الفصل الثالث: التكامل

- التكامل هو العملية العكسية للتفاضل
- مثال توضيحي
- التكامل غير المحدود
- التكامل المحدود
- التكامل غير المحدود يشمل:

➢ التكامل بطريقة مباشرة

➢ التكامل بطريقة غير مباشرة

أولا: التكامل غير المحدود

- التكامل بالطريقة المباشرة
- يعني إيجاد الدالة الأصلية بمعلومية تفاضل الدالة.
- يتم ذلك عن طريق مجموعة من القواعد

قواعد التكامل (الصور القياسية للتكامل)

$$\int a\,dx = ax + k$$

$$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + k$$

$$\int 1/x\,dx = \ln x + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int a^x dx = a^x/\ln a + k$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

مثال

أوجد التكاملات التالية

$$a)\int\left(e^{x}+\frac{2}{x}-1\right)dx$$

$$b)\int\left(\frac{3}{x^{2}}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)dx$$

$$c)\int\left(2^{x}-5x\right)dx$$

التكامل غير المحدود بطريقة غير مباشرة

- تسمي طرق إجراء التكامل
- التكامل بالتعويض
- التكامل بالتجزيء
- التكامل باستخدام الكسور الجزئية

التكامل بالتعويض

- تحويل الدالة غير المباشرة إلي إحدى الصور القياسية السابقة
- مثال توضيحي $\int 5e^{5x}dx$
- بصفة عامة يمكن استخدام القواعد الخاصة بالتكامل بالتجزيء بدلا من التحويل المستخدم في المثال السابق

بعض قواعد التكامل بالتعويض

$$(1)\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + k$$

$$(2)\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k$$

$$(3)\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + k$$

$$(4)\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$$

مثال

أوجد التكاملات التالية:

$$(1)\int 2x\sqrt{x^2-3}\,dx$$

$$(2)\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$$

$$(3)\int \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+3}}\,dx$$

$$(4)\int \frac{2x+1}{2x^2+2x=3}\,dx$$

$$(5)\int x e^{3x^2}\,dx$$

$$(6)\int 4^{3x}\,dx$$

$$(7)\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx$$

$$(8)\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

التكامل بالتجزيء

الفكرة الأساسية تقوم علي تجزئة الدالة المراد تكاملها إلي جزءين . يعبر عنها كحاصل ضرب دالتين: دالة **U** ضرب مشتقة أولى لدالة أخرى تسمي dv ويوجد التكامل باستخدام القاعدة:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال: أوجد التكامل

$$\int x(x+1)^2 dx$$

مثال

أوجد التكاملات التالية

$$\int x e^{x} dx$$

$$\int x(x+1)^4 dx$$

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\int \ln x dx$$

$$\int x \ln x dx$$

مثال

أوجد معادلة الدالة y=f(x) إذا علمت أن:

1. $y''' = 2$ وكانت النقطة (3,-2) نقطة انقلاب و النقطة (1,10/3) نقطة نهاية عظمي و الدالة تمر بالنقطة (0,1).
2. $y''' = 2$ وكانت النقطة (1,10/3) نهاية عظمي و النقطة (5,-22/3) نقطة نهاية صغري و الدالة تمر بالنقطة (0,1).

ثانيا: التكامل المحدود

- التكامل المحدود عبارة عن تكامل بين قيمتين من قيم x
- يرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$
- المساحة تحت منحنى الدالة بين x=a و x=b (رسم)
- قيمة التكامل المحدود تساوي قيمة التكامل عند الحد الأعلى ناقص قيمة التكامل عند الحد الأدنى

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال

أوجد التكاملات التالية

$$\int_{1}^{2} (x+1)\,dx$$

$$\int_{0}^{2} (x^{2}+1)\,dx$$

$$\int_{1}^{3} x^{2}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} x^{2}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} x^{3}\,dx$$

خصائص التكامل المحدود

- تساوي الحد الأدنى والحد الأعلى $\int_a^a f(x)dx = 0$
- تبديل حدي التكامل $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- بافتراض أن a<c<b فإن $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- تكامل الدالة الفردية $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- تكامل الدالة الزوجية $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

تطبيقات التكامل

التطبيق الأول: إجمالي كمية معينة

إذا كان لدينا دالة تعبر عن معدل تغير كمية تكون المساحة المحصورة بين المحور الأفقي ومنحني هذه الدالة عبارة عن إجمالي هذه الكمية.

