- **Respuesta real:** $i(t)=Re\left\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$

$$i(t)=I_m cos(\omega t+\phi)=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}cos\left(\omega t-tan^{-1}(\omega L/R)\right)$$

$$i(t) = I_m cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = Re\left\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\right\}$$

$$\mathrm{I} = I_m e^{j\phi}$$

$$\mathrm{I} = I_m \underline{|\phi}$$

Fasor