задачи по нуклеарна физика

Princeton 7.2

Претпоставуваме дека јадрото можеме да го апроксимираме со инертна срцевина од $A-1$ нуклеони, подредени во двојки со вкупен спин нула околу кои се движи преостанатиот нуклеон со спин $1/2$. Орбиталниот аголен момент е l а вкупниот аголен момент е $I = l \pm 1/2$. Операторот на магнетниот момент на јадрото е збир од орбиталниот и од внатрешниот магнетен момент на нуклеонот

$$\mu_I = \mu_l + \mu_s = \frac{\mu_N}{\hbar}(g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s})$$

Во овие равенки, $\mu_N = e\hbar/2m_p$ е нуклеарниот магнетон додека $g_l = 1$, $g_s \approx 5,6$ за протон и $g_l = 0$, $g_s \approx -3,8$ за неутрон.

Очекуваната вредност на μ_I мора да биде паралелна на вкупниот спин $\mathbf{I} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ затоа што тоа е единствената можна насока: $\langle \mu_I \rangle = k \langle \mathbf{I} \rangle$. Со примена на теоремата на Wigner-Eckart за елиминирање на k може да се најде релацијата

$$\langle \mu_I \rangle = \frac{\langle \mu_I * \mathbf{I} \rangle}{I(I+1)\hbar^2} \langle \mathbf{I} \rangle$$

Магнетниот момент е дефиниран како очекувана вредност на z -компонентата на μ_I во состојба во која $I_z = I\hbar$,

$$\mu_I \equiv \frac{\langle \mu_I * \mathbf{I} \rangle}{(I+1)\hbar}$$

Оваа вредност можеме да ја пресметаме со презапишување на изразот за операторот на магнетниот момент во облик

$$\mu_I = \frac{\mu_N}{\hbar}\left(\frac{1}{2}(g_l + g_s)\mathbf{I}^2 + \frac{1}{2}(g_l - g_s)(\mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2)\right)$$

и со скаларно множење со $\mathbf{I}$ се добива

$$\mu_I * \mathbf{I} = \frac{\mu_N}{\hbar}\left(\frac{1}{2}(g_l + g_s)\mathbf{I}^2 + \frac{1}{2}(g_l - g_s)(\mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2)\right)$$

Ако од овде ја побараме очекуваната, средна вредност и добиениот израз го поедноставиме за жиромагнетниот количник $g_I = \mu_I/(\mu_N I)$ ќе најдеме:

$$g_l = \frac{1}{2}(g_l + g_s) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)\frac{l(l+1) - 3/4}{I(I+1)}$$

За случајот $I = l - 1/2$ овој израз се поедноставува во

$$g_I = g_l + \frac{g_l - g_s}{2(I+1)}$$

а за $I = l + 1/2$, соодветно

$$g_I = g_l - \frac{g_l - g_s}{2I}$$

Редоследот на нивоата на енергијата е

$$1s_{1/2}\|_2 1p_{3/2}1p_{1/2}\|_8 1d_{5/2}2s_{1/2}1d_{3/2}\|_{20}1f_{7/2}$$

Во оваа таблица вертикалните линии ги означуваат "магичните" затворени слоеви за кои интервалот на енергијата до следното ниво (до следниот слој) е невообичаено голем.

Јадрото $^{17}_{8}$O има еден неспарен неутрон во слојот $1d_{3/2}$. Неутронот има $l = 2, I = 5/2 = l + 1/2$ па затоа вметнувањето на релевантните вредности $g_l = 0, g_s = -3,8$ во соодветната равенка ќе ја најдеме вредноста $g_I = -0,76$. Оваа бројка соодвецтвува на магнетен момент

$$\mu_I = \frac{5}{2} g_I \mu_N = -1,9\mu_N$$

Во случајот на јадрото $^{23}_{11}$Na имаме еден неспарен протон во слојот $1d_{5/2}$ за кој $g_l = 1, g_s = 5,6$. Според тоа $g_l = 1,9$ и магнетниот момент е $\mu_I = 4,8\mu_N$. На сличен начин за јадрото $^{45}_{21}$Sc наоѓаме дека има еден неспарен протон во слојот $1f_{7/2}$ така што $l = 3, I = l + 1/2 = 7/2, g_I = 1,7$ и $\mu_I = 5,8\mu_N$.

За да го пресметаме електричниот квадруполен момент на јадрото $^{15}_{7}$N треба да ја пронајдеме конфигурацијата на неговите протони:

$$\left[\left(1s_{1/2}\right)^2 \left(1p_{3/2}\right)^4 \left(1p_{1/2}\right)^2\right] \left(1p_{1/2}\right)^{-1}$$

каде што со средните загради [...] се означени магичните затворени слоеви а со $(...)^{-1}$ е означена шуплина со полнеж $-e$. Во рамките на екстремниот едночестичен модел претпоставуваме дека затворените слоеви не придонесуваат во квадруполниот момент кој е дефиниран како

$$Q = \frac{1}{e} \sum \langle q(3z^2 - r^2) \rangle$$

Тука во сумата се вклучени сите честички (протони или шуплини) што придонесуваат во моментот, q е полнежот на честичките а очекуваната, средна вредност се пресметува во состојбата со $I_z = I$. Во случајот што не интересира, случај на екстремен едночестичен модел според кој една единствена честичка кружи околу сферно симетрична срцевина, брановата функција ќе се раздели на производ од две компоненти - аголен и радијален. Според тоа Q можеме да го запишеме како

$$Q = \frac{1}{e} \sum \langle qr^2 \rangle \langle (3\cos^2\theta - 1) \rangle$$

каде што со θ е означен поларниот агол. Лесно е да се пресмета аголниот дел на очекуваната, средна вредност. Во сферни координати, $\cos^2\theta = z^2/r^2$. Слично на тоа, очекуваната вредност на $\cos^2\theta$, во состојба на аголниот момент $|I\, I_z\rangle$ може да се запише како

$$\langle I\, I_z | \cos^2\theta | I\, I_z \rangle = \left\langle \frac{I_z^2}{\mathbf{I}^2} \right\rangle = \frac{\langle I_z^2 \rangle}{I(I+1)}$$

За $I_z = I$ ќе најдеме

$$\langle 3\cos^2\theta - 1 \rangle = \frac{3I}{I+1} - 1 = \frac{2I-1}{I+1}$$

Радијалната очекувана, средна вредност може да се апроксимира со на типичните нуклеарни радиуси кои се дадени со емпириската формула $r \approx 1,1A^{1/3}\,\mathrm{fm}$. Во случајот на

јадрото $^{15}_{7}\mathrm{N}$ вкупниот спин на јадрото е $I = 1/2$ и гледаме дека $Q = 0$. За јадрото $^{11}_{5}\mathrm{B}$ протонската конфигурација е

$$\left[\left(1s_{1/2}\right)^2\left(1p_{3/2}\right)^4\right]\left(1p_{3/2}\right)^{-1}$$

па така имаме шуплина во состојба $I = 3/2$. Според тоа квадруполниот момент е

$$Q = -\langle r^2\rangle\frac{3-1}{3/2+1} = -\frac{4}{5}\langle r^2\rangle$$

Ако ја внесеме вредноста $r \approx 3\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ наоѓаме дека квадруполниот момент за ова јадро изнесува $Q \approx -7\times 10^{-30}\,\mathrm{m}^2$.