مثال:

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لأحد الشركات تأخذ الشكل

$$MR(t) = 400 + 100t$$

حيث t=0 لسنة 1990 ما هو إجمالي الإيراد من عام 1990 حتى 2002 ؟ ما هي السنة التي فيها الإيراد الكلي =1000

مثال

- إذا كان معدل تكاليف الصيانة لسيارة معينة في السنة t يعطي من العلاقة

$$r(t)=120e^{0.4t}$$

ما هي إجمالي تكاليف الصيانة لسنة واحدة ولثلاثة سنوات

- افترض أن الإيراد الحدي لشركة منتجات كهربائية خلال الفترة من عام 2003 إلي 2008 يأخذ الشكل

$$f(x)=5.18x+159$$

حيث x=3 في عام 2003 . ما هو إجمالي إيراد الشركة خلال هذه الفترة؟

التطبيق الثاني: إيجاد المساحة بين منحنيين

- المساحة المحصورة بين منحني الدالة f(x) والدالة g(x) والنقطتين x=a و x=b تعطي من العلاقة (رسم توضيحي)

$$\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$y = x^2$$

$$y = 2x$$

مثال

- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$y = x^2 + 3x - 1$$
$$y = 2x - 1$$

- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$p = 16 - q^2$$
$$p = 7$$

- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$p = 2q + 1$$
$$p = 7$$

مثال

- افترض أن الإيراد لشركة ما خلال الفترة من عام 2003 – 2008 يأخذ الشكل $f(x) = 5.18x + 159$ حيث x=3 في عام 2003. أفترض أن التكلفة خلال هذه الفترة تكون

$$g(x) = -0.16x^3 + 3.36x^2 - 16.62x + 170$$

أوجد إجمالي الربح للشركة خلال هذه الفترة.

التطبيق الثالث: ربحية استخدام آلة

معدل الإيراد من إنتاج الآلة يساوي $R_1(t)$

معدل تكلفة الآلة $C_1(t)$

الربح المتحقق من الآلة في السنوات التي يكون فيها معدل الإيراد أعلي من معدل التكلفة (N سنة) هو

$$\int_0^N [R_1(t) - C_1(t)]dt$$

مثال

معدل العائد من آلة معينة يكون $R_1(t) = 5000 - 20t^2$ جنية لكل سنة ومعدل تكلفة التشغيل مدة t سنة يكون $C_1(t) = 2000 + 10t^2$ جنية لكل سنة. المطلوب:

أ) تحديد عدد السنوات التي تكون فيها الآلة مربحة.

ب) ما هي ربحية الآلة خلال تلك السنوات؟

التطبيق الرابع: الربح الإضافي

وجود خطتي استثمار حيث معدل الربح من الخطة الأولي $R_1(t)$
ومعدل الربح من الخطة الثانية $R_2(t)$ حيث t تمثل الزمن.
يكون فائض الربح المحقق من الخطة الثانية

$$\int_0^N [R_2(t) - R_1(t)]dt$$

مثال

بافتراض أن t تمثل عدد السنوات من الآن وكانت أحدى الخطط الاستثمارية ستؤدي إلي ربح بمعدل $R_1(t) = 50 + t^2$ مليون جنية لكل سنة بينما معدل الربح للخطة الاستثمارية الأخرى $R_2(t) = 200 + 5t$ مليون جنية لكل سنة

أ) السنوات التي تكون فيها الخطة الثانية أعلي ربحية من الأولى

ب) حدد الربح الإضافي من استخدام الخطة الثانية خلال هذه الفترة

التطبيق الخامس: فائض المستهلك و المنتج

فائض المستهلك هو الفرق بين السعر الذي كان المستهلك مستعد لدفعه للحصول علي السلعة وما دفعه بالفعل.

$$CS = \int_{0}^{q_0} [D(q) - p_0]dq$$

فائض المنتج هو الفرق بين السعر الذي دفعه المستهلك بالفعل وما كان المنتج مستعد أن يبيع به السلعة.

$$PS = \int_{0}^{q_0} [p_0 - S(q)]dq$$

مثال

بافتراض أن دالة الطلب علي الشكل

$$p = 16 - q^2$$

وأن دالة العرض علي الشكل

$$p = 2q + 1$$

أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج بافتراض المنافسة الكاملة

الفصل الرابع: المصفوفات وتطبيقاتها

- تعريف المصفوفات
- عمليات المصفوفات
- أنواع خاصة من المصفوفات
- المحددات وخصائصها
- مقلوب المصفوفة
- رتبة المصفوفة
- حل المعادلات الخطية
- تحليل المدخلات والمخرجات

تعريف

المصفوفة: هي تجميع عناصر في شكل صفوف وأعمدة وتكتب علي الشكل

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويرمز لها بالرمز $A_{m\times n}=\{a_{ij}\}$ حيث $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$

تسمي مصفوفة من الدرجة (m x n)

المتجه: مصفوفة صف واحد (صفي) أو عمود واحد (عمودي)

عمليات المصفوفات

- جمع وطرح المصفوفات: لابد أن تكون المصفوفات من نفس الدرجة ويتم جمع (طرح) كل عنصر ونظيره.

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

- ضرب المصفوفات: يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولي تساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$A_{m\times k} \times B_{k\times n} = C_{m\times n}$$

لاحظ أن

$$A \times B \neq B \times A$$

أنواع خاصة من المصفوفات

- المصفوفة المربعة: عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة
- المصفوفة القطرية: العناصر صفرية ماعدا القطر الرئيسي
- مصفوفة الوحدة I : مصفوفة قطرية وعناصر القطر تساوي 1 ولمصفوفة الوحدة خاصتين:

a) $IA = AI = A$

b) $I^k = I$

- المصفوفة المثلثيه العلوية
- المصفوفة المثلثيه السفلية

- مبدول المصفوفة: ينتج عن طريق تبديل الصفوف والأعمدة
- مبدول المصفوفة A يرمز له بالرمز A' أو A^T
- خصائص مبدول المصفوفة:

$$1)(A')' = A$$

$$2)(AB)' = B'A'$$

$$3)(A \pm B)' = A' \pm B'$$

- المصفوفة المتماثلة: المصفوفة التي تساوي مبدولها

$$A^T = A$$

- المصفوفة الكامنة : يكون $A^k = A, k = 2, 3, \ldots.$
- مثال المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

- المصفوفة المتعامدة: هي المصفوفة التي يكون فيها

$$A^T = A^{-1}$$

ويكون فيها مجموع مربعات كل صف =1 وحاصل ضرب أي صفين أو عمودين = صفر

مثال: المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

تكون متعامدة

المحددات

- المحدد هو عبارة عن رقم ثابت مصاحب لبعض المصفوفات المربعة. أيضا هو دالة تخصص لكل مصفوفة رقم ينتمي للأعداد الحقيقية.
- قيمة المحدد $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ باستخدام الصف i

حيث C_{ij} تسمى المحدد المرافق للعنصر a_{ij} وتعطي من العلاقة

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- مثال: محدد ثنائي وثلاثي

خصائص المحددات

- أحد الصفوف أو الأعمدة يساوي أصفار
- تساوي صفين أو عمودين
- أبدال صفين أو عمودين
- ضرب المحدد في رقم ثابت
- قسمة المحدد علي رقم ثابت
- قيمة المحدد لا تتغير بإبدال الصفوف والأعمدة

مقلوب المصفوفة A^{-1}

- يكون $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
- نستخدم المحددات لإيجاد مقلوب المصفوفة

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times C'$$

- مثال:

أوجد مقلوب المصفوفات

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- خصائص مقلوب المصفوفة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

- خصائص المصفوفة المتعامدة

$$A' = A^{-1}$$

$$AA' = I$$

$$|A| = \pm 1$$

Rank of a matrix رتبة المصفوفة

- <u>رتبة المصفوفة</u> هي أعلي درجة محدد لا يساوي صفر داخل المصفوفة.
- مثال: أوجد رتبة المصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

التطبيق الأول: حل المعادلات الخطية

- مجموعة المعادلات

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

- يمكن أن توضع في صورة مصفوفات كما يلي

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$$

- مجموعة المعادلات

A.لها حل وحيد

B.لها عدد لا نهائي من الحلول

C.لا يوجد لها حل

- يمكن إيجاد الحل من القاعدة $X = A^{-1}b$
- مثال: أوجد حل المعادلات التالية

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$3x_1 + x_2 = 5$$

التطبيق الثاني: تحليل المدخلات والمخرجات

- تحت الفرض بأن كل ما ينتج سوف يستهلك
- الطلب علي منتجات قطاع معين يأتي من ناحيتين:

A. الطلب من صناعات أخرى

B. و الطلب من مصادر أخرى بخلاف الصناعة.

- مثال: إنتاج قطاع الطاقة يكون عليه طلب من:

1. شركات الطاقة نفسها — طلب داخل الصناعة
2. شركات أخرى
3. مستهلكين — طلب غير صناعي

- الهدف من تحليل المدخلات والمخرجات هو تحديد الكمية التي يجب أن تنتجها صناعة معينة حتى تفي بنوعي الطلب.
- بمعني آخر: ما هي الكمية التي يجب أن تنتج حتى يكون هناك توازن بين العرض والطلب.
- الطلب داخل الصناعة يعبر عنه بواسطة مصفوفة المدخلات والمخرجات.
- مثال: الصف للمنتج والعمود للمستهلك

افترض أن المنتج للصناعة يقاس بالجنية

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- العنصر a_{ij} في المصفوفة السابقة يمثل الكمية من ناتج الصناعة i المطلوبة لإنتاج جنية واحد من ناتج الصناعة j
- افترض أن x_j تعبر عن الناتج من الصناعة j (بالجنية)
- افترض d_j تمثل الطلب غير الصناعي علي منتج الصناعة j
- مجموعة المعادلات التي تحدد قيمة الناتج من الصناعة الذي يحدث عنده التوازن
- ناتج الصناعة = الطلب بين الصناعات +الطلب غير الصناعي

- القاعدة $X = (I - A)^{-1} D$
- مثال: في حالة 3 صناعات كانت مصفوفة المدخلات والمخرجات A والطلب غير الصناعي D يعطي بالشكل
- $$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$$
- إرشاد:

$$|I - A| = 0.245$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.387 & 0.816 & 1.020 \\ 0.490 & 1.551 & 0.939 \\ 0.694 & 0.531 & 2.163 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 177.53 \\ 127.37 \\ 180.41 \end{pmatrix}$$

- يمكن تحديد الطلب بين الصناعات من الكمية AX

- يمكن إضافة هذه الكمية علي الطلب غير الصناعي للوصول إلي ناتج الصناعات.

- لاحظ أن المجموع هنا يختلف عن الذي نحصل عليه من القاعدة السابقة نتيجة التقريب.